

ОБ ОБРАЗОВАНИИ БОЗЕ-КОНДЕНСАТА В БОЗЕ-ГАЗЕ ПРИ ОХЛАЖДЕНИИ

Р. Б. Сапцов*

*Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау Российской академии наук
142432, Черноголовка, Московская обл., Россия*

Поступила в редакцию 28 декабря 2006 г.

Рассматривается механизм перехода слабонеидеального бозе-газа в сверхтекучее состояние (описанный в работе [1]) с учетом сильных флуктуаций плотности. Вычислена вероятность образования оптимальной флуктуации, приводящей к образованию сверхтекучей фазы. Обсуждается связь результатов данной работы с работой [1].

PACS: 05.30.-d, 03.75.Nt, 64.60.Qb

В работе [1] рассматривался слабонеидеальный бозе-газ, находящийся в матрице некоторого твердого тела (что возможно, например, для газа экситонов в полупроводнике), с гамильтонианом

$$\hat{H} = \sum_p \frac{p^2}{2m} \hat{a}_p^+ \hat{a}_p + \frac{2\pi\hbar^2 a_0}{m} \sum_p \hat{a}_{p_4}^+ \hat{a}_{p_3}^+ \hat{a}_{p_2} \hat{a}_{p_1} + \hat{H}_{int}, \quad (1)$$

где a_0 — длина рассеяния частиц друг на друге, m — масса бозе-частиц. Взаимодействие с решеткой твердого тела \hat{H}_{int} предполагалось слабым, т. е.

$$1/\tau_{ph} \ll 1/\tau_{tr}. \quad (2)$$

где $1/\tau_{ph} \sim nv_T \sigma_{ph}$ — характерное обратное время столкновений частиц с участием фонона (решетки), а $1/\tau_{tr} \sim nv_T a_0^2$ (v_T — средняя тепловая скорость бозе-частиц) — характерное обратное время столкновений частиц между собой. Под σ_{ph} понимается сечение рассеяния частиц друг на друге с испусканием фонона. Как легко видно, условие (2) равносильно условию

$$\sigma_{ph} \ll a_0^2. \quad (3)$$

При этом отклонение от идеальности определялось так называемым малым газовым параметром

$\eta = na_0^3 \ll 1$, где n — плотность бозе-частиц. Изначально газ находился при температуре несколько выше критической, а решетка твердого тела была переохлаждена до значительно более низких температур. Согласно неравенству (3) газ быстро термализуется (при этом можно ввести для него квазистационарные термодинамические величины, такие как температура, давление и т. п.) и медленно охлаждается путем испускания фононов в решетку. Как указывалось в работе [1], слабость взаимодействия позволяет рассматривать эволюцию системы при постоянном давлении, которое может быть оценено для температуры ниже критической $T < T_c \sim \hbar^2 n^{2/3}/m$ как

$$P = 0.08 \frac{m^{3/2} T^{5/2}}{\hbar^3} + \frac{\hbar^2 a_0 n^2}{m}. \quad (4)$$

Постоянство давления (4) связывает флуктуации температуры и плотности:

$$0.21 \frac{m^{3/2} T^{5/2}}{\hbar^3} \frac{\delta T}{T} + \frac{\hbar^2 a_0 (2n + \delta n) \delta n}{m} = 0. \quad (5)$$

В нашей предыдущей работе [1] рассматривался предел $\delta n/n \ll 1$, $|\delta T/T| \ll 1$. В этой работе я собираюсь рассмотреть противоположный предел, в котором флуктуации плотности велики по сравнению с ее средним значением, $\delta n/n \gg 1$, в то время как относительные флуктуации температуры по-прежнему малы, $|\delta T/T| \ll 1$. Такая ситуация вполне возможна ввиду большой величины параметра $1/\eta^{1/3} \gg 1$. В этом случае относительные флук-

*E-mail: saptsov@itp.ac.ru

туации плотности и температуры будут связаны, согласно формуле (5), соотношением (здесь опущены несущественные константы порядка единицы)

$$\left(\frac{\delta n}{n}\right)^2 = -\frac{\delta T}{T} \frac{1}{\eta^{1/3}}. \quad (6)$$

