

ГЕНЕРАЦИЯ ЛИНЕЙНЫХ ВОЛН ПРИ ОБТЕКАНИИ ПРЕПЯТСТВИЙ БОЗЕ-ЭЙНШТЕЙНОВСКИМ КОНДЕНСАТОМ

Ю. Г. Гладуш*, А. М. Камчатнов**

Институт спектроскопии Российской академии наук
142190, Троицк, Московская обл., Россия

Поступила в редакцию 6 марта 2007 г.

Развита теория линейных волновых структур, возникающих при стационарном обтекании препятствий бозе-эйнштейновским конденсатом. Полученные результаты дают как геометрические характеристики гребней волн, так и зависимость амплитуды волнового возмущения от координат достаточно далеко от препятствия. Теория согласуется с результатами проведенного ранее численного моделирования и позволяет дать качественное объяснение экспериментов по обтеканию препятствий конденсатом при его расширении после освобождения из ловушки.

PACS: 03.75.Kk

1. ВВЕДЕНИЕ

После экспериментального открытия бозе-эйнштейновского конденсата большое внимание было уделено изучению различных возбуждений, которые могут в нем существовать (см., например, [1]). В качестве примера можно привести волны, распространяющиеся в конденсате с отталкиванием между атомами. Как известно, такой конденсат может занимать значительный объем внутри ловушки, так что если характерный размер волны много меньше размера конденсата, то его в первом приближении можно рассматривать как однородный и имеющий в невозмущенном состоянии постоянную плотность n_0 . Еще Боголюбовым было показано [2], что в таком конденсате могут распространяться возбуждения, эквивалентные в некантованном виде волнам с законом дисперсии

$$\omega(k) = \sqrt{c_s^2 k^2 + \left(\frac{\hbar k^2}{2m}\right)^2}, \quad (1)$$

где

$$c_s = \sqrt{\frac{gn_0}{m}} \quad (2)$$

— скорость звука в длинноволновом пределе $k \rightarrow 0$, а g обозначает эффективную константу связи,

$$g = \frac{4\pi\hbar^2 a_s}{m}, \quad (3)$$

обусловленную s -волновым рассеянием (с длиной рассеяния a_s) атомов с массой m . Отталкивание атомов соответствует $g > 0$ и действительной скорости звука c_s . При малых волновых числах закон дисперсии (1) соответствует звуковым волнам, распространяющимся со скоростью c_s ,

$$\omega \approx c_s k, \quad k \rightarrow 0, \quad (4)$$

а при больших k он воспроизводит квантовый закон дисперсии свободных частиц с массой m ,

$$\omega \approx \frac{\hbar k^2}{2m}, \quad k \rightarrow \infty. \quad (5)$$

Переход от одного предельного случая к другому происходит при промежуточных значениях волнового числа, соответствующих длине волны порядка величины характерного параметра

$$\xi = \frac{\hbar}{\sqrt{2mgn_0}} = \frac{\hbar}{\sqrt{2mc_s}}. \quad (6)$$

Если амплитуда возмущений не мала и конденсат не обязательно однороден, то в приближении

*E-mail: gladush@isan.troitsk.ru

**E-mail: kamch@isan.troitsk.ru

среднего поля его динамика описывается уравнением Гросса–Питаевского [1]

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + V(\mathbf{r})\psi + g|\psi|^2\psi, \quad (7)$$

где $\psi(\mathbf{r})$ — параметр упорядочения («волновая функция» конденсата), а $V(\mathbf{r})$ является внешним потенциалом, воздействующим на атомы конденсата (в частности, это может быть потенциал удерживающей конденсат ловушки). В области, где конденсат можно считать однородным, потенциал V с той же точностью постоянен и его можно исключить из уравнения внесением несущественного фазового множителя в определение функции ψ . Линеаризация этого уравнения относительно состояния с постоянной плотностью $n_0 = |\psi|^2$ приводит к решениям в виде плоских волн с законом дисперсии (1). Однако наличие нелинейного последнего члена в уравнении (7) дает также дополнительные виды нелинейных возмущений — вихри и темные солитоны. Линейные волны наблюдались в экспериментах [3], а темные солитоны — в работах [4, 5]. Если начальное возмущение плотности велико, то в случае одномерной эволюции импульс пониженной плотности конденсата распадается на последовательность темных солитонов [6], а если начальная плотность конденсата в возмущенной области повышена, то эволюция приводит к опрокидыванию импульса с последующим образованием дисперсионной ударной волны [7, 8], что было подтверждено недавними экспериментами [9, 10].

