

КВАНТОВЫЕ ТОЧКИ ДЛЯ ДЕМОНСТРАЦИИ ДОБАВОЧНЫХ РАЗМЕРНОСТЕЙ ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ

А. Ф. Андреев*

Институт физических проблем им. П. Л. Капицы Российской академии наук
119334, Москва, Россия

Поступила в редакцию 27 марта 2007 г.

На примере электронных мезоскопических систем показана невозможность ограничений квантового принципа суперпозиции, налагаемых правилом сверхотбора. Это правило введено Виком, Вайтманом и Вигнером, чтобы избежать нарушения лоренц-инвариантности, связанного с отсутствием физической инвариантности относительно вращений на угол 2π в состояниях, являющихся когерентными суперпозициями состояний с четным и нечетным числом фермионов. Описана мезоскопическая система (полупроводниковая двойная квантовая точка при низких температурах), в которой такие суперпозиции осуществляются, что подтверждается существующими экспериментами. Предложен новый эксперимент, прямо демонстрирующий отсутствие физической инвариантности относительно вращений на угол 2π . Отмечается, что альтернативой правила сверхотбора является существование, наряду с x, y, z, t , добавочных спинорных (грассмановых) размерностей пространства-времени, введенных в квантовой теории поля для реализации суперсимметрии. Доказана реальность добавочных размерностей и выяснен их физический смысл для нерелятивистских систем фермионов.

PACS: 73.21.-b, 12.90.+b, 12.60.Jv

1. ВВЕДЕНИЕ

Чтобы сделать возможной суперсимметрию, в квантовой теории поля было введено понятие суперпространства. Наряду с обычными координатами пространства-времени x, y, z, t были введены добавочные спинорные (антикоммутирующие) координаты. До сих пор, однако, в физике высоких энергий не было получено подтверждений реальности добавочных размерностей. Их открытие рассматривается (см. обзорную статью [1]) как наиболее существенное следствие возможного в будущем открытия суперсимметрии.

Существует другой, не связанный с суперсимметрией, подход к проблеме добавочных спинорных размерностей пространства-времени [2, 3]. Вик, Вайтман и Вигнер [4] показали, что когерентные суперпозиции состояний с четными и нечетными числами фермионов несовместимы с лоренц-инвариантностью. Они ввели так называемое правило сверхотбора, согласно которому такие суперпозиции физиче-

ски не осуществимы. В действительности, как показано в работах [2, 3], правило сверхотбора является альтернативой существованию добавочных спинорных размерностей.

Дело в том, что вектор $|\text{odd}\rangle$ любого состояния с нечетным числом фермионов, будучи спинором нечетного ранга, умножается на (-1) под действием вращения $O(2\pi)$ системы координат на угол 2π вокруг любой оси, а также под действием двукратного изменения знака времени R^2 . Состояние при этом физически не меняется, поскольку речь идет о появлении общего фазового множителя. Векторы $|\text{even}\rangle$ состояний с четным числом фермионов не меняются под действием преобразований $O(2\pi)$ и R^2 . По этой причине существование когерентной суперпозиции

$$|*\rangle = u|\text{even}\rangle + v|\text{odd}\rangle, \quad (1)$$

где u и v — ненулевые комплексные числа, $|u|^2 + |v|^2 = 1$, означает существование странного состояния $|*\rangle$, которое изменяется физически под действием преобразований $O(2\pi)$ и R^2 , поскольку соответствующее изменение вектора состояния не сводится к появлению общего фазового множителя. Ясно, что

*E-mail: andreev@kapitza.ras.ru

здесь мы имеем две принципиально разные возможности [2, 3].

Если x, y, z, t характеризуют пространство-время исчерпывающим образом, то преобразования $O(2\pi)$ и R^2 совпадают с единичным преобразованием и потому не могут ничего изменить физически. Правило сверхотбора в этом случае необходимо.

Если наряду с x, y, z, t существуют добавочные спиновые координаты, то $O(2\pi)$ и R^2 являются нетривиальными преобразованиями, меняющими знак добавочных координат. В этом случае правило сверхотбора не является необходимым.

Таким образом, доказательство существования хотя бы одного состояния $|*\rangle$ является в то же время доказательством реальности суперпространства с добавочными спиновыми размерностями.

2. ДВОЙНАЯ КВАНТОВАЯ ТОЧКА

Такое доказательство предложено в работах автора [5, 6]. Состояния $|*\rangle$ могут быть осуществлены в простой мезоскопической системе — двойной квантовой точке (ДКТ). В работах [5, 6] предложен эксперимент, демонстрирующий когерентность состояний $|*\rangle$ и, следовательно, реальность добавочных спиновых размерностей.