Резкий рост плотности в области флуктуации приводит к сильному возрастанию обратного фононного времени в этой области,

$$\delta \frac{1}{\tau_{ph}} \sim \sqrt{-\frac{\delta T}{T}} \frac{1}{\eta^{1/6}} \frac{1}{\tau_{ph}^0}, \quad (7)$$

где $1/\tau_{ph}^0 = nv_T \sigma_{ph}$, с уменьшением температуры и сильному ускорению охлаждения посредством фононной эмиссии. Это обстоятельство позволяет пренебречь фононной эмиссией вне области флуктуации и написать

$$\frac{1}{\tau_{ph}} \sim \sqrt{-\frac{\delta T}{T_c}} \frac{1}{\eta^{1/6}} \frac{1}{\tau_{ph}^0} U(T_c - T), \quad (8)$$

где $U(T_c - T) = 1$ для $\delta T = T - T_c < 0$ и $U(T_c - T) = 0$ для $T - T_c > 0$. Речь идет, разумеется, о таких флуктуациях, при которых $\delta n > 0$, $\delta T < 0$. При таких флуктуациях также происходит и увеличение критической температуры T_c , но в положительную сторону, что не противоречит предыдущим рассуждениям. При этом T_c везде, где оно встречается в работе, имеет смысл именно критической температуры с невозмущенной плотностью n , так как формула (4) становится верной лишь при понижении температуры ниже критической, и тогда сжимаемость бозе-газа сильно возрастает, что вызывает сильное изменение плотности. По этой причине флуктуации с понижением концентрации менее вероятны, такие флуктуации удаляют нас от критической температуры, а значит, понижают сжимаемость газа и вызывают ослабление охлаждения. Поэтому такие флуктуации быстро рассасываются как за счет тепловых потоков (изменение температуры более не поддерживается внешним охлаждением), так и за счет механических возмущений: из-за низкой сжимаемости труднее соблюсти условие постоянства давления, что приводит к наличию разности давлений на границе флуктуации, вызывая ее нестабильность. Сильные флуктуации плотности с ее понижением, таким образом, маловероятны (и могут быть вычислены по обычной теории гидродинамических флуктуаций без дополнительного внешнего члена, о котором пойдет речь ниже, для несверхтекучего бозе-газа). Флуктуации же с повышением плотности, как отмечалось выше, имеют тенденцию к усилению

и, как будет показано ниже, при преодолении некоего барьера могут начать развиваться в очаг новой (сверхтекучей) фазы.

Аналогично предыдущей работе [1], можно рассматривать эволюцию такой бозе-системы в рамках гидродинамической теории флуктуаций, добавив в гидродинамические уравнения потерю энергии за счет излучения фононов:

$$\frac{T}{\tau_{ph}^0} \frac{\delta n}{n} = -\frac{\sqrt{(T_c - T)T_c}}{\tau_{ph}} U(T_c - T), \quad (9)$$

где $1/\tau_{ph} = (1/\tau_{ph}^0)(1/\eta^{1/6})$. Фононное время τ_{ph} , введенное в работе [1], отличается от введенного здесь на малый множитель $\eta^{1/6}$. Гидродинамическим уравнением, ввиду постоянства давления, будет уравнение теплопроводности

$$nc_p \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right) = \nabla(\kappa \nabla T) - nc_p \frac{\sqrt{(T_c - T)T_c}}{\tau_{ph}} U(T_c - T) + \text{div } \mathbf{q}, \quad (10)$$

где κ — теплопроводность бозе-газа, c_p — его удельная теплоемкость при постоянном давлении в расчете на одну частицу. В уравнение также введен ланжевенский член $\text{div } \mathbf{q}$. Согласно гидродинамической теории флуктуаций [2], случайные тепловые потоки \mathbf{q} дельта-коррелированы (коррелированы на масштабах, малых по сравнению с гидродинамическими):

$$\langle q_i(\mathbf{r}_1, t_1) q_j(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle = 2\kappa T^2 \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \delta(t_1 - t_2) \delta_{i,j}.$$