Упомянутые выше линейные волны, темные солитоны и дисперсионные ударные волны могут быть описаны в первом приближении как волны, зависящие от времени и лишь одной пространственной координаты. Однако ситуация меняется, когда волны существенным образом зависят от двух пространственных координат. Именно такой случай был реализован в эксперименте [11] (см. также [12]), когда конденсат свободно расширялся после выключения ловушки и на его пути было поставлено небольшое «препятствие» в виде лазерного луча. Как было найдено в этом эксперименте, течение конденсата мимо препятствия порождает волновую структуру в виде стационарных «усов», отходящих от препятствия. Теоретический анализ [13, 14] показал, что возникающая волновая структура состоит из двух характерных областей, разделяемых конусом Маха, соответствующим звуковой скорости c_s в длинноволновом пределе, т. е. линиями, отходящими от препятствия под углом θ по отношению к направлению течения, где этот угол определяется соотношением

$$\sin \theta = \frac{c_s}{u_0} = \frac{1}{M} \quad (8)$$

(M обозначает число Маха). Как показано в работах [13, 14], внутри конуса Маха в стационарном пределе образуются наклонные темные солитоны, наклон которых зависит от их глубины — самые мелкие солитоны расположены вблизи конуса Маха с его внутренней стороны, а самые глубокие прижимаются к оси стационарного течения, проведенной через препятствие. В работе [13] было найдено точное стационарное решение уравнения Гросса–Питаевского (7) с двумя пространственными координатами и с помощью численного моделирования было показано, что это решение описывает наклонные солитоны, генерируемые препятствием внутри конуса Маха. Линейные же волны в системе отсчета, связанной с конденсатом, характеризуются законом дисперсии (1), где под k следует понимать абсолютную величину двумерного волнового вектора. Как следует из этого закона дисперсии, и фазовая, и групповая скорости линейных волн превышают длинноволновую скорость звука c_s . Следовательно, образующиеся в стационарном случае волновые структуры могут располагаться лишь вне конуса Маха, определенного соотношением (8). Первые волны такого типа, описываемые уравнением Гросса–Питаевского, наблюдались в численном эксперименте [15], а в работе [12] аналогичный численный расчет был использован для объяснения характера структур, наблюдавшихся в экспериментах с течением конденсата мимо препятствия, а также были выведены некоторые элементарные свойства этих структур, следующие из закона дисперсии (1). В работе [16] было замечено, что эти волновые структуры имеют физическую природу, аналогичную корабельным волнам Кельвина [17], которые образуются кораблем, движущимся по спокойной воде, так что соответствующие методы расчета [18, 19] могут быть использованы и в конденсатном случае. Излучение волн при обтекании препятствия двухкомпонентным конденсатом было рассмотрено в недавней работе [20]. В работе [16] была развита лучевая теория, дающая геометрическую форму гребней волн, и было показано, что эта теория находится в прекрасном согласии с численным экспериментом. Однако лучевая теория не дает зависимости амплитуды волны от координат. Поэтому целью настоящей работы является развитие более полной теории, позволяющей описать не только геометрические, но и динамические характеристики волновых структур, расположенных вне конуса Маха при обтекании препятствия бозе-эйнштейновским конденсатом.

