

# О РЕЛАКСАЦИИ ПАРАМЕТРА ПОРЯДКА В МОДЕЛИ БКШ

С. В. Иорданский<sup>a,b\*</sup>, Р. Б. Сапцов<sup>a\*\*</sup>, Е. А. Бренер<sup>b</sup>

<sup>a</sup> *Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау Российской академии наук  
142432, Черноголовка, Московская обл., Россия*

<sup>b</sup> *Institut für Festkörperforschung, Jülich, Germany*

Поступила в редакцию 12 февраля 2007 г.

Рассмотрена релаксация параметра порядка «чистого» сверхпроводника в однородном случае, связанная с электрон-фононным взаимодействием. Процесс релаксации связан с простой физической картиной изменения числа электронов в куперовских парах из-за столкновений возбуждений с поглощением и излучением фононов. Показано, что вблизи критической температуры время релаксации модуля параметра порядка много больше, чем время между соударениями возбуждений.

PACS: 74.20.Fg

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Кинетика и неравновесные свойства сверхпроводников активно изучались как теоретически, так и экспериментально с момента появления микроскопической теории Бардина–Купера–Шриффера–Боголюбова [1, 2]. Обширная литература посвящена поведению сверхпроводника во внешних полях или при инъекции неравновесных носителей заряда. Результаты основных работ просуммированы в [3, 4].

Главная трудность при микроскопическом описании связана с большим размером куперовских пар по сравнению с межэлектронными расстояниями и необходимостью выделить механизм образования конденсата куперовских пар.

Классическое условие самосогласования параметра порядка выполняется только для его равновесного значения и справедливо только в случае, когда время образования равновесного конденсата пар является наименьшим, что заранее не ясно. Следует отметить, что рассмотрение уравнения для вершинной функции Грина (см., например, [5]), которое показывает неустойчивость основного состояния невзаимодействующих электронов при наличии слабого притяжения между ними, не дает прямого результата для характерного времени перехода в сверхпроводящее состояние.

В ряде работ авторы изучают кинетические свойства сверхпроводников в так называемом бесстолкновительном режиме, используя редуцированный гамильтониан теории БКШ и полностью пренебрегая обычными электрон-электронными столкновениями. Впервые такая задача рассматривалась в работе [6]. Не так давно появилась работа [7], а в работах [8] дана исчерпывающая классификация свойств редуцированного гамильтониана, принадлежащего некоторому классу точно решаемых моделей. Однако следует иметь в виду, что сверхпроводящее спаривание, связанное со слабым притяжением между электронами вблизи ферми-поверхности, является малым эффектом на фоне более сильного взаимодействия в ферми-жидкости, которой являются электроны металла, и полное игнорирование столкновений может привести к нефизическим артефактам.

В настоящей работе мы используем другой подход, предполагая, что столкновения между возбуждениями происходят достаточно часто и приводят к термализации возбуждений, в то время как параметр порядка меняется относительно медленно. Это стандартное предположение теории Ландау для квазистационарных состояний с неравновесным значением параметра порядка. Обсуждение справедливости такого предположения требует сравнения полученных времен релаксации.

Вычисления могут быть проведены в первом порядке по некоторому малому параметру, формально

\*E-mail: iordansk@itp.ac.ru

\*\*E-mail: saptsov@itp.ac.ru

введенному для скорости релаксации параметра порядка. Однако даже в такой постановке задача остается весьма трудной. Мы рассмотрим простейший случай, предполагая, что имеется однородный параметр порядка, принимающий некоторое неравновесное значение в начальный момент времени, и рассмотрим его однородную эволюцию в макроскопически большом объеме. Подобный подход был развит в работе [9], опубликованной двумя из авторов. Однако работа [9] содержала ряд существенных неточностей, которые будут устранены в настоящей работе.

Мы построим сначала квазистационарные (в пренебрежении процессом релаксации) состояния с неравновесным значением параметра порядка для гамильтониана БКШ и затем рассмотрим их релаксацию из-за процессов рассеяния, связанных с взаимодействием электронных возбуждений и фононов в сверхпроводнике. Полученное релаксационное уравнение вблизи  $T_c$  для модуля параметра порядка является аналогом зависящего от времени уравнения Гинзбурга–Ландау и совпадает по виду с уравнением, полученным в работе [10] с помощью весьма громоздких вычислений, использующих диаграммную технику Келдыша. Целью работы является построение физически прозрачной картины эволюции параметра порядка в однородном случае без использования сложных технических приемов, что может быть существенно при построении более общей картины возникновения упорядоченного состояния, например, в неоднородном случае.

## 2. КВАЗИСТАЦИОНАРНОЕ СОСТОЯНИЕ С ЗАДАНЫМ ЗНАЧЕНИЕМ ПАРАМЕТРА ПОРЯДКА

Термодинамически равновесные состояния для гамильтониана БКШ,

$$H_{BCS} = \sum_{\mathbf{p}, \sigma} \hat{a}_{\mathbf{p}, \sigma}^\dagger [\epsilon_0(\mathbf{p}) - \mu_0] \hat{a}_{\mathbf{p}, \sigma} - \frac{\lambda}{V} \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{p}'} \hat{a}_{\mathbf{p}, \uparrow}^\dagger \hat{a}_{-\mathbf{p}, \downarrow}^\dagger \hat{a}_{-\mathbf{p}', \downarrow} \hat{a}_{\mathbf{p}', \uparrow}, \quad (1)$$

