

О ТОЧНОСТИ СИНХРОНИЗАЦИИ ВЕЙВЛЕТНОЙ ФАЗЫ ХАОТИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ

*Е. Б. Постников**

*Курский государственный университет
305000, Курск, Россия*

Поступила в редакцию 12 января 2007 г.

Показано, что для хаотических сигналов с плохо обусловленной классической фазой существует пороговое значение базисной частоты, выше которой наблюдается синхронизация временных масштабов вейвлетной фазы. Найдено, что возможность введения вейвлетной фазы, детектирующей синхронизацию, связано с диффузионным усреднением исследуемых сигналов.

PACS: 05.45.Xt

Хаотическая синхронизация связанных систем — один из наиболее изучаемых в настоящее время нелинейных феноменов, см. [1]. Для систем, в которых введение фазы сигналов классическими методами (отношение скорости к смещению, преобразование Гильберта) невозможно, она может детектироваться, как показано в работе [2], на основе использования комплексного вейвлет-образа

$$w(a, b) = |w(a, b)| \exp(i\phi(a, b)),$$

где $\phi(a, b)$ — искомая фаза. Соответственно, условие хаотической синхронизации двух систем с фазами $\phi_1(a, b)$ и $\phi_2(a, b)$ на масштабе a_0 имеет вид

$$|\phi_1(a_0, b) - \phi_2(a_0, b)| < \text{const}$$

для всех b , т. е. модуль разности мгновенных значений фаз остается ограниченным во времени. При этом метод равно применим как в случае хорошо, так и плохо (стандартными методами) определенной фазы.

Однако в работах [2, 3], в которых отмечен этот факт, не приводится анализа причин, по которым применение вейвлет-преобразования позволяет регуляризовать фазу хаотического сигнала по отношению к наблюдению синхронизации, а также не рассматривается, что именно служит параметром регуляризации. Целью данной работы является явное определение такого параметра и описание мето-

да, позволяющего определить его критическое значение. Кроме того, решается вопрос о взаимосвязи наличия синхронизации в классическом и вейвлетном представлениях фазы.

Рассмотрим непрерывное вейвлет-преобразование

$$w(a, b) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi^* \left(\frac{t-b}{a} \right) \frac{dt}{a} \quad (1)$$

(звездочка означает комплексное сопряжение) с вейвлетом Морле:

$$\psi(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(i\omega_0 \xi) \exp(-\xi^2/2), \quad (2)$$

удовлетворяющим амплитудной (как будет показано ниже, она удобнее, чем использованная в [2, 3] квадратичная) нормировке:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \psi \left(\frac{t-b}{a} \right) \right| \frac{dt}{a} = 1.$$

Заметим, что помимо масштабной переменной a и временной b в преобразование с вейвлетом Морле (2) входит еще один параметр — базисная частота ω_0 , как известно, влияющая на разрешение во временном и масштабном пространствах. В частности, в работах [4, 5] продемонстрировано, что преобразование с вейвлетом Морле при малых ω_0 лучше детектирует индивидуальные всплески и короткие цуги волн, а при больших ω_0 позволяет разрешать

*E-mail: postnicov@mail.ru

длительные сигналы, представляющие собой суммы индивидуальных гармоник.

Рассмотрим подробнее определение влияния базисной частоты на детектирование хаотической синхронизации. Для удобства интерпретации введем обозначение $\pi\nu = \omega_0/a$. В данном случае ν играет роль частотной переменной (обратного приведенного масштаба). Тогда преобразование (1), (2) принимает вид

$$w(\nu, b) = \exp(i\pi\nu b) \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-i\pi\nu t) \times \\ \times \exp\left\{-\frac{(t-b)^2}{4\omega_0^2 \frac{1}{2\pi^2\nu^2}}\right\} \left(4\pi\omega_0^2 \frac{1}{2\pi^2\nu^2}\right)^{-1/2} dt. \quad (3)$$