Этот эксперимент фактически осуществлен независимо Хаяши и др. [7]. В интерпретации авторов [7] их эксперимент никак не связан с проблемой правила сверхотбора и добавочных размерностей. Альтернативная, более последовательная интерпретация, использующая результаты работ [5, 6], излагается ниже.

В условиях эксперимента Хаяши и др. потенциалы затворов обеих (левой L и правой R) точек, входящих в состав ДКТ, таковы, что единственными активными степенями свободы являются появление или исчезновение в L или R единственного добавочного электрона. Все другие степени свободы соответствуют значительно более высокой энергии и полностью вымерзают при использованной в работе [7] низкой температуре. Спиновые степени свободы также исключены ввиду наличия сильного магнитного поля. Таким образом, единственная активная степень свободы ДКТ — это туннелирование добавочного электрона между точками R и L . Мы имеем двухуровневую систему, описываемую гамильтонианом

$$\begin{pmatrix} E_R & J \\ J & E_L \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где E_R, E_L — энергии электрона в точках R и L , J — амплитуда туннелирования.

Рассматриваемая мезоскопическая ДКТ при низких температурах характеризуется рядом необычных свойств. Благодаря ее относительно большим размерам (300 нм, см. [7]) мы можем исследовать точку L как отдельную систему с переменным числом электронов $n_L = 0, 1$, не производя сколь-нибудь существенного прямого возмущения точки R . Точка R играет при этом роль внешней среды. Характеризующее среду квантовое число $n_R = 0, 1$ однозначно определяется квантовым числом n_L системы: $n_R = 1 - n_L$. Как показано в работах [5, 6] и ниже, именно благодаря этому свойству система (точка L , рассматриваемая как отдельная система) характеризуется своим гамильтонианом, хотя она является лишь частью замкнутой системы (ДКТ). Взаимодействие со средой может быть описано как своеобразное внешнее поле, действующее на систему.

Обычно изменение представления (изменение полного набора наблюдаемых) физической системы описывается в квантовой механике унитарным преобразованием гильбертова пространства данной физической системы. В нашей ситуации в зависимости от того, о каких измерениях идет речь, мы имеем две различные квантовые системы (с двумя различными гильбертовыми пространствами), соответствующие одной и той же конфигурационной системе (ДКТ). Система I — это наша исходная система (один добавочный электрон). Наблюдаемая — координата электрона R или L . Гильбертово пространство s_I соответствует общей суперпозиции состояний $|L\rangle$ и $|R\rangle$. Система II — это все, что находится внутри точки L . Наблюдаемая — число электронов (электрический заряд) в точке L . Гильбертово пространство s_{II} соответствует общей суперпозиции состояний $|n_L\rangle$ с $n_L = 0, 1$.

Для дальнейшего удобно рассматривать системы I и II как части большей системы с переменным числом электронов, состоящей из обеих квантовых точек, гильбертово пространство S которой соответствует общей суперпозиции всех состояний $|n_L, n_R\rangle$, причем n_L и n_R пробегает значения 0, 1 независимо друг от друга. Введем в пространстве S операторы a_L, a_L^\dagger и a_R, a_R^\dagger уничтожения и рождения электронов в точках L и R . Имеем

$$n_L = a_L^\dagger a_L, \quad n_R = a_R^\dagger a_R.$$

Пространства s_I и s_{II} являются подпространствами S . Пространство s_I в представлении вторично квантования соответствует общей суперпозиции

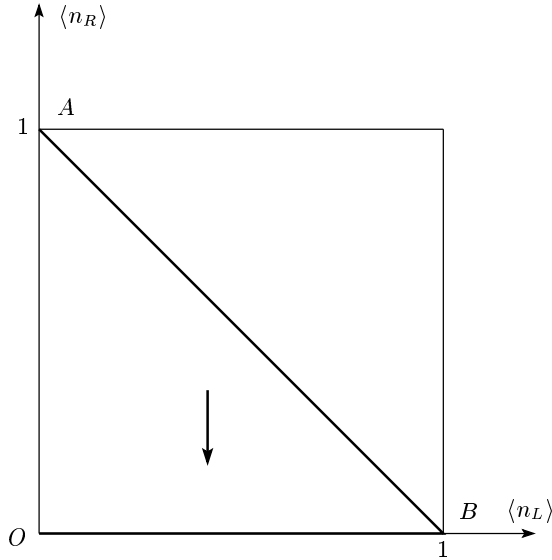


Рис. 1. Проекция гильбертова пространства s_I в гильбертово пространство s_{II}

состояний $|0, 1\rangle$ и $|1, 0\rangle$ (прямая AB на рис. 1). Пространство s_{II} как гильбертово пространство точки L , рассматриваемой как отдельная система, соответствует общей суперпозиции состояний $|0\rangle \equiv |0, 0\rangle$ и $|1\rangle \equiv |1, 0\rangle$ (прямая OB на рис. 1).