где  $\epsilon_0 = p^2/2m$ ,  $\mu_0 = p_F^2/2m$  — энергия Ферми,  $\lambda$  — постоянная взаимодействия,  $V$  — объем сверхпроводника, а  $\mathbf{p}, \mathbf{p}'$  — импульсы электронов и  $\sigma = \uparrow, \downarrow$  — проекции их спинов, получаются методом среднего поля. Как показано Боголюбовым [2], метод среднего поля дает точные термодинамические состояния для макроскопически большого числа электронов. Метод среднего поля использует преобразование Боголюбова для ферми-операторов [11]

$$\begin{aligned} \hat{a}_{\mathbf{p}, \uparrow} &= U_{\mathbf{p}} \hat{b}_{\mathbf{p}, \uparrow} + V_{\mathbf{p}} \hat{b}_{-\mathbf{p}, \downarrow}^\dagger, \\ \hat{a}_{\mathbf{p}, \downarrow} &= U_{\mathbf{p}} \hat{b}_{\mathbf{p}, \downarrow} - V_{\mathbf{p}} \hat{b}_{-\mathbf{p}, \uparrow}^\dagger, \end{aligned} \quad (2)$$

причем

$$U_{\mathbf{p}}^2 = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\xi_{\mathbf{p}}}{\epsilon_{\mathbf{p}}} \right), \quad V_{\mathbf{p}}^2 = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\xi_{\mathbf{p}}}{\epsilon_{\mathbf{p}}} \right),$$

где  $\xi_{\mathbf{p}} = \epsilon_0(\mathbf{p}) - \mu_0$ ,  $\epsilon_{\mathbf{p}} = \sqrt{|\Delta|^2 + \xi_{\mathbf{p}}^2}$ .  
Параметр порядка

$$\Delta = \frac{\lambda}{V} \left\langle \sum_{\mathbf{p}} \hat{a}_{-\mathbf{p}, \downarrow} \hat{a}_{\mathbf{p}, \uparrow} \right\rangle, \quad (3)$$

где угловыми скобками обозначается среднее значение. Преобразование Боголюбова переводит исходный гамильтониан (1) в сумму

$$H_{BCS} = H_B + H_1 + H_2,$$

где

$$\begin{aligned} H_B &= 2 \sum_{\mathbf{p}} \xi_{\mathbf{p}} V_{\mathbf{p}} + \sum_{\mathbf{p}} \xi_{\mathbf{p}} (U_{\mathbf{p}}^2 - V_{\mathbf{p}}^2) (\hat{n}_{\mathbf{p}, \uparrow} + \hat{n}_{\mathbf{p}, \downarrow}) - \\ &\quad - \frac{\lambda}{V} \left( \sum_{\mathbf{p}} U_{\mathbf{p}} V_{\mathbf{p}} (1 - \hat{n}_{\mathbf{p}, \uparrow} - \hat{n}_{\mathbf{p}, \downarrow}) \right)^2 \end{aligned} \quad (4)$$

— гамильтониан, зависящий только от операторов числа возбуждений  $\hat{n}_{\mathbf{p}, \sigma} = \hat{b}_{\mathbf{p}, \sigma}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{p}, \sigma}$ ,

$$\begin{aligned} H_1 &= \sum_{\mathbf{p}} \left[ 2\xi_{\mathbf{p}} U_{\mathbf{p}} V_{\mathbf{p}} - (U_{\mathbf{p}}^2 - V_{\mathbf{p}}^2) \frac{\lambda}{V} \sum_{\mathbf{p}'} U_{\mathbf{p}'} V_{\mathbf{p}'} \times \right. \\ &\quad \left. \times (1 - \hat{n}_{\mathbf{p}, \uparrow} - \hat{n}_{\mathbf{p}, \downarrow}) \right] (\hat{b}_{\mathbf{p}, \uparrow}^\dagger \hat{b}_{-\mathbf{p}, \downarrow}^\dagger + \hat{b}_{-\mathbf{p}, \downarrow} \hat{b}_{\mathbf{p}, \uparrow}) \end{aligned} \quad (5)$$

— недиагональный оператор, рождающий или уничтожающий пары,

$$\begin{aligned} H_2 &= -\frac{\lambda}{V} \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{p}'} \left[ U_{\mathbf{p}}^2 \hat{b}_{\mathbf{p}, \uparrow}^\dagger \hat{b}_{-\mathbf{p}, \downarrow}^\dagger - V_{\mathbf{p}}^2 \hat{b}_{-\mathbf{p}, \downarrow} \hat{b}_{\mathbf{p}, \uparrow} \right] \times \\ &\quad \times \left[ U_{\mathbf{p}'}^2 \hat{b}_{\mathbf{p}', \uparrow}^\dagger \hat{b}_{-\mathbf{p}', \downarrow}^\dagger - V_{\mathbf{p}'}^2 \hat{b}_{-\mathbf{p}', \downarrow} \hat{b}_{\mathbf{p}', \uparrow} \right]. \end{aligned} \quad (6)$$

Равновесные состояния преобразованного гамильтониана соответствуют минимуму оператора  $H_B$  как функции  $|\Delta|^2$  при фиксированных числах заполнения  $n_{\mathbf{p}, \sigma}$ , соответствующих максимуму энтропии (ферми-распределение),

$$\frac{\partial \langle H_B \rangle}{\partial |\Delta|^2} = 0. \quad (7)$$

Важным обстоятельством является то, что это же условие обращает в нуль гамильтониан  $H_1$  и дает стандартное условие самосогласования

$$\frac{\lambda}{2} \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1 - n_{\mathbf{p},\uparrow} - n_{\mathbf{p},\downarrow}}{\epsilon_{\mathbf{p}}} = 1. \quad (8)$$

Как показано Боголюбовым с соавторами [12], в этом случае поправки, связанные с гамильтонианом  $H_2$ , несущественны в пределе макроскопического числа электронов.

Это описание полностью эквивалентно методу функций Грина, введенному Горьковым [13]. Однако условие самосогласования выполняется только для термодинамически равновесных состояний и нарушается для неравновесных значений параметра порядка  $\Delta$ . При этом не выполняются сразу два условия,

$$H_1 = 0, \quad \frac{\partial H_B}{\partial |\Delta|^2} = 0,$$

что приводит к тому, что приближение среднего поля в исходной форме становится неточным для макроскопически большого числа электронов.