2. ТЕОРИЯ СТАЦИОНАРНЫХ ВОЛНОВЫХ СТРУКТУР, ГЕНЕРИРУЕМЫХ ПРИ ОБТЕКАНИИ ПРЕПЯТСТВИЙ КОНДЕНСАТОМ

В основу теории мы положим метод Кельвина в той его форме, которая использована в книге [18] при изложении теории корабельных волн на воде. Согласно этой теории, волновые структуры являются результатом интерференции линейных волн, испущенных источником во все предыдущие моменты времени, причем, в соответствии с экспериментом [11], мы считаем источник (препятствие) покоящимся, так что излучение волн поддерживается стационарным однородным течением конденсата с некоторой скоростью u_0 , направленной вдоль оси x . Поскольку стационарный предел соответствует включению потенциала $V(\mathbf{r})$ препятствия, совершенному в бесконечно удаленном прошлом, это физическое условие можно учесть, предполагая, что потенциал нарастает со временем согласно закону

$$V(\mathbf{r}, t) = \exp(\varepsilon t)V(\mathbf{r}),$$

и в последующем устремляя параметр ε к нулю.

Для расчета волновой структуры в уравнении Гросса–Питаевского (7) удобно перейти от параметра упорядочения $\psi(\mathbf{r}, t)$ к гидродинамическим переменным посредством подстановки

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \sqrt{n(\mathbf{r}, t)} \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int^{\mathbf{r}} \mathbf{U}(\mathbf{r}', t) d\mathbf{r}'\right), \quad (9)$$

где $n(\mathbf{r}, t)$ — локальная плотность атомов в конденсате, $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$ — поле скоростей течения конденсата. Для упрощения формул перейдем к безразмерным величинам

$$\tilde{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{\sqrt{2}\xi}, \quad \tilde{t} = \frac{c_s}{\sqrt{2}\xi}t, \quad \tilde{n} = \frac{n}{n_0}, \quad \tilde{\mathbf{U}} = \frac{\mathbf{U}}{c_s}, \quad (10)$$

а также введем безразмерный потенциал препятствия

$$\tilde{V}(\mathbf{r}) = \frac{1}{mc_s^2}V(\sqrt{2}\xi\tilde{\mathbf{r}}), \quad (11)$$

где n_0 — плотность невозмущенного конденсата («бесконечно удаленного» от препятствия). Подставляя выражения (9), (10) и (11) в уравнение (7) и разделяя действительную и мнимую части, получаем уравнения для плотности n и компонент скорости $\mathbf{U} = (u(x, y, t), v(x, y, t))$ в гидродинамическом виде:

$$\begin{aligned} n_t + (nu)_x + (nv)_y &= 0, \\ u_t + uu_x + vu_y + n_x + \\ &+ \left(\frac{n_x^2 + n_y^2}{8n^2} - \frac{n_{xx} + n_{yy}}{4n}\right)_x = -V_x e^{\varepsilon t}, \\ v_t + uv_x + vv_y + n_y + \\ &+ \left(\frac{n_x^2 + n_y^2}{8n^2} - \frac{n_{xx} + n_{yy}}{4n}\right)_y = -V_y e^{\varepsilon t}, \end{aligned} \quad (12)$$

где тильды для простоты опущены и индексы обозначают дифференцирование по данной переменной.

Нас интересуют линейные волны, распространяющиеся на фоне однородного течения с $n = 1$, $u = M$, $v = 0$. Поэтому введем

$$n = 1 + n_1, \quad u = M + u_1, \quad v = v_1 \quad (13)$$

и линеаризуем систему (12) относительно малых отклонений n_1, u_1, v_1 от однородного течения. В результате получаем линейную систему

$$\begin{aligned} n_{1,t} + u_{1,x} + Mn_{1,x} + v_{1,y} &= 0, \\ u_{1,t} + Mu_{1,x} + n_{1,x} - \\ &- \frac{1}{4}(n_{1,xxx} + n_{1,xyy}) = -V_x e^{\varepsilon t}, \\ v_{1,t} + Mv_{1,x} + n_{1,y} - \\ &- \frac{1}{4}(n_{1,xyx} + n_{1,yyy}) = -V_y e^{\varepsilon t}. \end{aligned} \quad (14)$$