Так же как и в работе [1], будем считать, что флуктуации возникают при некоторой фиксированной начальной температуре $T_\infty > T_c$. Флуктуации с $\Delta T = T - T_\infty \ll T_\infty$ наблюдаются достаточно часто и имеют фактически стационарное распределение в пространстве. Однако иногда возникают редкие флуктуации с достаточно большой амплитудой $\delta T \sim T_c - T_\infty$, $T < T_c$, при которых начинается эффективное охлаждение фононами, и флуктуация становится необратимой, развиваясь в очаг новой фазы. Нас будет интересовать вычисление вероятности образования таких флуктуаций в рамках уравнения Фоккера–Планка, описывающего вероятность $W_t(T(r), t)$ реализации данной флуктуации $T(r)$ в момент времени t , и имеющего вид [1, 3]

$$\frac{\partial}{\partial t} W = - \int \frac{\delta}{\delta T(r)} \left(\frac{\chi T_\infty^2}{nc_p} \nabla^2 \frac{\delta}{\delta T(r)} W + \left[\chi \nabla^2 T - U(T_c - T) \frac{\sqrt{(T - T_c)T_c}}{\tau_{ph}} \right] W \right) d^3 r, \quad (11)$$

где χ — температуропроводность газа. Решение можно искать в виде $\exp S$, что приводит к уравнению Гамильтона–Якоби в главном порядке по большой величине S . Характеристические уравнения Гамильтона–Якоби дают систему гамильтоновых уравнений [1]:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{2\chi T_\infty^2}{nc_p} \nabla^2 p(\mathbf{r}) + \chi \nabla^2 T - U(T_c - T) \frac{\sqrt{(T_c - T)T_c}}{\tau_{ph}}, \quad (12)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\chi \nabla^2 p - \frac{p}{2\tau_{ph}} U(T_c - T) \sqrt{\frac{T_c}{T_c - T}} \quad (13)$$

с гамильтонианом

$$H = \int p(\mathbf{r}) \left[\frac{\chi T_\infty^2}{nc_p} \nabla^2 p(\mathbf{r}) + \chi \nabla^2 T - U(T_c - T) \frac{\sqrt{(T_c - T)T_c}}{\tau_{ph}} \right] d^3r, \quad (14)$$

где $p = \delta S / \delta T(\mathbf{r})$. При этом S в $\exp S$ играет роль гамильтонова действия

$$S = \int p(r) \partial_t T d^3r dt - \int H dt.$$

Эти уравнения могут быть приведены к безразмерному виду с помощью введения следующих (безразмерных) переменных:

$$\xi = (r / \sqrt{\chi \tau_{ph}}) (T_c^{1/4} / (T_\infty - T_c)^{1/4}),$$

$$\tau = (t / \tau_{ph}) (T_c^{1/2} / (T_\infty - T_c)^{1/2}),$$

а также новых безразмерных полей Θ и Π :

$$\Theta = \frac{T - T_c}{T_\infty - T_c}, \quad p = \frac{nc_p (T_\infty - T_c) \Pi}{T_\infty^2}.$$

Уравнения при этом принимают вид

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} = \nabla^2 \Theta - (-\Theta)^{1/2} U(-\Theta) + 2\nabla^2 \Pi, \quad (15)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \tau} = -\nabla^2 \Pi - \frac{\Pi}{2} \frac{U(-\Theta)}{(-\Theta)^{1/2}}. \quad (16)$$

Решение должно удовлетворять следующим граничным условиям:

$$\Pi_{\xi \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \quad \Pi_{\tau \rightarrow -\infty} \rightarrow 0,$$

$$\Theta_{\tau \rightarrow -\infty} \rightarrow 1, \quad \Theta_{\xi \rightarrow \infty} \rightarrow 1,$$

проходить в окрестности $\partial \Theta / \partial \tau \approx 0$, $\Pi \approx 0$ при $\tau \rightarrow \tau^*$, после чего флуктуация развивается за счет усилившегося охлаждения, а случайными тепловыми потоками можно пренебречь:

$$\partial \Theta / \partial \tau \approx \nabla^2 \Theta - U(-\Theta) \sqrt{-\Theta}.$$

Можно оценить действие S с точностью до численного множителя:

$$S = \int p \frac{\partial T}{\partial t} dr dt = s_1 \frac{nc_p (T_\infty - T_c)^2}{2T_\infty^2} (\sqrt{\chi \tau_{ph}})^3 \frac{(T_\infty - T_c)^{3/4}}{T_c^{3/4}}, \quad (17)$$