Гильбертовы пространства s_I и s_{II} систем I и II связаны так называемым (см. книгу Дирака [8]) обобщенным каноническим преобразованием. Отображение $s_I \rightarrow s_{II}$ осуществляется преобразованием $| \rangle \rightarrow U | \rangle$ векторов пространства S , где

$$U = n_L + \sigma(1 - n_L)a_R, \quad \sigma = \pm 1. \quad (3)$$

Имеем

$$\begin{aligned} U |0, 1\rangle &= \sigma |0, 0\rangle = \sigma |0\rangle, \\ U |1, 0\rangle &= |1, 0\rangle = |1\rangle. \end{aligned} \quad (4)$$

Оператор U не является унитарным в пространстве S ,

$$U^\dagger U = n_L + (1 - n_L)n_R, \quad (5)$$

но в s_I он удовлетворяет условию

$$U^\dagger U \approx 1, \quad (6)$$

где знак « \approx » означает, как в книге Дирака [8], что соответствующее равенство является следующим условием на векторы $| \rangle_I$ пространства s_I :

$$U^\dagger U | \rangle_I = | \rangle_I, \quad (7)$$

а не операторным тождеством во всем пространстве S . Действительно,

$$\begin{aligned} n_L + (1 - n_L)n_R &\approx n_L + (1 - n_L)^2 = \\ &= n_L + (1 - n_L) = 1, \end{aligned} \quad (8)$$

поскольку в s_I имеем $n_R \approx 1 - n_L$.

Условие (6) дает возможность для любого эрмитова оператора F_I , действующего в s_I , ввести эрмитов оператор

$$F_{II} = UF_IU^\dagger, \quad (9)$$

действующий в s_{II} так, что матричные элементы не меняются. Действительно, пусть

$$|f\rangle_{II} = U |f\rangle_I, \quad |g\rangle_{II} = U |g\rangle_I \quad (10)$$

— два вектора в s_{II} , соответствующие двум произвольным векторам $|f\rangle_I$ и $|g\rangle_I$ в s_I . Имеем

$$\begin{aligned} \langle g |_{II} F_{II} |f\rangle_{II} &= \langle g |_I U^\dagger U F_I U^\dagger U |f\rangle_I = \\ &= \langle g |_I F_I |f\rangle_I. \end{aligned} \quad (11)$$

Гамильтониан (2) системы I в представлении вторичного квантования имеет вид

$$H_I = E_L n_L + E_R n_R + J(a_R^\dagger a_L + a_L^\dagger a_R). \quad (12)$$

Путем простых вычислений находим величины, преобразованные в s_{II} :

$$U n_L U^\dagger = n_L, \quad (13)$$

$$U n_R U^\dagger = n_L n_R + (1 - n_L)(1 - n_R) \approx 1 - n_L, \quad (14)$$

$$U a_R^\dagger a_L U^\dagger = \sigma a_L (1 - n_R) \approx \sigma a_L, \quad (15)$$

где учтено, что в s_{II} имеет место слабое равенство $n_R \approx 0$.

В результате находим следующее выражение для гамильтониана системы II, взаимодействующей с внешней средой:

$$\begin{aligned} H_{II} = U H_I U^\dagger &\approx E_L n_L + E_R (1 - n_L) + \\ &+ \eta (a_L + a_L^\dagger), \end{aligned} \quad (16)$$

где $\eta = \sigma J$.