Этих трудностей можно избежать, если ввести лагранжев множитель  $\delta\lambda$  для заданного квадрата модуля параметра порядка и рассмотреть новый эффективный гамильтониан

$$H_{eff} = H_{BCS} - \frac{\delta\lambda}{V} \sum_{\mathbf{p},\mathbf{p}'} \hat{a}_{\mathbf{p},\uparrow}^\dagger \hat{a}_{-\mathbf{p},\downarrow}^\dagger \hat{a}_{-\mathbf{p}',\downarrow} \hat{a}_{\mathbf{p}',\uparrow}, \quad (9)$$

чтобы обеспечить выполнение заданного значения

$$\frac{|\Delta|}{\lambda + \delta\lambda} = \frac{1}{V} \left| \left\langle \sum_{\mathbf{p}} \hat{a}_{-\mathbf{p},\downarrow} \hat{a}_{\mathbf{p},\uparrow} \right\rangle \right|.$$

Таким образом, мы получим стандартную модель БКШ с новой «эффективной» постоянной взаимодействия  $\lambda_{eff} = \lambda + \delta\lambda$ . Соответственно, условие самосогласования (8) будет выполняться с измененной константой взаимодействия  $\lambda_{eff}$ .

Будем рассматривать только область температур, близких к критической температуре  $T_c$ , так как только в этой области выполняется условие малости скорости релаксации параметра порядка по сравнению со скоростью возбуждений. В этом случае из условия самосогласования (8) можно выразить  $\delta\lambda$  через неравновесную величину  $|\Delta|^2$ :

$$\frac{\delta\lambda}{\lambda^2} = \frac{|\Delta|^2 - |\Delta_{eq}|^2}{T_c^2} \frac{mp_F}{2\pi^2\hbar^3} \frac{7\zeta(3)}{8\pi^2}, \quad (10)$$

где  $\zeta(3)$  — дзета-функция Римана,  $\Delta_{eq} = \Delta_{eq}(\lambda, T)$  — равновесное значение параметра

порядка при заданной температуре  $T < T_c$ . Факторы когерентности  $U_{\mathbf{p}}$  и  $V_{\mathbf{p}}$  будут иметь стандартный вид с неравновесной величиной  $|\Delta|$ , связанной с новой эффективной постоянной взаимодействия. При этом необходимо также учесть изменение химического потенциала электронов, связанное с тем, что волновая функция куперовских пар должна быть пропорциональна  $\exp(2i\mu_s t/\hbar)$ , где  $\mu_s$  — химический потенциал электронов в парах, и переход к не зависящей от времени волновой функции пар в уравнениях среднего поля сдвигает химический потенциал электронов,

$$\mu \rightarrow \mu_0 + \mu_s. \quad (11)$$

При этом величина

$$\frac{\delta\lambda}{V} \sum_{\mathbf{p},\mathbf{p}'} \langle \hat{a}_{\mathbf{p},\uparrow}^\dagger \hat{a}_{-\mathbf{p},\downarrow}^\dagger \rangle \langle \hat{a}_{-\mathbf{p}',\downarrow} \hat{a}_{\mathbf{p}',\uparrow} \rangle = \mu_s N_s \quad (12)$$

может быть записана в терминах числа  $N_s$  сверхпроводящих электронов в куперовских парах,  $N_s \propto |\Delta|^2$ , и их химического потенциала  $\mu_s \propto \Delta^2 - \Delta_{eq}^2$ , обращаемого в нуль для равновесного значения параметра порядка.

Для установления вида коэффициентов воспользуемся выражением для числа электронов после преобразования Боголюбова (2):

$$N_e = \sum_{\mathbf{p},\sigma} \langle \hat{a}_{\mathbf{p},\sigma}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p},\sigma} \rangle = \sum_{\mathbf{p},\sigma} (U_{\mathbf{p}}^2 - V_{\mathbf{p}}^2) n_{\mathbf{p},\sigma} + 2 \sum_{\mathbf{p}} V_{\mathbf{p}}^2, \quad (13)$$

где первый член соответствует числу электронов в возбуждениях, а второй член дает число электронов в парах

$$N_s = 2 \sum_{\mathbf{p}} V_{\mathbf{p}}^2. \quad (14)$$

Производную  $\partial N_s / \partial \mu_s$ , учитывая сдвиг химического потенциала (11), можно вычислить непосредственно:

$$\frac{\partial N_s}{\partial \mu_s} = V \frac{p_F m}{\pi^2 \hbar^3}. \quad (15)$$

Для производной имеем

$$\frac{\partial N_s}{\partial |\Delta|^2} = \frac{\partial \mu_s}{\partial |\Delta|^2} \frac{\partial N_s}{\partial \mu_s} \Big|_{|\Delta|} + \frac{\partial N_s}{\partial |\Delta|^2} \Big|_{\mu_s} = \frac{\partial N_s}{\partial \mu_s} \frac{\partial \mu_s}{\partial |\Delta|^2},$$

так как  $\left( \partial N_s / \partial |\Delta|^2 \right)_{\mu_s} = 0$  из-за нечетности  $V_{\mathbf{p}}$  по  $\xi_{\mathbf{p}}$ . Используя выражения (10), (12), (15), нетрудно получить, что

$$N_s = V \frac{|\Delta|^2}{T_c} \frac{mp_F}{\hbar^3 \pi^2} \sqrt{\frac{7\zeta(3)}{16\pi^2}}, \quad (16)$$

$$\mu_s = \frac{|\Delta|^2 - |\Delta_{eq}|^2}{T_c} \sqrt{\frac{7\zeta(3)}{16\pi^2}}.$$