Стационарным структурам соответствует предел $\varepsilon \rightarrow 0$ решения этой системы, в котором все переменные зависят от времени как $\exp(\varepsilon t)$. По пространственным координатам можно перейти к разложению в интеграл Фурье, так что элементарный расчет дает для возмущения плотности выражение

$$n_1 = -e^{\varepsilon t} \iint \frac{k^2 \Phi(k_x, k_y) \exp(i(k_x x + k_y y))}{(\varepsilon + ik_x M)^2 + k^2(1 + k^2/4)} \times \frac{dk_x dk_y}{(2\pi)^2}, \quad (15)$$

где

$$\Phi(\mathbf{k}) = \int V(\mathbf{r}) \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) d\mathbf{r}. \quad (16)$$

На больших расстояниях от препятствия создаваемый им потенциал можно считать точечным,

$$V(\mathbf{r}) = V_0 \delta(\mathbf{r}),$$

тогда $\Phi(\mathbf{k}) = V_0$. Введем также полярные координаты (см. рис. 1), определяющие компоненты векторов \mathbf{r} и \mathbf{k} :

$$\begin{aligned} x &= r \cos \chi, & y &= r \sin \chi, \\ k_x &= -k \cos \eta, & k_y &= k \sin \eta. \end{aligned} \quad (17)$$

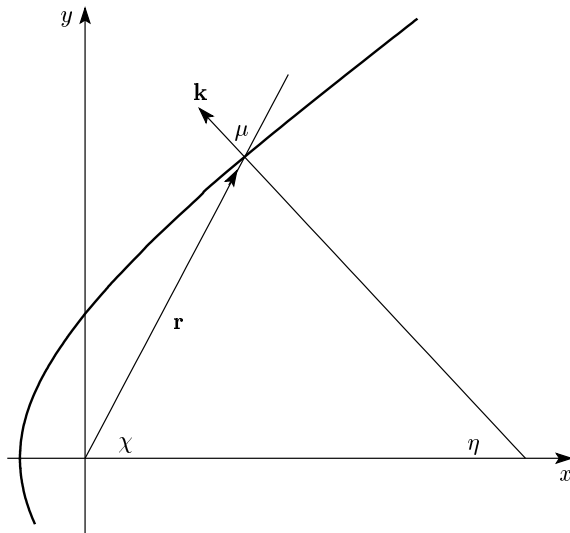


Рис. 1. Полярные координаты, задающие радиус-вектор \mathbf{r} и волновой вектор \mathbf{k} , перпендикулярный волновому фронту, схематически изображенному кривой линией

Тогда после несложных преобразований выражение (15) переходит в

$$n_1 = \frac{V_0}{\pi^2} e^{\varepsilon t} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\infty} \frac{k \exp[-ikr \cos(\chi + \eta)] dk d\eta}{k^2 - k_0^2 - i\delta \cos \eta}, \quad (18)$$

где $\delta = 8M\varepsilon/k$ — малая положительная величина и

$$k_0 = 2\sqrt{M^2 \cos^2 \eta - 1}. \quad (19)$$

Интеграл по η можно разбить на два:

$$\int d\eta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\eta + \int_{\pi/2}^{3\pi/2} d\eta.$$

Сделав во втором интеграле замену $\eta' = \eta - \pi$, получаем, что подынтегральное выражение переходит в комплексно-сопряженное. В результате интеграл (18) можно записать в виде

$$n_1 = \frac{2V_0}{\pi^2} e^{\varepsilon t} \times \operatorname{Re} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{\infty} \frac{k \exp[-ikr \cos(\chi + \eta)] dk d\eta}{k^2 - k_0^2 - i\delta \cos \eta}. \quad (20)$$

Интеграл по k берется вдоль действительной оси, вблизи которой расположен полюс

$$k = \sqrt{k_0^2 + i\delta \cos \eta} \approx k_0 + i \frac{\delta \cos \eta}{2k_0}, \quad (21)$$