Подчеркнем, что гамильтониан H_{II} не содержит операторов a_R и a_R^\dagger внешней среды. Взаимодействие системы со средой описывается внешним полем η , действующим на систему. Поле η , как операторы a_L и a_L^\dagger и другие спинорные величины, меняет знак под

действием преобразований $O(2\pi)$ и R^2 . При заданном значении поля η гамильтониан (16) не инвариантен относительно этих преобразований. Благодаря присутствию членов, линейных по электронным операторам, все собственные состояния гамильтониана являются когерентными суперпозициями состояний с четным и нечетным числом электронов. При температурах ниже характерной разницы энергий одно из состояний $|*\rangle$ (основное) автоматически осуществляется. Фактически (16) есть гамильтониан

$$\begin{pmatrix} 0 & J \\ J & \epsilon \end{pmatrix} \quad (17)$$

двухуровневой системы

$$|*\rangle = u|0\rangle + v|1\rangle, \quad (18)$$

где E_R выбрано в качестве начала отсчета энергии, $\epsilon = E_L - E_R$, и мы считаем, что $\sigma = 1$.

3. ЭКСПЕРИМЕНТ ХАЯШИ И ДР.

В эксперименте Хаяши и др. [7] измеряемой величиной является заряд n_L левой точки. Речь, следовательно, идет о системе II, описываемой формулами (17) и (18), причем разность энергий $\epsilon = \epsilon(t)$ может быть функцией времени благодаря наличию переменного потенциала затвора. Временное уравнение Шредингера имеет вид

$$i\dot{u} = Jv, \quad i\dot{v} = \epsilon(t)v + Ju. \quad (19)$$

Предположим, что вплоть до начального момента времени $t = 0$ потенциал затвора имеет фиксированное значение, соответствующее большому и положительному значению $\epsilon = \epsilon_0 \gg J$. При $t < 0$, таким образом, система находится в основном состоянии с $u = 1$ и $v = 0$. В момент $t = 0$ включается прямоугольный импульс потенциала затвора длительности t_p и амплитуды такой, что при $0 < t < t_p$ имеем $\epsilon = 0$. Система подчиняется уравнению (19) с $\epsilon = 0$ и начальными условиями $u(0) = 1$ и $v(0) = 0$. При $0 < t < t_p$, таким образом, имеем

$$u(t) = \cos Jt, \quad v(t) = -i \sin Jt. \quad (20)$$

При $t > t_p$, когда снова $\epsilon = \epsilon_0$, заряд точки L сохраняется во времени, поскольку в силу условия $\epsilon_0 \gg J$ процессы туннелирования подавлены. Измеряется среднее значение заряда точки L

$$\langle n_L \rangle = |v(t_p)|^2 = (1 - \cos(2Jt_p))/2 \quad (21)$$

как функция длительности импульса t_p . Осцилляции (21) фактически наблюдались Хаяши и др. [7], что является экспериментальным подтверждением когерентности состояний (18), (20) и реальности добавочных спиновых степеней свободы.

4. МОДИФИЦИРОВАННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ: ПРЯМАЯ ДЕМОНСТРАЦИЯ НАРУШЕНИЯ $O(2\pi)$ -СИММЕТРИИ

Представляет интерес более сложный эксперимент, который позволяет непосредственно продемонстрировать нарушение $O(2\pi)$ -симметрии.

В модифицированном эксперименте используются, как это предложено в работах автора [5, 6], не один, а два прямоугольных импульса потенциала затвора, причем для простоты в данном случае целесообразно выбрать фиксированную длительность импульсов $t_p = \pi/4J$. В модифицированном эксперименте разность энергий является следующей функцией времени:

$$\begin{aligned} \epsilon(t) &= \epsilon_0 && \text{при } t < 0, \\ 1) \epsilon(t) &= 0 && \text{при } 0 < t < t_p, \\ 2) \epsilon(t) &= \epsilon_0 && \text{при } t_p < t < t_p + \Delta, \\ 3) \epsilon(t) &= 0 && \text{при } t_p + \Delta < t < 2t_p + \Delta, \\ \epsilon(t) &= \epsilon_0 && \text{при } 2t_p + \Delta < t. \end{aligned} \quad (22)$$

Здесь t_p — указанная выше длительность импульсов, Δ — интервал между импульсами, $\Delta \ll t_p$.