Таким образом, мы полностью определили квазистационарные состояния с заданной величиной параметра порядка  $|\Delta|$  числом сверхпроводящих электронов  $N_s$  и их химическим потенциалом  $\mu_s$ . Эти состояния будут стационарными, если нет процессов релаксации, в предположении равновесного распределения возбуждений

$$n_{\mathbf{p},\sigma} = \left[ \exp\left(\frac{\epsilon_{\mathbf{p}}}{T}\right) + 1 \right]^{-1}, \quad \epsilon_{\mathbf{p}} = \sqrt{\xi_{\mathbf{p}}^2 + |\Delta|^2}.$$

Эти состояния имеют энергию Гинзбурга–Ландау (4):

$$E_{GL}(|\Delta|, n_{\mathbf{p}}) = H_B(|\Delta|, T),$$

причем  $\mu_s = \partial E_{GL} / \partial N_s$ . Это может быть непосредственно проверено для эффективного гамильтониана (9), так как он стационарен относительно изменений  $N_s$ . Условие самосогласования выполняется для текущего значения постоянной взаимодействия  $\lambda_{eff}$ . Парные столкновения не будут вызывать релаксации и приводить к изменению  $N_s$ .

Основное расхождение с результатами предыдущей работы [9] состоит в другом выражении для  $N_s$ , которое в  $T_c/\mu_0$  раз меньше. В работе [9] вместо выражения (14) для числа электронов в куперовских парах использовалось определение сверхтекучей плотности, принятое в теории сверхтекучести [11]:  $\rho_s = \rho_e - \rho_n$ , где  $\rho_e$  — полная плотность электронов, а  $\rho_n$  — плотность их нормальной компоненты.

### 3. РЕЛАКСАЦИОННЫЕ ПРОЦЕССЫ

Если нет процессов, приводящих к изменению  $|\Delta|$ , то мы имеем стационарный газ фермиевских возбуждений с энергией  $\epsilon(\xi_{\mathbf{p}})$ ,  $\xi_{\mathbf{p}} = \epsilon_0(\mathbf{p}) - \mu_0 - \mu_s$  и химическим потенциалом пар  $\mu_s$ . Числа заполнения  $n_{\mathbf{p}}$  удовлетворяют кинетическому уравнению Больцмана для возбуждений в сверхпроводнике. Главный член в интеграле столкновений соответствует парным столкновениям фермиевских возбуждений, сохраняющим их число и устанавливающим тепловое равновесие. Кроме этого, имеются тройные столкновения и электрон-фононные столкновения.

В случае, близком к равновесию, с величиной  $|\Delta|$ , удовлетворяющей условию самосогласования, кинетические уравнения получены в ряде работ. Мы следуем результатам работы [14].

Ситуация с изменением  $|\Delta|$  впервые рассматривалась в связи с нарушением электронно-дырочной симметрии (charge imbalance) [15]. В нашей задаче имеется близкая ситуация, однако в энергетическом балансе столкновений необходимо учитывать энергию, возникающую при изменении числа пар из-за конечной величины  $\mu_s$ .

Мы не будем выписывать интеграл парных столкновений для квазичастиц. Отметим, что парные столкновения сохраняют энергию сталкивающихся возбуждений и поэтому не могут привести к образованию связанных куперовских пар. Такой процесс может идти только за счет маловероятных при  $T \lesssim T_c$  тройных столкновений, когда выделявшаяся энергия уносится оставшимся возбуждением.

Основной процесс изменения  $|\Delta|^2$  связан с электрон-фононным взаимодействием. Роль обыкновенных немагнитных примесей незначительна, и мы будем рассматривать только «чистые» сверхпроводники с большой длиной свободного пробега. Гамильтониан электрон-фононного взаимодействия в металле имеет вид [5]

$$H_{e-ph} = g \sum_{\sigma} \int \hat{\psi}_{\sigma}^{\dagger}(\mathbf{r}) \hat{\psi}_{\sigma}(\mathbf{r}) \operatorname{div} \mathbf{u}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad (17)$$

где  $\hat{\psi}_{\sigma}$  и  $\hat{\psi}_{\sigma}^{\dagger}$  — операторы вторичного квантования для электронов,  $\mathbf{u}$  — смещение решетки. Этот гамильтониан выражается стандартным образом как через операторы  $\hat{a}_{-\mathbf{p},-\sigma}^{\dagger}$ ,  $\hat{a}_{\mathbf{p},\sigma}$ , так и через боголюбовские операторы  $\hat{b}_{\mathbf{p},\sigma}$  и  $\hat{b}_{-\mathbf{p},-\sigma}^{\dagger}$ . Число электронов в парах определяется выражением  $2 \sum_{\mathbf{p}} V_{\mathbf{p}}^2$ . В силу электронейтральности полный заряд электронов проводимости равен заряду ионов решетки, а полная плотность электронов задана, поэтому изменение заряда возбуждений компенсируется изменением заряда куперовских пар.

Для того чтобы подсчитать скорость изменения числа электронов  $N_s$ , мы должны найти вероятность столкновений с изменением «заряда» возбуждений в единице объема в единицу времени. Рассмотрим процесс рекомбинации. Пусть вероятность рекомбинации для двух возбуждений с импульсами  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{q} - \mathbf{p}$  и разными проекциями спина с излучением фонона в единицу времени и в единице объема будет

$$W^r(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi\hbar)^3}.$$

Изменение числа электронов в таком «парциальном» столкновении будет

$$\delta N_s = U_{\mathbf{p}}^2 - V_{\mathbf{p}}^2 + U_{\mathbf{q}-\mathbf{p}}^2 - V_{\mathbf{q}-\mathbf{p}}^2. \quad (18)$$