где отрицательная безразмерная константа $s_1 = \int \Pi(\xi) \partial_t \Theta(\xi) d^3 \xi d\tau$ (здесь учтено, что $H \equiv 0$). Удобно теперь вернуться к изначальному определению фоновонного времени τ_{ph}^0 (7), (9) и выразить ответ в терминах τ_{ph}^0 и η :

$$S = s_1 \frac{nc_p (T_\infty - T_c)^2}{2T_\infty^2} (\sqrt{\chi \tau_{ph}^0})^3 \times \frac{(T_\infty - T_c)^{3/4}}{T_c^{3/4}} \eta^{1/4}. \quad (18)$$

Для сравнения: действие, полученное в предыдущей работе [1], выраженное через τ_{ph}^0 и η , имеет вид

$$S_0 = s_0 \frac{nc_p (T_\infty - T_c)^2}{2T_\infty^2} (\sqrt{\chi \tau_{ph}^0})^3 \eta^{1/2}, \quad (19)$$

где s_0 — соответствующая безразмерная константа для случая слабых флуктуаций плотности (в этом случае она может быть найдена численно [1]: $s_0 = -100.23$). В рассматриваемом случае аналогичное вычисление заметно осложняется, что будет обсуждаться ниже. Сравнение результатов показывает, что действие при сильных флуктуациях плотности отличается от действия, найденного в [1], на коэффициент $(\delta T / T \eta^{1/3})^{3/4}$, который пропорционален $(\delta n / n)^{3/2}$ и, согласно предположению (6), много больше единицы. Этот результат вполне естествен, так как сильные флуктуации плотности менее вероятны, чем слабые. Также видно, что в области применимости обеих теорий (средние флуктуации плотности), $\delta n / n \sim 1$, оба ответа имеют один и тот же порядок, таким образом, результаты обоих предельных случаев сшиваются в промежуточной области. Характерное время, за которое происходит развитие сильной флуктуации плотности, по порядку величины равно

$$t_0 = \tau_{ph} \frac{(T_\infty - T_c)^{1/2}}{T_c^{1/2}} = \tau_{ph}^0 \eta^{1/6} \frac{(T_\infty - T_c)^{1/2}}{T_c^{1/2}}. \quad (20)$$

Время однородного остывания до T_c в отсутствие флуктуаций может быть оценено как

$$\tau_u = \tau_{ph}^0 \frac{T_c}{T_\infty - T_c}. \quad (21)$$

В силу формулы (6)

$$\frac{\tau_u}{t_0} = \frac{(T_\infty - T_c)^{1/2}}{T_c^{1/2}} \frac{1}{\eta^{1/6}} \gg 1. \quad (22)$$

Таким образом, сильные флуктуации начинают образовываться далеко от T_c и развиваются достаточно быстро (за времена, много меньшие времени однородного остывания). Напротив, время образования слабых флуктуаций плотности сравнимо с временем однородного остывания (в промежуточной области $\delta n/n \sim 1$) и меньше его для очень слабых флуктуаций (в области $\delta n/n \ll 1$). Поэтому для оправдания результатов работы [1] в области очень слабых флуктуаций требуется привлечение дополнительных соображений, например, влияние границ образца и критическое замедление могут затормозить однородное остывание и дать возможность развиться слабой флуктуации.

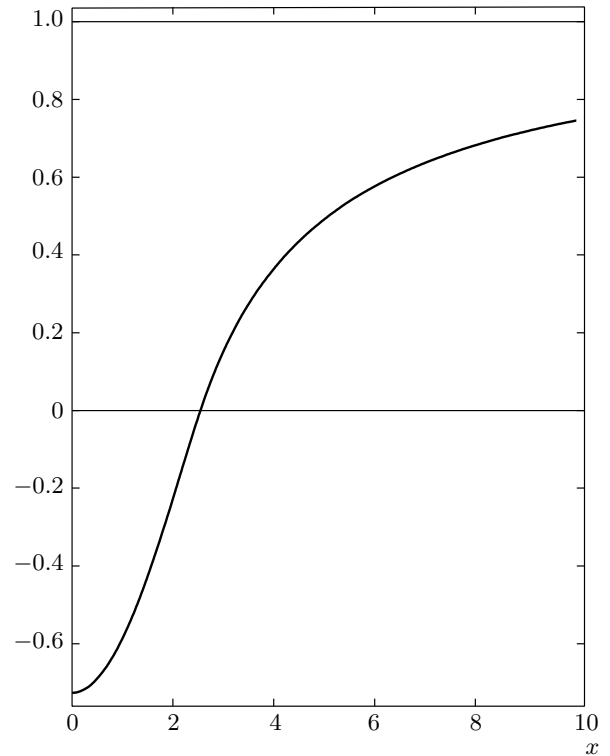
Как уже упоминалось выше, вычисление безразмерной константы s_1 заметно осложняется для рассматриваемого случая. Однако основные идеи работы [1] остаются применимыми и в этом случае. В частности, можно вычислить (на этот раз только численно) стационарное решение уравнений (15), (16). Оно также достигается при $\Pi(\xi) \equiv 0$. Для нахождения Θ надо решить нелинейное уравнение