Искомое преобразование определяется как $w(a, b) = u(\nu, b) \exp(i\pi\nu b)$, т. е. как (при данном ν) гармоническое колебание с нестационарной комплексной амплитудой. Нетрудно видеть, что $u(\tau, b)$ имеет вид интегрального преобразования с диффузионным ядром, или, что эквивалентно, решения простейшего уравнения диффузии,

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = (2\pi^2\nu^2)^{-1} \frac{\partial^2 u}{\partial b^2}, \quad (4)$$

взятого в «момент времени» $\tau = \omega_0^2$ для каждого значения параметра ν , определяющего начальное условие

$$u(0, b) = [\operatorname{Re} f(b) \cos(\pi\nu b) + \operatorname{Im} f(b) \sin(\pi\nu b)] + \\ + i [\operatorname{Im} f(b) \cos(\pi\nu b) - \operatorname{Re} f(b) \sin(\pi\nu b)]. \quad (5)$$

Фактически, уравнение (4) представляет собой систему двух независимых уравнений — для действительной и мнимой частей $u(\tau, b)$. Следует также отметить, что такое соответствие возможно ввести именно благодаря амплитудной нормировке. В случае же квадратичной нормировки знаменатель, равный квадратному корню из масштаба, приводит к нулевому значению преобразования при нулевом масштабе, что не позволяет поставить задачу Коши.

Модуль вейвлет-преобразования определяется непосредственно через решение соответствующего дифференциального уравнения как

$$|w(a, b)| = |u| = \sqrt{(\operatorname{Re} u)^2 + (\operatorname{Im} u)^2},$$

а фаза —

$$\phi(a, b) = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Re} u \sin(\pi\nu b) + \operatorname{Im} u \cos(\pi\nu b)}{\operatorname{Re} u \cos(\pi\nu b) - \operatorname{Im} u \sin(\pi\nu b)}. \quad (6)$$

В качестве теста возьмем известную систему, в которой наблюдается хаотическая синхронизация — два связанных осциллятора Ресслера:

$$\dot{x}_{1,2} = -\omega_{1,2}y - z_{1,2} + \epsilon(x_{2,1} - x_{1,2}), \\ \dot{y}_{1,2} = -\omega_{1,2}x_{1,2} + a_0y_{1,2} - z_{1,2} + \epsilon(y_{2,1} - y_{1,2}), \quad (7) \\ \dot{z}_{1,2} = p + z_{1,2}(x_{1,2} - c),$$

при значении параметров $\omega_1 = 0.98$, $\omega_2 = 1.03$, $a_0 = 0.22$, $p = 0.1$, $c = 8.5$, $\epsilon = 0.05$. Как показано в работах [2, 3], в этих условиях текущая фаза является плохо определенной, но использование вейвлет-преобразования с вейвлетом Морле при $\omega_0 = 2\pi$ позволяет выявить хаотическую синхронизацию на масштабе $a = 5.25$.

В качестве анализируемых сигналов возьмем комплексные комбинации $f_{1,2}(t) = x_{1,2}(t) + \dot{x}_{1,2}$, которые используем в качестве начальных значений (5) для дифференциальных уравнений (4). По определению задачи Коши, вейвлет-фаза, соответствующая предельному значению $\omega_0 = 0$, получается подстановкой (5) в (6) и в данном случае равна