Изменение энергии куперовских пар,

$$\tilde{\epsilon} = \mu_s \delta N_s, \quad (19)$$

необходимо учитывать в энергетическом балансе столкновения. Для того чтобы подсчитать полное изменение  $N_s$  в единицу времени, связанное с процессами рекомбинации, сложим вклад всех этих процессов в объеме сверхпроводника:

$$\frac{\partial N_s^r}{\partial t} = V \int W^r(\mathbf{p}, \mathbf{q}) (U_{\mathbf{p}}^2 - V_{\mathbf{p}}^2 + U_{\mathbf{q}-\mathbf{p}}^2 - V_{\mathbf{q}-\mathbf{p}}^2) \times \\ \times \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi\hbar)^3}. \quad (20)$$

Вероятность рекомбинации в результате электрон-фононного взаимодействия определяется вторым порядком теории возмущений. Она неоднократно вычислялась и может быть взята, например, из работы [14]:

$$W^r(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{2\pi}{\hbar} \frac{\hbar^3 c q}{2} \frac{2\pi^2 \eta}{m p_F} \times \\ \times (U_{\mathbf{q}-\mathbf{p}} V_{\mathbf{p}} + U_{\mathbf{p}} V_{\mathbf{q}-\mathbf{p}})^2 [n_{\mathbf{p}} n_{\mathbf{q}-\mathbf{p}} (1 + N(\mathbf{q})) - \\ - (1 - n_{\mathbf{p}})(1 - n_{\mathbf{q}-\mathbf{p}}) N(\mathbf{q})] \delta(\epsilon_{\mathbf{p}} + \epsilon_{\mathbf{q}-\mathbf{p}} - c q - \tilde{\epsilon}). \quad (21)$$

Здесь  $N(\mathbf{q})$  — числа заполнения фононов,  $c$  — скорость звука,  $\eta$  — безразмерная постоянная, характеризующая электрон-фононное взаимодействие в данном сверхпроводнике [5]. В (21) учтены прямой и обратный процессы. Мы рассматриваем случай температур  $T$ , близких к  $T_c$ , поэтому  $\mu_s \ll T$  и в выражении (21) можно ограничиться низшими по  $\mu_s/T$  членами:

$$W^r(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{2\pi}{\hbar} \frac{\hbar^3 c q}{2} \frac{2\pi^2 \eta}{m p_F} \times \\ \times (U_{\mathbf{q}-\mathbf{p}} V_{\mathbf{p}} + U_{\mathbf{p}} V_{\mathbf{q}-\mathbf{p}})^2 \left(-\frac{\mu_s}{T}\right) \times \\ \times (U_{\mathbf{p}}^2 - V_{\mathbf{p}}^2 + U_{\mathbf{q}-\mathbf{p}}^2 - V_{\mathbf{q}-\mathbf{p}}^2) \times \\ \times (1 - n_{\mathbf{p}})(1 - n_{\mathbf{q}-\mathbf{p}}) N(\mathbf{q}) \delta(\epsilon_{\mathbf{p}} + \epsilon_{\mathbf{q}-\mathbf{p}} - c q). \quad (22)$$

Кроме процессов аннигиляции двух возбуждений имеются процессы рассеяния одного возбуждения с импульсом  $\mathbf{p}$  и определенным спином с излучением одного фонона и образованием возбуждения с импульсом  $\mathbf{p} - \mathbf{q}$  и с тем же спином. Соответствующая вероятность прямого и обратного процессов равна

$$W^s(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{4\pi}{\hbar} \frac{\hbar^3 c q}{2} \frac{2\pi^2 \eta}{m p_F} (U_{\mathbf{p}-\mathbf{q}} U_{\mathbf{p}} - V_{\mathbf{p}} V_{\mathbf{p}-\mathbf{q}})^2 \times \\ \times [n_{\mathbf{p}} (1 - n_{\mathbf{p}-\mathbf{q}}) (1 + N(\mathbf{q})) - \\ - (1 - n_{\mathbf{p}}) n_{\mathbf{p}-\mathbf{q}} N(\mathbf{q})] \delta(\epsilon_{\mathbf{p}} - \epsilon_{\mathbf{p}-\mathbf{q}} - c q - \tilde{\epsilon}), \quad (23)$$

где  $\tilde{\epsilon} = \mu_s \delta N_s$ ,  $\delta N_s = U_{\mathbf{p}}^2 - V_{\mathbf{p}}^2 - U_{\mathbf{p}-\mathbf{q}}^2 + V_{\mathbf{p}-\mathbf{q}}^2$ , а лишняя двойка учитывает вклад двух направлений спинов. Ограничиваясь линейным приближением по  $\mu_s$ , получим

$$W^s(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \\ = \frac{4\pi}{\hbar} \frac{\hbar^3 c q}{2} \frac{2\pi^2 \eta}{m p_F} (U_{\mathbf{p}-\mathbf{q}} U_{\mathbf{p}} - V_{\mathbf{p}} V_{\mathbf{p}-\mathbf{q}})^2 \left(-\frac{\mu_s}{T}\right) \times \\ \times (U_{\mathbf{p}}^2 - V_{\mathbf{p}}^2 - U_{\mathbf{p}-\mathbf{q}}^2 + V_{\mathbf{p}-\mathbf{q}}^2) \times \\ \times (1 - n_{\mathbf{p}}) n_{\mathbf{p}-\mathbf{q}} N(\mathbf{q}) \delta(\epsilon_{\mathbf{p}} - \epsilon_{\mathbf{p}-\mathbf{q}} - c q). \quad (24)$$

Полная скорость изменения  $N_s$  определяется суммой:

$$\frac{\partial N_s}{\partial t} = V \int [W^r(\mathbf{p}, \mathbf{q}) (U_{\mathbf{p}}^2 - V_{\mathbf{p}}^2 + U_{\mathbf{q}-\mathbf{p}}^2 - V_{\mathbf{q}-\mathbf{p}}^2) + \\ + W^s(\mathbf{p}, \mathbf{q}) (U_{\mathbf{p}}^2 - V_{\mathbf{p}}^2 - U_{\mathbf{p}-\mathbf{q}}^2 + V_{\mathbf{p}-\mathbf{q}}^2)] \times \\ \times \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi\hbar)^3}. \quad (25)$$

Мы считаем скорость изменения числа сверхпроводящих электронов самым медленным процессом, что позволяет рассматривать функции распределения как равновесные за счет более частых столкновений возбуждений без изменения числа сверхпроводящих электронов  $N_s$ .