В момент времени $t = t_p = \pi/4J$ имеем

$$u(t_p) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad v(t_p) = -\frac{i}{\sqrt{2}}. \quad (23)$$

В интервале $t_p < t < t_p + \Delta$ в силу условия $\epsilon_0 \gg J$ туннелирование подавлено и система II ведет себя как замкнутая. Она может быть легко сделана полностью замкнутой: приложив надлежащий импульс внешнего потенциала, можно добиться того, чтобы амплитуда туннелирования вообще равнялась нулю при $t_p < t < t_p + \Delta$. Во избежание недоразумений подчеркнем, однако, что на языке гильбертова пространства S система точек L и R находится при этом в запутанном (entangled) состоянии. Зависимость амплитуд u и v от времени имеет вид

$$u(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad v(t) = -\frac{i}{\sqrt{2}} \exp(-i\epsilon_0 t). \quad (24)$$

Сравним это поведение с преобразованием амплитуд u и v под действием спиновых вращений $O(\phi)$

на угол ϕ вокруг направления магнитного поля. Амплитуда u является скаляром и не меняется под действием преобразования $O(\phi)$. Амплитуда v является компонентой спинора и преобразуется согласно правилу

$$v \rightarrow v \exp \frac{i\phi}{2}.$$

Таким образом, в интервале $t_p < t < t_p + \Delta$ происходит спиновый поворот системы II на угол $(-2\epsilon_0)(t - t_p)$. Полный угол поворота за время Δ равен $\phi = -2\epsilon_0\Delta$.

В интервале $t_p + \Delta < t < 2t_p + \Delta$ амплитуды u и v удовлетворяют уравнению (19) с $\epsilon = 0$ и начальными условиями

$$\begin{aligned} u(t_p + \Delta) &= 1/\sqrt{2}, \\ v(t_p + \Delta) &= -\frac{i}{\sqrt{2}} \exp \frac{i\phi}{2}. \end{aligned} \quad (25)$$

При $t = 2t_p + \Delta$ имеем

$$\begin{aligned} u(2t_p + \Delta) &= \frac{1}{2} \left(1 - \exp \frac{i\phi}{2} \right), \\ v(2t_p + \Delta) &= -\frac{i}{2} \left(1 + \exp \frac{i\phi}{2} \right). \end{aligned} \quad (26)$$

Средний заряд точки L при $t > 2t_p + \Delta$ равен

$$\langle n_L \rangle = |v(2t_p + \Delta)|^2 = \frac{1}{2} \left(1 + \cos \frac{\phi}{2} \right). \quad (27)$$

Можно сказать, что модифицированный эксперимент включает три наиболее существенных временных интервала:

1) в интервале $0 < t < t_p$ происходит приготовление состояния (23) типа $|*\rangle$;

2) это состояние затем в интервале $t_p < t < t_p + \Delta$ подвергается преобразованию спинового вращения на угол $\phi = -2\epsilon_0\Delta$;

3) второй импульс в интервале $t_p + \Delta < t < 2t_p + \Delta$ необходим, чтобы приготовить состояние (26), в котором зависимость амплитуды v от угла поворота ϕ не сводится к общему фазовому множителю, исчезающему при вычислении $\langle n_L \rangle$.

Заряд (27) равен $n_L = 1$, если система в интервале 2) не вращалась ($\phi = 0$), или $n_L = 0$, если угол поворота равен $\phi = 2\pi$. Физическое нарушение симметрии $O(2\pi)$ здесь очевидно.

Таким образом, модифицированный эксперимент демонстрирует, что поворот системы II на угол 2π в интервале 2), в котором она является замкнутой, приводит к явным, физически наблюдаемым последствиям.

Отметим аналогию нашего модифицированного эксперимента с экспериментом Бадурека и др. [9], наблюдавших изменение картины интерференции двух пучков нейтронов, один из которых подвергался спиновому вращению на угол 2π под действием магнитного поля. Эксперимент [9] труднее интерпретировать ввиду отсутствия прямой связи с правилом сверхотбора и с осуществимостью состояний типа $|*\rangle$. В принципе, импульс добавочного магнитного поля мог бы быть использован также и в нашем модифицированном эксперименте на интервале 2). Однако при этом необходимо, чтобы добавочное поле действовало только на точку L , но не на точку R , что трудно осуществить.

5. ДОБАВОЧНЫЕ СПИНОРНЫЕ РАЗМЕРНОСТИ

Для корректного описания рассмотренной выше системы II необходимо ввести добавочные спиновые размерности пространства-времени. Предполагая, что соответствующие координаты являются нерелятивистским пределом координат, рассмотренных в теории поля, введем, как и в работах [2, 3], спинор Паули θ_α , где $\alpha = 1, 2$ — спиновый индекс. Добавочные координаты θ_α удовлетворяют грасмановым соотношениям антикоммутиации:

$$\{\theta_\alpha, \theta_\beta\} = 0. \quad (28)$$

Независимо от конкретной структуры суперпространства в релятивистской области, рассматриваемая простейшая возможность является вполне обшей в нерелятивистском пределе.