так что можно ожидать, что он дает главный вклад в значение интеграла. Убедиться в этом можно следующим образом. Прежде всего заметим, что в области интегрирования $\cos \eta > 0$. Далее, контур вдоль действительной оси k можно дополнить, превращая его в замкнутый, контуром вдоль положительной или отрицательной мнимой полуоси и соответствующей бесконечно удаленной четвертью окружности. Если $\cos(\chi + \eta) < 0$, то берем контур по границе первого квадранта комплексной плоскости k , а если $\cos(\chi + \eta) > 0$, то по границе четвертого квадранта. В обоих случаях интеграл по соответствующей четверти окружности обращается в нуль экспоненциально при стремлении радиуса $|k|$ окружности к бесконечности и вклада в интеграл по всему контуру не дает. Полюс (21) попадает внутрь контура интегрирования лишь при интегрировании по границе первого квадранта, когда $\cos(\chi + \eta) < 0$, так что в этом случае интеграл по действительной оси k равен вкладу полюса и интегралу по положительной мнимой полуоси. Если же $\cos(\chi + \eta) > 0$, то этот интеграл сводится лишь к интегралу по отрицательной мнимой полуоси. В обоих случаях оценка интегралов по мнимым полуосям дает

$$\int_0^{\infty} \frac{k \exp(-kr \cos(\chi + \eta)) dk}{k^2 + k_0^2} \propto \frac{1}{r^2}, \quad (22)$$

т. е. эти вклады убывают с ростом расстояния r от препятствия как r^{-2} . Как мы убедимся ниже, вклад полюса убывает с ростом радиуса как $r^{-1/2}$, так что достаточно далеко от препятствия вкладом от мнимых полуосей можно пренебречь. Таким образом, заметная волновая структура возникает лишь в области, где $\cos(\chi + \eta) < 0$, т. е. когда угол $\mu = \pi - (\chi + \eta)$ между векторами \mathbf{r} и \mathbf{k} острый. Соответствующий вклад обусловлен полюсом (21) и равен

$$n_1 = -\frac{2V_0}{\pi} \operatorname{Im} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \exp(-ikr \cos(\chi + \eta)) d\eta, \quad (23)$$

где k определяется по формуле (19) (с опущенным индексом «0»).

Вдали от препятствия при больших значениях фазы

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = rs,$$

где

$$s(\eta) = k(\eta) \cos(\chi + \eta), \quad (24)$$

интеграл (23) может быть вычислен с помощью стандартного метода стационарной фазы. Условие