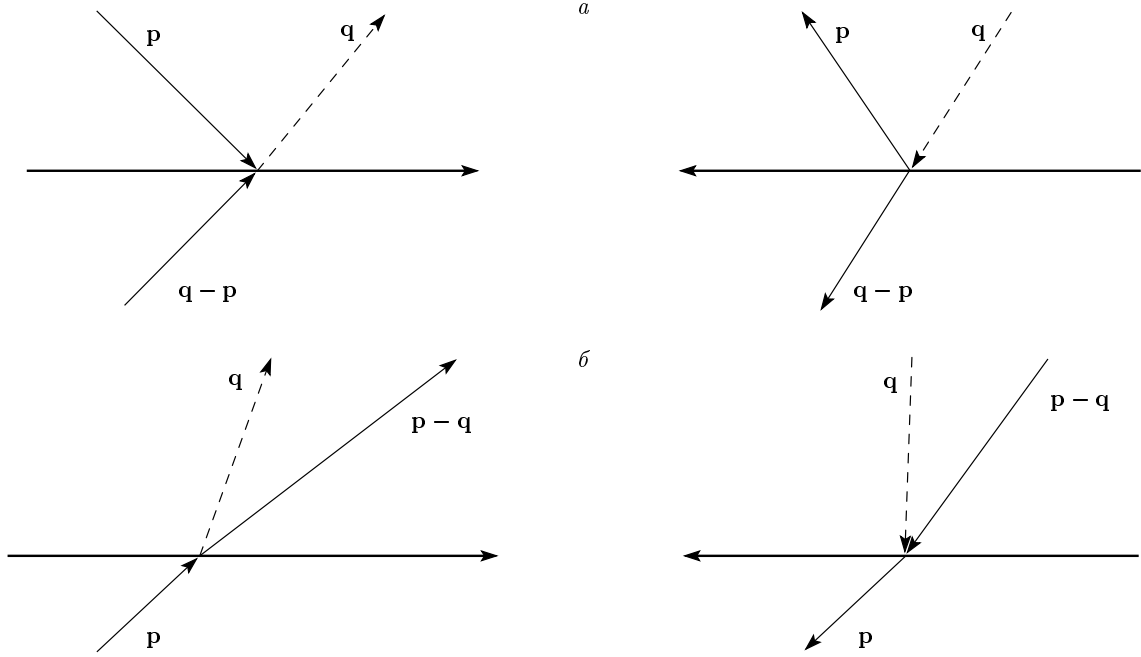
На рисунке показаны диаграммы процессов рекомбинации и рассеяния. Несмотря на различные комбинации факторов когерентности в выражениях (22) и (24) для  $W^r$  и  $W^s$ , эти выражения могут быть преобразованы к весьма близкому виду. Рассмотрим сначала вклад рекомбинационных столкновений в сумме (25), т. е. член

$$V \int [W^r(\mathbf{p}, \mathbf{q}) (U_{\mathbf{p}}^2 - V_{\mathbf{p}}^2 + U_{\mathbf{q}-\mathbf{p}}^2 - V_{\mathbf{q}-\mathbf{p}}^2)] \times \\ \times \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi\hbar)^3}. \quad (26)$$

В реальных металлах скорость звука  $c \ll p_F/m$ . Согласно закону сохранения энергии, в выражениях (22), (24) это обстоятельство приводит к большой величине  $q$  по сравнению с  $|p - p_F|$  и, соответственно, к малой величине косинуса угла  $\theta$  между векторами  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{q}$ . Если выбрать сферическую систему координат в пространстве  $\mathbf{q}$  с осью  $q_z$ , направленной по  $\mathbf{p}$ , то векторы  $\mathbf{q}$  будут фактически сосредоточены вблизи экваториальной плоскости, перпендикулярной  $\mathbf{p}$ . Это позволяет ввести вместо переменной  $\theta$  величину

$$\xi' = v_F (|\mathbf{p} - \mathbf{q}| - p_F) \approx v_F [p - p_F - q(\theta - \pi/2)],$$

ограничиваясь линейными по  $\theta$  членами и полагая  $\sin \theta \approx 1$ . Якобиан такого преобразования равен



Прямой и обратный процессы рекомбинации (а) и рассеяния (б) возбуждений (тонкие сплошные линии) с излучением фонона (штриховые линии). Толстые сплошные линии соответствуют конденсатным линиям

$1/v_F q$ . Такое приближение дает главные по  $c/v_F$  члены интеграла (26). Кроме того, имеется еще интеграл по азимутальному углу  $\phi$ , равный  $2\pi$ . Интеграл по  $d\mathbf{p}/(2\pi\hbar)^3$  выражается через интеграл по  $d\xi_{\mathbf{p}}$  и плотность состояний  $d\xi_{\mathbf{p}} m p_F / 2\pi^2 \hbar^3$ . Кроме того, имеются два тождества:

$$(U_{\mathbf{p}}^2 - V_{\mathbf{p}}^2 + U_{\mathbf{q-p}}^2 - V_{\mathbf{q-p}}^2)(U_{\mathbf{p}} V_{\mathbf{q-p}} + U_{\mathbf{q-p}} V_{\mathbf{p}})^2 = \frac{|\Delta|^2 (\xi_{\mathbf{p}} + \xi_{\mathbf{q-p}})(\epsilon_{\mathbf{p}} + \epsilon_{\mathbf{q-p}})}{2(\epsilon_{\mathbf{p}} \epsilon_{\mathbf{q-p}})^2}, \quad (27)$$

$$(U_{\mathbf{p}}^2 - V_{\mathbf{p}}^2 - U_{\mathbf{p-q}}^2 + V_{\mathbf{p-q}}^2)(U_{\mathbf{p}} U_{\mathbf{p-q}} - V_{\mathbf{p-q}} V_{\mathbf{p}})^2 = \frac{|\Delta|^2 (\xi_{\mathbf{p}} + \xi_{\mathbf{p-q}})(\epsilon_{\mathbf{p}} - \epsilon_{\mathbf{p-q}})}{2(\epsilon_{\mathbf{p}} \epsilon_{\mathbf{p-q}})^2}. \quad (28)$$