$$\phi|_{\omega_0=0} = \operatorname{arctg} \frac{\dot{x}}{x},$$

т. е. совпадает с «классическим» определением. Существенным является то, что в этом случае по определению дельта-функции Дирака носитель вейвлета имеет нулевую длину. При увеличении ω_0 локализация вейвлета во временном пространстве уменьшается (одновременно в силу принципа неопределенности увеличивается локализация в частотном/масштабном пространстве). Поэтому фаза вейвлет-преобразования с конечным ω_0 определяется уже на основе сглаживающего усреднения (гауссово ядро в формуле (3)) произведения гармонического и хаотического сигналов. Таким образом, базисная частота ω_0 и служит искомым параметром регуляризации, приводящим к возможности введения определенной фазы. Очевидно, представляет интерес нахождение минимального значения ω_0 , которое допускает существование такой фазы. Дальнейшее стремление к предельному случаю $\omega_0 \rightarrow \infty$ соответствует переходу вейвлет-преобразования с вейвлетом Морле к интегральному преобразованию Фурье, когда неопределенность во временной локализации становится бесконечной, а в частотной/масштабной — нулевой. В этом случае можно провести сравнение наличия в двух сигналах определенных масштабов (гармоник), но становится невозможным введение текущей фазы и текущего масштаба, и говорить о наличии временной синхронизации бессмысленно.

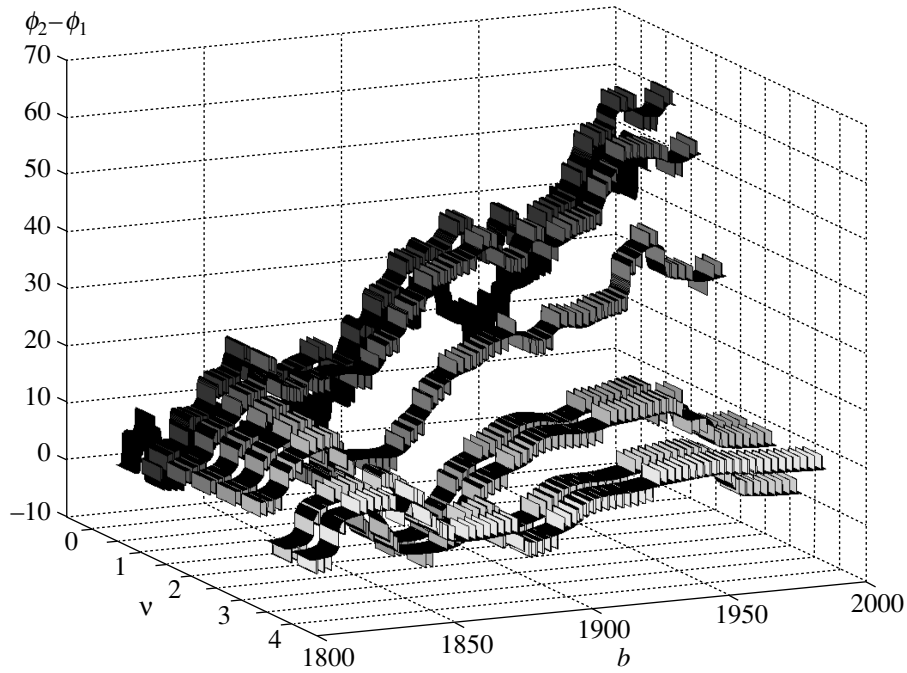


Рис. 1. Временная эволюция разности фаз, вычисленная при значениях базисной частоты $\omega_0 = 0.5\pi, \pi, 1.5\pi, 2\pi, 2.5\pi, 3\pi, 3.5\pi, 4\pi$

Рассмотрим пример такого перехода от «классической» (плохо определенной) фазы к вейвлетной (хорошо определенной) на примере связанных осцилляторов Ресслера, применяя описанный алгоритм для фиксированного значения обратного масштаба $\nu = 0.381$ (что соответствует $\omega_0 = 2\pi, a = 5.25$) и при переменном значении ω_0 . Результаты вычисления разности фаз, найденных описанным методом, показаны на рис. 1, 2.