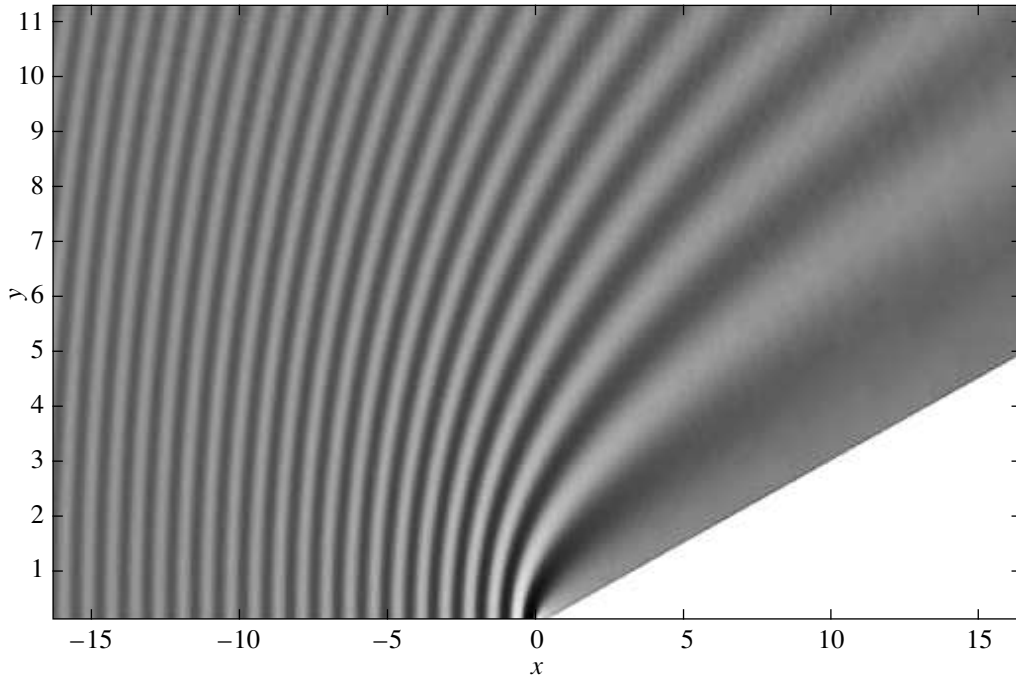


Рис. 2. Рассчитанная согласно формуле (29) с $M = 4$ волновая структура, генерируемая вне конуса Маха. (Показана лишь верхняя половина структуры при $y > 0$)

$\partial s / \partial \eta = 0$ дает уравнение для точки стационарной фазы, которое легко преобразуется к виду

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{2M^2}{k^2} \sin 2\eta \quad (25)$$

или, с учетом определения μ , дает выражение для χ :

$$\operatorname{tg} \chi = \frac{(1 + k^2/2) \operatorname{tg} \eta}{M^2 - (1 + k^2/2)}. \quad (26)$$

Учитывая также уравнение (19), находим

$$\cos \mu = \frac{k^2}{2[(M^2 - 2)k^2 + 4(M^2 - 1)]^{1/2}}. \quad (27)$$

С учетом (25) для второй производной фазы получаем

$$\frac{\partial^2 s}{\partial \eta^2} = 8 \frac{\cos \mu}{k^3} [(M^2 - 2)k^2 + 6(M^2 - 1)]. \quad (28)$$

В результате выражение (23) для возмущения плотности конденсата принимает вид

$$n_1 = V_0 \sqrt{\frac{2k}{\pi r}} \frac{[(M^2 - 2)k^2 + 4(M^2 - 1)]^{1/4}}{[(M^2 - 2)k^2 + 6(M^2 - 1)]^{1/2}} \times \cos \left(kr \cos \mu - \frac{\pi}{4} \right). \quad (29)$$

Прежде всего убедимся, что полученные выражения воспроизводят результаты лучевой теории [16]. Поскольку гребень волны соответствует постоянному значению фазы $\phi = kr \cos \mu$, отсюда мы находим выражение для радиуса:

$$r = \frac{\phi}{k \cos \mu} = \frac{2\phi}{k^3} [(M^2 - 2)k^2 + 4(M^2 - 1)]^{1/2}. \quad (30)$$

Вычисляя $\cos \chi$ и $\sin \chi$ с помощью формулы (26), находим выражения для кривых постоянной фазы, совпадающие с найденными другим способом в [16]:

$$x = r \cos \chi = \frac{4\phi}{k^3} \cos \eta (1 - M^2 \cos 2\eta), \quad (31)$$

$$y = r \sin \chi = \frac{4\phi}{k^3} \sin \eta (2M^2 \cos^2 \eta - 1).$$

Поскольку волновое число k задано как функция η формулой (19), выражения (31) дают форму гребней или впадин волны в параметрической форме, причем параметр η изменяется в интервале

$$-\arccos(1/M) \leq \eta \leq \arccos(1/M). \quad (32)$$

При малых η имеем

$$x \approx -\frac{\phi}{2\sqrt{M^2 - 1}} + \frac{(2M^2 - 1)\phi}{4(M^2 - 1)^{3/2}} \eta^2, \quad (33)$$