Выполняя интегрирование по  $dq d\phi$ , для вклада процессов рекомбинации получаем

$$\frac{1}{V} \frac{\partial N_s^r}{\partial t} = \frac{\eta |\Delta|^2}{8\pi \hbar^4} \int \frac{(\xi + \xi')(\epsilon + \epsilon')^3}{(\epsilon \epsilon')^2 c^2 v_F} \left( \frac{\xi}{\epsilon} + \frac{\xi'}{\epsilon'} \right) \times (1 - n_{\epsilon})(1 - n_{\epsilon'}) N(\epsilon + \epsilon') \left( -\frac{\mu_s}{T} \right) d\xi d\xi'. \quad (29)$$

Интеграл в (29) симметричен по  $\xi$  и  $\xi'$ . Основной вклад при малых  $|\Delta|/T$  дают две области интегрирования: малых  $\xi' \sim |\Delta|$  и больших  $\xi \sim T \gg |\Delta|$  и,

наоборот, больших  $\xi'$  и малых  $\xi$ . При вычислении интеграла существенны только четные по  $\xi, \xi'$  члены. В результате в главном по  $|\Delta|$  порядке интеграл (29) равен

$$\frac{m p_F |\Delta|}{8\pi \hbar^3} \left( -\frac{\mu_s}{T} \right) \frac{1}{\tau_{ph}}, \quad (30)$$

где  $\tau_{ph}$  — время энергетической релаксации за счет электрон-фононных столкновений [4]:

$$\frac{1}{\tau_{ph}} = \frac{T^3 \pi \eta}{\hbar (c p_F)^2} \int_0^{\infty} \frac{y^2 dy}{\text{sh } y} = \frac{T^3}{\hbar \omega_D^2} \frac{7\zeta(3)\pi\eta}{2}, \quad (31)$$

где  $\omega_D$  — дебаевская частота в данном металле. Аналогичные вычисления могут быть проведены для вклада процессов рассеяния:

$$\frac{\eta |\Delta|^2}{4\pi \hbar^4} \int \frac{(\xi + \xi')(\epsilon - \epsilon')^3}{(\epsilon \epsilon')^2 c^2 v_F} \left( \frac{\xi}{\epsilon} - \frac{\xi'}{\epsilon'} \right) \times (1 - n_{\epsilon})(1 - n_{\epsilon'}) N(\epsilon + \epsilon') \left( -\frac{\mu_s}{T} \right) d\xi d\xi'. \quad (32)$$

При рассмотрении процессов рассеяния следует помнить, что поскольку энергия излученного фонона всегда положительна, энергия  $\epsilon_{\mathbf{p}}$  рассеиваемого возбуждения всегда больше, чем энергия  $\epsilon_{\mathbf{p-q}}$  состояния, в которое происходит рассеяние. Поэтому не будет симметрии между  $\xi_{\mathbf{p}}$  и  $\xi_{\mathbf{p-q}}$  и возникает только одна область интегрирования: малых  $\xi'$ , когда

$\epsilon(\xi') \propto |\Delta|$ , и больших  $\xi$ , когда  $\epsilon(\xi) \propto T$ . Это, однако, компенсируется дополнительным по сравнению с рекомбинацией коэффициентом 2, учитывающим рассеяние электронов с разными спинами. Возникающий в пределе  $|\Delta| \ll T$  интеграл совпадает с полученным для процессов рекомбинации, и вклады обоих процессов в скорость изменения  $\partial N_s / \partial t$  одинаковы. При этом

$$\frac{1}{V} \frac{\partial N_s}{\partial t} = \frac{m p_F |\Delta|}{4\pi \hbar^3} \left( -\frac{\mu_s}{T} \right) \frac{1}{\tau_{ph}}. \quad (33)$$

Используя выражения (15), (16), окончательно получаем релаксационное уравнение

$$\frac{\partial |\Delta|^2}{\partial t} = -\frac{\pi}{4} \frac{|\Delta|}{\tau_{ph}} \frac{|\Delta|^2 - |\Delta_{eq}|^2}{T_c}, \quad (34)$$

которому можно придать стандартный вид:

$$\frac{\partial (|\Delta| - |\Delta_{eq}|)}{\partial t} = -\frac{1}{\tau_r} (|\Delta| - |\Delta_{eq}|), \quad (35)$$

где

$$\frac{1}{\tau_r} = \frac{1}{\tau_{ph}} \frac{\pi (|\Delta_{eq}| + |\Delta|)}{8T_c}. \quad (36)$$