Решение нелинейной системы (7) осуществлялось при помощи процедуры ode15s MATLAB, реализующий алгоритм решения жестких систем с адаптивным переменным шагом. Разность фаз вычислялась, начиная с момента времени $t = b = 1812$. На рис. 1 изображены графики эволюции фазы при различных частотах: от 0.5π до 4π с шагом 0.5π . Видно, что первая половина графиков говорит об отсутствии синхронизации — разность фаз все время существенно растет, в то время как для больших базисных частот при фиксированном приведенном масштабе эта разность ограничена. Для большей наглядности построим несколько сечений поверхности, изображенной на рис. 1, в нескольких временных точках. На рис. 2 построены зависимости разности фаз от базисной частоты для различных моментов времени, начиная с 1820 с шагом 40 (маркеры, от-

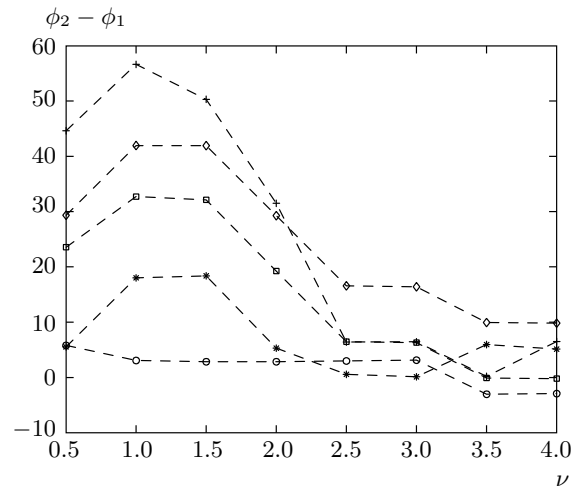


Рис. 2. Зависимости разности фаз, вычисленные при значениях базисной частоты $\omega_0 = \nu\pi = 0.5\pi, \pi, 1.5\pi, 2\pi, 2.5\pi, 3\pi, 3.5\pi, 4\pi$ в моменты времени $b = 1820$ (o), 1860 (□), 1900 (◇), 1940 (*), 1980 (+)

мечающие точки, относящиеся к одному моменту времени, соединены штриховыми линиями). Видно, что при $\omega_0 < 2.5\pi$ наблюдается монотонный рост разности фаз. В то же время при всех $\omega_0 \geq 2.5\pi$

разность фаз ограничена. Граница синхронизации лежит между 2π и 2.5π . Это может быть объяснено следующим образом. При малых величинах базисной частоты в вейвлете Морле на ширине гауссова окна укладывается малое число периодов гармонического колебания; практически, преобразование детектирует локализацию всплеска протяженностью в один период. При этом в силу хаотичности сигнала (даже в условиях синхронизации на определенном масштабе) точная локализация всплесков $x_{1,2}(t)$ испытывает флуктуации и, соответственно, разность фаз накапливается. При росте ω_0 временное разрешение вейвлета ухудшается, на его характерной ширине укладывается большее число периодов колебаний и флуктуации сдвига фаз между двумя сигналами за счет такого диффузионного усреднения сглаживаются, причем тем больше, чем шире окно. В результате детектируется синхронизация пространственных масштабов. Таким образом, метод дает возможность выделить минимальную ширину окна усреднения, при которой можно говорить о синхронизации хаотических сигналов, и количественно уточнить нижнюю границу применимости метода детектирования хаотической синхронизации путем введения вейвлетной фазы.

Кроме того, можно заметить, что описанный метод расчета путем решения системы дифференциальных уравнений имеет простую конечно-разностную численную реализацию, не требующую, в отличие от методов вычисления вейвлет-преобразования с использованием фильтров или быстрого преобразования Фурье, равноотстоящих узлов.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. Pikovsky, M. Rosenblum, and J. Kurths, *Synchronization: an Universal Concept in Nonlinear Sciences*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (2001).
2. А. Е. Храмов, А. А. Короновский, Письма в ЖЭТФ **79**, 391 (2004).
3. А. Е. Храмов and А. А. Koronovskii, *Physica D* **206**, 252 (2005).
4. P. S. Addison, J. N. Watson, and T. Feng, *J. Sound Vibr.* **254**, 733 (2002).
5. I. De Moortel, S. A. Munday, and A. W. Hood, *Solar Phys.* **222**, 203 (2004).