$$y \approx \frac{(2M^2 - 1)\phi}{2(M^2 - 1)^{3/2}} \eta,$$

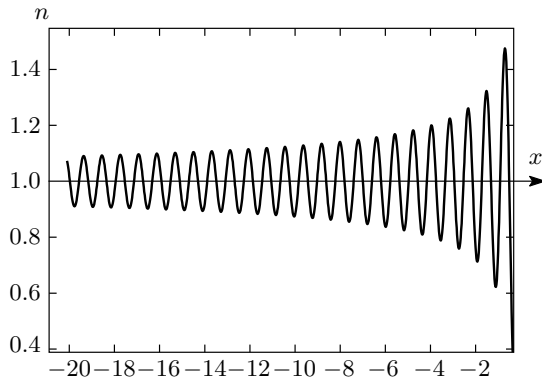


Рис. 3. Осцилляции плотности конденсата в стационарной волне перед препятствием: $x < 0$, $y = 0$. Течение конденсата соответствует числу Маха $M = 4$

т. е. кривые постоянной фазы имеют параболическую форму

$$x(y) \approx -\frac{\phi}{2\sqrt{M^2 - 1}} + \frac{(M^2 - 1)^{3/2}}{(2M^2 - 1)\phi} y^2. \quad (34)$$

Граничные значения $\eta = \pm \arccos(1/M)$ соответствуют линиям

$$\frac{x}{y} = \pm \sqrt{M^2 - 1}, \quad (35)$$

т. е. вдали от препятствия кривые стремятся асимптотически к прямым, параллельным образующим конуса Маха (8).

Пример волновой структуры, рассчитанной по формуле (29) с $M = 4$, показан на рис. 2.

Стоит отметить, что при $M \gg 1$ существует область, где $M \cos \eta \gg 1$ и формулы существенно упрощаются. В частности, здесь

$$\chi \approx \pi - 2\eta, \quad \mu \approx \eta \approx \frac{\pi - \chi}{2},$$

так что

$$k \approx 2M \sin \frac{\chi}{2} \gg 1 \quad (36)$$

и формула для колебаний плотности конденсата (29) принимает вид

$$n_1 \approx V_0 \sqrt{\frac{2}{\pi M r}} \cos \left(2Mr \sin^2 \frac{\chi}{2} - \frac{\pi}{4} \right). \quad (37)$$

Выражения (31) также упрощаются и дают параболические кривые постоянной фазы

$$x = -\frac{\phi}{2M} + \frac{M}{2\phi} y^2, \quad (38)$$

которые, естественно, могут быть также получены из выражения (34) в пределе $M \gg 1$.

В области перед препятствием при $y = 0$, $x < 0$ возмущения плотности принимают особенно простую форму. Здесь

$$k = 2\sqrt{M^2 - 1}, \quad (39)$$

т. е. длина волны $\lambda = 2\pi/k$ постоянна и

$$n_1 = 2V_0 \sqrt{\frac{(M^2 - 1)^{1/2}}{\pi(2M^2 + 1)r}} \times \cos \left[-2\sqrt{M^2 - 1} x - \frac{\pi}{4} \right], \quad (40)$$

$$y = 0, \quad x < 0.$$

График этой зависимости показан на рис. 3. Полученные результаты находятся в хорошем согласии с результатами численного моделирования, описанными в работе [16].

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Развитая в настоящей работе теория линейных волновых структур справедлива при условии, что амплитуда возмущения (в безразмерных величинах) много меньше единицы, т. е.

$$r \gg V_0^2/M, \quad (41)$$

и достаточно далеко от препятствия это условие всегда выполняется. Однако для сравнения с экспериментом необходимо также, чтобы течение в интересующей нас области можно было считать с достаточной точностью однородным. Оценки, сделанные в работе [13], показывают, что этим условиям можно удовлетворить при свободном расширении конденсата, если расположить препятствие достаточно далеко от центра цилиндрически симметричного течения и подождать достаточно долго после выключения ловушки. Насколько можно судить по доступным экспериментальным данным [11], последние условия не были выполнены с хорошей точностью. В частности, препятствие располагалось довольно близко к центру течения и было довольно большим, так что позади него образовывалась область тени, не успевавшая заполниться конденсатом за время наблюдения. По-видимому, по этой причине не наблюдались наклонные темные солитоны, предсказанные в работе [13]. Тем не менее, на представленных в работе [11] экспериментальных картинках хорошо видна волновая структура, аналогичная по форме изобра-

женной на рис. 2. Таким образом, развитая теория дает по крайней мере качественное описание наблюдаемых в эксперименте структур.