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Результат (34) совпадает с уравнением для вещественной части «обобщенного» зависящего от времени уравнения Гинзбурга–Ландау, полученного в работе [10], с точностью до численного множителя порядка единицы. Величина времени релаксации для щели согласно настоящей работе в 0.34 раза меньше, чем в работе [10]. Отметим, что наш вывод уравнения для  $|\Delta|$  является элементарным и не использует громоздких формальных математических выкладок, которые затрудняют понимание физической картины релаксации. Следует также отметить, что, согласно проведенному выводу, релаксационному уравнению подчиняется только величина  $|\Delta|$ . Что касается фазового множителя в выражении  $\Delta = |\Delta| \exp(i\phi)$ , изменение фазы носит регулярный нерелаксационный характер,

$$\phi = 2 \int_0^t \mu_s (|\Delta|^2(t')) dt', \quad (37)$$

и не требует рассмотрения какого-либо дополнительного релаксационного уравнения. Для справедливости проведенного вывода необходимо, чтобы время релаксации

$$\tau_r = \tau_{ph} \frac{8}{\pi} \frac{T_c}{|\Delta| + |\Delta_{eq}|}$$

было велико по сравнению с  $\tau_{ph}$  и временем  $\hbar\mu_0/T^2$  между парными столкновениями возбуждений, устанавливающими их тепловое распределение. Кроме того, неопределенность энергии  $\hbar/\tau_r$  должна быть малой по сравнению с величиной щели  $|\Delta|$ . Все это ограничивает область применимости областью Гинзбурга–Ландау  $|\Delta|/T_c \ll 1$ ,  $|\Delta| > \hbar/\tau_r$ . Вне области Гинзбурга–Ландау релаксация параметра порядка будет вызывать сильное отклонение функции распределения возбуждений от равновесной и необходимо рассматривать релаксацию  $|\Delta|$  совместно с решением кинетического уравнения для функции распределения. Следует отметить, что в рассмотренной нами постановке нужно, вообще говоря, учитывать тепловой эффект релаксации параметра порядка, т. е. учитывать изменение температуры, вызываемое возникающими фононами.

Рассмотренный нами подход к механизму релаксации сверхпроводящего параметра порядка похож на подход, предложенный в работе [16] для однородной релаксации спина в сверхтекучем  $^3\text{He}$ . В нашей работе рассматриваются отдельно вклады возбуждений и куперовских пар в полный заряд электронов, а в работе [16] — вклады возбуждений и пар в полный спин  $^3\text{He}$ . Сверхпроводящий параметр порядка в изученном нами синглетном случае существенно проще параметра порядка в  $^3\text{He}$ , и задача об однородной релаксации допускает полное микроскопическое решение вблизи критической температуры. В работе [17] дан вывод уравнения релаксации щели непосредственно в терминах функции распределения возбуждений. Полученный результат совпадает с результатом работы [10] и более ранней работы [18]. При этом классическое условие самосогласования выполнялось за счет подбора неравновесной функции распределения, дающей данное значение щели. Следует, однако, отметить, что найденная в работе [17] неравновесная добавка к функции распределения является четной относительно  $p_F$  и поэтому дает нулевую скорость изменения «заряда» пар согласно закону сохранения полного заряда электронов. Это является некоторым внутренним противоречием, так как «заряд» пар должен меняться в соответствии с найденным в [17] уравнением эволюции для щели. Более подробное сравнение результатов требует отдельного рассмотрения.

Важной задачей является рассмотрение реальной физической картины возникновения конденсата куперовских пар в переохлажденной ферми-системе, которое, по-видимому, происходит в пространстве неоднородным образом.

Авторы благодарны Г. М. Элиашбергу за поддержку в выполнении настоящей работы и многочисленные обсуждения. Кроме того, мы выражаем благодарность Г. Айленбергеру (G. Eilenberger) и Г. Мюллер-Крумбхаару (H. Müller-Krumbhaar) за полезные дискуссии и FZ-Jülich, Germany за гостеприимство.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 05-02-16553) и в рамках Программы Президиума РАН «Квантовая макрофизика».

Один из авторов (Р. Б. С.) также выражает благодарность некоммерческому фонду «Династия» и Landau Scholarship Committee, FZ-Jülich за финансовую поддержку.

### ЛИТЕРАТУРА

1. J. Bardin, L. N. Cooper, and J. R. Schrieffer, *Phys. Rev.* **106**, 162 (1957).
2. Н. Н. Боголюбов, *ЖЭТФ* **34**, 58 (1958).
3. *Nonequilibrium Superconductivity*, ed. by D. N. Langenberg and A. I. Larkin, North-Holland, Amsterdam (1986).
4. N. Kopnin, *Theory of Nonequilibrium Superconductivity*, Clarendon Press, Oxford (2001).
5. А. А. Абрикосов, Л. П. Горьков, И. Е. Дзялошинский, *Методы квантовой теории поля в статистической физике*, Физматгиз, Москва (1962).
6. А. Ф. Волков, Ш. М. Коган, *ЖЭТФ* **65**, 2039 (1973).
7. R. A. Barankov, L. S. Levitov, and B. Z. Spivak, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 160401 (2004).
8. E. A. Yuzbashyan, B. L. Altshuler, V. B. Kuznetsov, and V. Z. Enolskii, E-print archives, cond-mat/0407501; cond-mat/0505493.
9. С. В. Иорданский, Р. Б. Сапцов, Письма в *ЖЭТФ* **83**, 414 (2006).
10. R. J. Watts-Tobin, Y. Kraehenbuehl, and L. Kramer, *J. Low Temp. Phys.* **42**, 459 (1981).
11. Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Статистическая физика*, ч. 2, Наука, Москва (1978).
12. Н. Н. Боголюбов, Д. Н. Зубарев, Ю. А. Церковников, *ДАН СССР* **117**, 788 (1957).
13. Л. П. Горьков, *ЖЭТФ* **34**, 735 (1958).
14. A. G. Aronov, Yu. M. Galperin, V. L. Gurevich, and V. I. Kozub, in [3], p. 325.
15. M. Tinkham, J. Clarke, *Phys. Rev. Lett.* **28**, 1366 (1972).
16. A. J. Leggett and S. Takagi, *Ann. Phys.* **106**, 79 (1977).
17. C. J. Pethich and H. Smith, *Ann. Phys.* **119**, 133 (1979).
18. A. Schmid, *Phys. Rev. Lett.* **38**, 922 (1977).