Рассмотренная выше система II должна характеризоваться лишь одной спиновой координатой $\theta \equiv \theta_1$ ввиду наличия сильного магнитного поля, направленного вдоль оси z . Квантовая механика систем с антикоммутирующими координатами хорошо известна (см., например, [10]). «Волновая функция» Ψ является аналитической функцией θ . Благодаря условию $\theta^2 = 0$, наиболее общая функция $\Psi(\theta)$ есть линейная функция вида

$$\Psi(\theta) = uI + v\theta, \quad (29)$$

где I — единица алгебры Грассмана. Отождествляя $I = |0\rangle$ и $\theta = |1\rangle$, находим, что состояния $|*\rangle$ в (18) тождественны состояниям (29). Физическое изменение состояний $|*\rangle$ при преобразованиях $O(2\pi)$ и R^2 непосредственно связано со спиновым характером физической координаты θ .

Операторы a^\dagger и a в гамильтониане (16) (индекс « L » опускаем) играют роль канонической координаты $a^\dagger = \theta$ и импульса $a = \partial/\partial\theta$, соответствующих добавочной размерности.

6. ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ДОБАВОЧНЫХ РАЗМЕРНОСТЕЙ

Рассмотрим единичную квантовую точку (КТ), содержащую большое, но конечное число N электронов. Предположим, что КТ соединена достаточно слабыми туннельными контактами с макроскопическими проводниками и находится под действием электрического потенциала U затвора. Предположим также, что температура мала по сравнению с разностью $\delta\epsilon$ энергий первого возбужденного и основного состояний КТ при заданном числе электронов. В рассматриваемых условиях КТ является квазизамкнутой системой, в которой все орбитальные степени свободы вымерзли.

Ниже мы проведем классификацию основных состояний КТ при различных значениях потенциала затвора U и покажем, что те степени свободы, которые все еще остаются активными при столь низкой температуре, могут быть адекватно интерпретированы как «движение» КТ «как целого» вдоль добавочных размерностей θ_α . Тем самым мы выясним (см. также [3, 6]) физический смысл добавочных размерностей.

При заданном значении числа N электронов КТ находится в основном состоянии $|N\rangle$ с энергией E_N . Минимизация энергии $\tilde{E}_N = E_N - \mu N$ по отношению к N при заданном значении химического потенциала электронов $\mu = \mu(U)$ определяет равновесное (целое) значение $N = N(U)$. Скачкообразное изменение числа электронов N при изменении U происходит при некоторых критических значениях $U = U_{c1}, U_{c2}, \dots$ (см. рис. 2) как результат фазовых переходов первого рода между фазами, характеризующимися различными целыми значениями N .

В дальнейшем необходимо принять во внимание так называемый эффект четности, т. е. тот факт, что энергия E_N основного состояния систем ферми-частиц, будучи вычисленной с необходимой здесь точностью, в явном виде содержит комбинацию $(-1)^N$. Для того чтобы при больших N иметь дело с квазинепрерывными функциями, необходимо ввести две различные функции E_N^o и E_N^e , отдельно для нечет-

ных и четных значений N , экстраполированных к одинаковым N . Разность

$$P = E_N^o - E_N^e,$$

которая обычно положительна, может служить количественной характеристикой эффекта четности. Благодаря эффекту четности, ступени, соответствующие четным N , длиннее ступеней с нечетными N (см. рис. 2). При увеличении P длина нечетных ступеней уменьшается и в конце концов обращается в нуль. При еще больших значениях P нечетные ступени отсутствуют, а число электронов скачкообразно меняется на 2 в точках фазовых переходов между состояниями с соседними четными числами электронов.

Для классификации возможных основных состояний КТ при различных потенциалах затвора удобно положить $N = N_e + n$, где квазинепрерывное число $N_e \approx N$ ($N \gg 1!$) пробегает все четные значения, а $0 \leq n \leq 2$. Для каждого N_e имеется три состояния с $n = 0, 1, 2$, причем комбинации $(N_e, n = 2)$ и $(N_e + 2, n = 0)$ тождественны.

На рис. 2 изображена зависимость $n = n(U)$ при заданном N_e . Имеется два критических значения потенциала

$$U_{c1} = U_{c1}(N_e)$$

и

$$U_{c2} = U_{c2}(N_e).$$

При $U = U_{c1}$ и $U = U_{c2}$ имеет место сосуществование фаз с $n = 0, 1$ и $n = 1, 2$, соответственно. Энергии \tilde{E} сосуществующих фаз совпадают при критических значениях потенциала затвора.