Мы благодарны А. Гаммалу (A. Gammal) и Г. А. Элю за полезные обсуждения. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 05-02-17351).

ЛИТЕРАТУРА

1. L. P. Pitaevskii and S. Stringari, *Bose-Einstein Condensation*, Cambridge University Press, Cambridge (2003).
2. Н. Н. Боголюбов, Изв. АН СССР, сер. физ. **11**, 77 (1947).
3. M. R. Andrews, D. M. Kurn, H.-J. Miesner, D. S. Durfee, C. G. Townsend, S. Inouye, and W. Ketterle, Phys. Rev. Lett. **79**, 553 (1997); **80**, 2967(E) (1998).
4. S. Burger, K. Bongs, S. Dettmer, W. Ertmer, K. Sengstock, A. Sanpera, G. V. Shlyapnikov, and M. Lewenstein, Phys. Rev. Lett. **83**, 5198 (1999).
5. J. Denschlag, J. E. Simsarian, D. L. Feder, C. W. Clark, L. A. Collins, J. Cubizolles, L. Deng, E. W. Hagley, K. Helmerson, W. P. Reinhardt, S. L. Rolston, B. I. Schneider, and W. D. Phillips, Science **287**, 97 (2000).
6. V. A. Brazhnyi and A. M. Kamchatnov, Phys. Rev. A **68**, 043614 (2003).
7. A. M. Kamchatnov, A. Gammal, and R. A. Kraenkel, Phys. Rev. A **69**, 063605 (2004).
8. B. Damski, Phys. Rev. A **69**, 043610 (2004).
9. T. P. Simula, P. Engels, I. Coddington, V. Schweikhard, E. A. Cornell, and R. J. Ballagh, Phys. Rev. Lett. **94**, 080404 (2005).
10. M. A. Hofer, M. J. Ablowitz, I. Coddington, E. A. Cornell, P. Engels, and V. Schweikhard, Phys. Rev. A **74**, 023623 (2006).
11. E. A. Cornell, Proc. of Conf. on Nonlinear Waves, Integrable Systems and their Applications, Colorado Springs (2005); <http://jilawww.colorado.edu/bec/papers.html>.
12. I. Carusotto, S. X. Hu, L. A. Collins, and A. Smerzi, Phys. Rev. Lett. **97**, 260403 (2006).
13. G. A. El, A. Gammal, and A. M. Kamchatnov, Phys. Rev. Lett. **97**, 180405 (2006).
14. G. A. El, Yu. G. Gladush, and A. M. Kamchatnov, J. Phys. A: Math. Theor. **40**, 611 (2007).
15. T. Winiecki, J. F. McCann, and C. S. Adams, Phys. Rev. Lett. **82**, 5186 (1999).
16. Yu. G. Gladush, G. A. El, A. Gammal, and A. M. Kamchatnov, submitted to Phys. Rev. A **75** (2007).
17. Lord Kelvin, Phil. Mag. **9**, 733 (1905).
18. Дж. Уизем, *Линейные и нелинейные волны*, Мир, Москва (1977).
19. R. S. Johnson, *A Modern Introduction to the Mathematical Theory of Water Waves*, Cambridge University Press, Cambridge (1997).
20. H. Susanto, P. G. Kevrekidis, R. Carretero-González, B. A. Malomed, D. J. Frantzeskakis, and R. A. Bishop, Phys. Rev. A **75**, 055601 (2007).