$$\nabla^2 \Theta(\xi) - (-\Theta(\xi))^{1/2} U(-\Theta(\xi)) = 0 \quad (23)$$

с граничными условиями $\Theta_{\xi \rightarrow \infty} \rightarrow 1$, значение Θ должно быть конечно в нуле. Мы интересуемся сферически-симметричным решением, поэтому удобно сделать замену $\tilde{\Theta} = -\xi\Theta$, тогда уравнение (23) примет вид

$$\frac{d^2}{d\xi^2} \tilde{\Theta}(\xi) + \xi^{1/2} \tilde{\Theta}(\xi)^{1/2} U(\tilde{\Theta}(\xi)) = 0. \quad (24)$$

Мы будем искать такое решение $\tilde{\Theta}_1$, которое при $\xi = 0$ равно нулю и имеет положительную производную, далее в некоторой точке ξ^* имеем $\tilde{\Theta}_1(\xi^*) = 0$ и при $\xi > \xi^*$ величина $\tilde{\Theta}_1(\xi) = \xi^* - \xi$. Тогда функция $\Theta = -\tilde{\Theta}_1/\xi$ есть решение уравнения (23) с оговоренными выше граничными условиями. В силу симметрии уравнения (24) несложно увидеть, что если некоторая функция $\Psi(\xi)$ является решением уравнения (24), то функция $\Psi_1(\xi) = \alpha^5 \Psi(\xi/\alpha)$ также будет



Стационарное решение $\Theta(\xi)$ уравнения (15). Положительное значение функции определяется выражением $\Theta = 1 - 2.5414/\xi$, $\xi > 2.5414$. Отрицательный кусок функции ($\xi < 2.5414$) найден численно

решением уравнения (24) (для любого $\alpha > 0$). Это означает, например, что если $\Psi(\xi)$ имеет производную $\Psi'(\xi^*) = \beta$ в точке ξ^* , в которой $\Psi(\xi^*) = 0$, то Ψ_1 имеет производную $\Psi_1'(\xi^*\alpha) = \alpha^4 \beta$ в точке $\xi^*\alpha$, где $\Psi_1(\xi^*\alpha) = 0$. Это значительно упрощает поиск стационарного решения уравнения (24): сначала решаем задачу Коши для уравнения

$$\frac{d^2}{d\xi^2} \tilde{\Theta}(\xi) + \xi^{1/2} \tilde{\Theta}(\xi)^{1/2} = 0 \quad (25)$$

с граничными условиями $\tilde{\Theta}(\xi = 0) = 0$ и $\tilde{\Theta}'_\xi(\xi = 0) = \gamma_1$, где γ_1 — произвольное положительное число (например, $\gamma_1 = 1$). Решив такую задачу численно, мы обнаружим, что решение $\tilde{\Theta}_1$ обращается в нуль в некоторой точке ξ^* (на самом деле, оно не может продолжиться за эту точку, так как подкоренное выражение в равенстве (25) становится отрицательным) и производная $\tilde{\Theta}'_1(\xi^*)$ в этой точке равна некоторому числу γ_2 , где, вообще говоря, $\gamma_2 \neq -1$. Тем не менее для сшивки решений в областях $\xi > \xi^*$ и $\xi < \xi^*$ необходимо, чтобы выполнялось условие $\gamma_2 = -1$. Поэтому мы должны вновь решить задачу Коши, на этот раз с условиями $\tilde{\Theta}(\xi = 0) = 0$

и $\dot{\Theta}'_{\xi}(\xi = 0) = \gamma_1/|\gamma_2|$, при этом мы автоматически получим выполнение условия шивки и найдем значение ξ^* ($\xi^* = 2.5414$ численно), а значит, и все решение (см. рисунок).