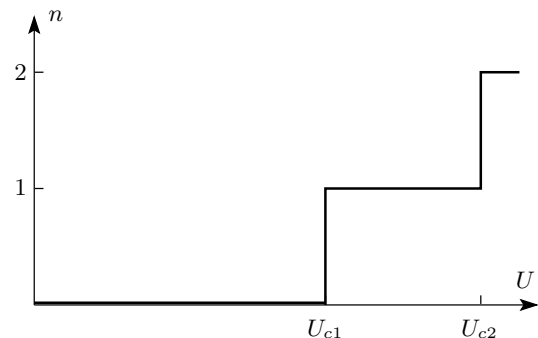


Рис. 2. Зависимость числа электронов $N = N_e + n$ от потенциала затвора U при фиксированном четном N_e

Увеличение P (при изменении N_e) приводит к сближению критических значений U_{c1} и U_{c2} . Равенство

$$U_{c1}(N_{ec}) = U_{c2}(N_{ec}) \quad (30)$$

определяет критическое значение $N_e = N_{ec}$ (или $P = P_c$), соответствующее тройной точке, в которой энергии всех трех состояний $n = 0, 1, 2$ совпадают. Отметим, что подобная тройная точка, хотя и в более высокотемпературной области, наблюдалась экспериментально [11].

При $P > P_c$ имеется лишь одно критическое значение $U_c(N_e)$, при котором сосуществуют фазы с $n = 0$ и $n = 2$. Скачок N при $U = U_c$ равен 2.

В тройной точке основное состояние КТ вырождено. Согласно квантовому принципу суперпозиции (правило свертотбора невозможно!) имеется бесконечный набор основных состояний вида

$$|t\rangle = (1 - w_1 - w_2)^{1/2} |0\rangle + w_1^{1/2} e^{i\phi_1} |1\rangle + w_2^{1/2} e^{i\phi_2} |2\rangle, \quad (31)$$

где

$$|n\rangle \equiv |N - N_e\rangle, \quad w_1 > 0, \quad w_2 > 0, \quad w_1 + w_2 < 1;$$

ϕ_1 и ϕ_2 — две физические (сверхпроводящие, см. [2, 3]) фазы.

Вдали от тройной точки, но при критических значениях U_{c1} , U_{c2} и U_c потенциала общий вид основного состояния определяется формулой (31) с $w_2 = 0$, $w_1 + w_2 = 1$ и $w_1 = 0$, соответственно.

Можно сформулировать следующее более общее утверждение. Вблизи критических значений потенциала затвора КТ обладает некоторым числом состояний, близких по энергии \tilde{E} к основному состоянию. Все другие состояния имеют значительно более высокую энергию и не проявляются в низкочастотной динамике системы при столь низкой температуре. В этом смысле можно сказать, что КТ обладает степенями свободы, активными при низких температурах $T \ll \delta\epsilon$ и на низких частотах $\omega \ll \delta\epsilon$. Активные степени свободы характеризуются гильбертовым пространством (31) в наиболее общем случае тройной точки или с указанными выше ограничениями вблизи U_{c1} , U_{c2} и U_c .

Для учета спиновых степеней свободы предположим, что состояния $|0\rangle$ и $|2\rangle$ являются спиновыми синглетами, а состояние с $n = 1$ имеет полный спин $1/2$. В противном случае эти состояния являлись бы «не полностью вымороженными» по отношению к

бозевским степеням свободы. В наиболее общем случае (реализуемом вблизи тройной точки) четыре состояния $|0\rangle$, $|1, \alpha\rangle$ и $|2\rangle$, где $\alpha = 1, 2$ — спиновый индекс, имеют близкие энергии. Гильбертово пространство активных степеней свободы соответствует общей суперпозиции

$$|g\rangle = c_0 |0\rangle + \sum_{\alpha} c_{1,\alpha} |1, \alpha\rangle + c_2 |2\rangle, \quad (32)$$

где c_0 , $c_{1,\alpha}$ и c_2 — комплексные числа. Активные степени свободы вблизи U_{c1} , U_{c2} и U_c вдали от тройной точки описываются уравнением (32) с $c_2 = 0$, $c_0 = 0$ и $c_{1,\alpha} = 0$, соответственно.