На больших временах, когда величина Θ близка к стационарному значению, можно по аналогии с работой [1] найти временную асимптотику для Π . Для этого надо, используя стационарное решение для Θ , найти уровень λ отрицательной энергии для «гамильтониана»

$$\hat{H} = -\nabla^2 - \frac{1}{2} \frac{U(-\Theta)}{(-\Theta)^{1/2}}. \quad (26)$$

Это несложно сделать численно, что дает $\lambda = -0.45$. Соответственно, на больших временах асимптотически

$$\Pi_{t \rightarrow \infty}(\xi, t) = \Pi_0(\xi) \exp(-|\lambda|t), \quad (27)$$

где $\Pi_0(\xi)$ — собственная функция, соответствующая собственному значению λ .

Имея такую асимптотику, можно было бы решать уравнения (15), (16) методом работы [1]. Уравнение (16) неустойчиво для решения в прямом направлении времени, в то время как уравнение (15) неустойчиво в обратном. Поэтому (16) надо решать в обратном направлении времени, задавшись начальным условием (27). Найдя таким образом $\Pi(\xi, t)$, можно решать уравнение (15) в прямом направлении времени.

В случае, предложенном в работе [1], уравнение (16) зависело от Θ только неявно. Вся зависимость сводилась к заданию кривой $\xi^*(t)$ ($\xi^*(t)$ — точка, в которой $\Theta(\xi^*(t), t) = 0$), для чего, вообще говоря, требовалось N параметров (под N понимается число разбиений одной из осей). Далее проводилась подгонка по этим параметрам, где критерием приближения к истинному решению фактически являлось совпадение нуля $\Theta(\xi, t)$ с кривой $\xi^*(t)$. При этом было показано, что на самом деле для требуемой точности достаточно всего трех параметров, которыми параметризуется кривая, при правильном выборе ее параметризации. Это делало схему работы [1] просто реализуемой и экономной в вычислительном плане. В нынешнем случае такой простой подход неприменим, что связано с тем, что уравнение (16) явно зависит от Θ и для решения требуется $2N^2$ подгоночных параметров, так как теперь требуется параметрическое задание всей функции Θ как в пространстве, так и во времени. В такой ситуации более предпочтительна схема, предлагаемая в работе [4], где решение такого типа уравнений ищется на

решетке в плоскости пространство–время как решение системы из N^2 нелинейных уравнений и прогонки по времени не требуется. Однако эта схема требует гораздо более значительных вычислительных затрат, и мною здесь не реализуется.

Как отмечалось выше, однородное остывание в задаче [1] происходит за времена, меньшие времени образования критической флуктуации, и требуются дополнительные соображения для обоснования предложенной там схемы. Главным достоинством модели [1] является то, что вычисление эволюции критической флуктуации может быть проведено «до конца» сравнительно простыми вычислительными методами, что дает наглядное представление о существовании и виде инстантона. Рассматриваемая сейчас задача свободна от упомянутых выше оговорок, так как в любом случае время однородного остывания мало по сравнению с временем образования инстантона и никаких дополнительных соображений не требуется, но возникает необходимость применения более сложных вычислительных методов в вопросе описания вида критической флуктуации в зависимости от времени. Однако в промежуточной области, как упоминалось выше, оба решения сшиваются, поэтому по крайней мере вблизи нее решение должно быть близко к изложенному в работе [1]. Можно также ожидать, что в этой области численное значение безразмерной константы s_1 близко по порядку величины к вычисленной в работе [1] константе s_0 .

Автор выражает благодарность Е. А. Бренеру, С. В. Иорданскому и В. И. Марченко за ценные обсуждения и предложения.

Работа выполнена в рамках программы Президиума РАН «Квантовая макрофизика», при финансовой поддержке РФФИ (грант № 05-02-16553), фонда «Династия» и Landau Scholarship Committee, FZ-Juelich.

ЛИТЕРАТУРА

1. E. A. Brener, S. V. Iordanskiy, and R. B. Saptsov, *Phys. Rev. E* **73**, 016127 (2006).
2. Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Статистическая физика*, ч. 2, Наука, Москва (1978).
3. В. И. Кляцкин, *Стохастические уравнения глазули физика*, Физматлит, Москва (2001).
4. J. A. Freire, D. P. Arovas, and H. Levine, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 5054 (1997).