Легко видеть, что активные степени свободы, описываемые уравнением (32), соответствуют движению КТ вдоль спиновых размерностей θ_{α} суперпространства x, y, z, θ_{α} . Действительно, благодаря соотношениям антикоммутации (28), наиболее общая волновая функция $\Psi(\theta_{\alpha})$ имеет вид

$$\Psi(\theta_{\alpha}) = c_0 I + \sum_{\alpha} c_{1,\alpha} \theta_{\alpha} + c_2 \theta_1 \theta_2. \quad (33)$$

Отождествляя $I = |0\rangle$, $\theta_{\alpha} = |1, \alpha\rangle$ и $\theta_1 \theta_2 = |2\rangle$, находим, что гильбертово пространство (32) тождественно уравнению (33).

Гамильтониан КТ выражается через операторы координат $\theta_{\alpha} \equiv a_{\alpha}^{\dagger}$ и импульсов $\partial/\partial\theta_{\alpha} = a_{\alpha}$, удовлетворяющие каноническим соотношениям коммутации для ферми-операторов; a_{α} и a_{α}^{\dagger} не являются операторами уничтожения и рождения электронов с какими-то орбитальными квантовыми числами. Они представляют собой универсальные коллективные характеристики систем фермионов в условиях, когда бозевские степени свободы полностью вымерзли, точно так же, как обычные коллективные операторы координат и импульсов описывают динамику системы по отношению к бозевским степеням свободы в условиях, когда вымерзают все другие степени свободы.

КТ характеризуется следующими калибровочно инвариантными величинами:

$$n = a_{\alpha}^{\dagger} a_{\alpha}, \quad \mathbf{S} = \frac{1}{2} a_{\alpha}^{\dagger} \boldsymbol{\sigma}_{\alpha\beta} a_{\beta}, \quad (34)$$

где $\boldsymbol{\sigma}_{\alpha\beta}$ — матрицы Паули. Оператор n соответствует введенному выше фермионному числу n . Оператор \mathbf{S} — оператор полного спина КТ. Спин системы фермионов, таким образом, непосредственно связан с добавочными размерностями, описываемыми координатами θ_{α} .

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Общий результат настоящей работы, подтвержденный экспериментально, можно кратко сформулировать следующим образом. Существование фермионов со спином $1/2$ совместимо с лоренц-инвариантностью только при условии, что наряду с обычными размерностями x, y, z, t пространства-времени существуют добавочные спинорные размерности.

Наиболее непосредственно это может продемонстрировать предложенный модифицированный эксперимент (разд. 4), в котором определенным образом приготовленная мезоскопическая электронная система (полупроводниковая двойная квантовая точка) физически изменяется под действием преобразований $O(2\pi)$ и R^2 .

В разд. 6 выяснен физический смысл добавочных размерностей для нерелятивистских систем. Указаны степени свободы мезоскопической квантовой точки, которые остаются активными при предельно низких температурах (малых по сравнению с разностью энергий первого возбужденного и основного состояний при заданном числе электронов), когда все орбитальные степени свободы вымерзают. Активные степени свободы (включающие спин) адекватно описываются как движение квантовой точки «как целого» вдоль спинорных (грассмановых) координат θ_α суперпространства x, y, z, θ_α .

Работа выполнена при частичной поддержке

РФФИ (грант № 06-02-17369а) и Президентской программы поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-7018.2006.2).

ЛИТЕРАТУРА

1. J. H. Schwarz and N. Seiberg, *Rev. Mod. Phys.* **71**, S112 (1999).
2. А. Ф. Андреев, *Письма в ЖЭТФ* **68**, 673 (1998).
3. А. Ф. Андреев, *J. Supercond.* **13**, 805 (2000); *Physica B (Amsterdam)* **280**, 440 (2000).
4. G. C. Wick, A. S. Wightman, and E. P. Wigner, *Phys. Rev.* **88**, 101 (1952).
5. А. Ф. Андреев, *Письма в ЖЭТФ* **74**, 575 (2001).
6. А. Ф. Андреев, *Phys. Rev. B* **68**, 155419 (2003).
7. T. Hayashi et al., *Phys. Rev. Lett.* **91**, 226804 (2003).
8. P. A. M. Dirac, *Principles of Quantum Mechanics*, Oxford University Press, Oxford (1958), p. 289.
9. G. Badurek, H. Rauch, and J. Summhammer, *Physica B* **151**, 82 (1988).
10. T. D. Lee, *Particle Physics and Introduction to Field Theory*, Harwood Academic Publishers, Cambridge (1981), p. 512.
11. M. T. Tuominen et al., *Phys. Rev. Lett.* **69**, 1997 (1992).