

ОПТИЧЕСКОЕ ПРАВИЛО СУММ В МЕТАЛЛАХ С СИЛЬНЫМ ЭЛЕКТРОН-ФОНОННЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

А. Е. Каракозов *

*Институт физики высоких давлений им. Л. Ф. Верещагина Российской академии наук
142190, Троицк, Московская обл., Россия*

Е. Г. Максимов **

*Физический институт им. П. Н. Лебедева Российской академии наук
119991, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 3 мая 2007 г.

Исследованы свойства сверхпроводника с сильным электрон-фононным и электрон-примесным взаимодействиями в однозонном приближении. Показано, что упругое рассеяние электронов на статических примесях уменьшает константу электрон-фононного взаимодействия в меру отношения скорости электрон-примесной релаксации к ширине затравочной зоны. Вычислен оптический спектральный вес (интеграл от действительной части оптической проводимости) для различных интервалов энергий в нормальном и сверхпроводящем состояниях металла в зависимости от температуры и величины сверхпроводящей щели. Показано, что в области энергий больших, по сравнению с фононными, зависимость спектрального веса от величины сверхпроводящей щели мала, а зависимость от температуры полностью определяется скоростью релаксации вследствие упругого электрон-фононного рассеяния вдали от поверхности Ферми. Показано, что различие спектрального веса в нормальном и сверхпроводящем состояниях при меньших энергиях объясняется так называемым хольстейновским сдвигом особенности оптической проводимости, а не величиной щели, как обычно полагают, и резко уменьшается при введении примесей.

PACS: 72.10.Bg, 74.25.Gz, 74.25.Kc, 74.72.-h

1. ВВЕДЕНИЕ

Спектральный вес действительной части оптической проводимости $\sigma_1(\omega)$ в различных интервалах энергий, в частности так называемое ограниченное оптическое правило сумм

$$W(\Omega_c, T) = \int_0^{\Omega_c} d\omega \sigma_1(\omega), \quad (1.1)$$

где Ω_c — энергия обрезания, изучается последние несколько лет экспериментально [1–7] и теоретически [8–14] в связи с проблемой высокотемпературной сверхпроводимости (ВТСП). Экспериментальные исследования ВТСП [1–7] и обычных металлов [7] показали, что температурная зависимость

$W(T, \Omega_c)$ нормального состояния может быть представлена во всех исследованных случаях [1–7] как

$$W(\Omega_c, T) \approx W - B(\Omega_c)T^2, \quad (1.2)$$

причем коэффициент $B(\Omega_c)$ в формуле (1.2) уменьшается с увеличением Ω_c , но остается конечным и при $\Omega_c \geq \omega_{pl}$, где ω_{pl} — плазменная частота электронов, определяемая условием $\varepsilon_1(\omega) = 0$, где $\varepsilon_1(\omega)$ — действительная часть диэлектрической функции. В сверхпроводящем же состоянии зависимость спектрального веса $W(\Omega_c, T)$ ВТСП от температуры существенно отклоняется от (1.2), причем относительно вида этих отклонений в экспериментальных данных [1–7] имеются некоторые расхождения. Спектральный вес $W(T, \Omega_c)$ в сверхпроводящем состоянии определяется как [15–17]

*E-mail: karakozov@mtu-net.ru

**E-mail: maksimov@lpi.ru

$$W(\Omega_c, T) = \int_0^{\Omega_c} d\omega \sigma_1^S(\omega) + \frac{c^2}{8\Lambda_L^2}, \quad (1.3)$$

где $\sigma_1^S(\omega)$ — действительная часть оптической проводимости в сверхпроводящем состоянии, Λ_L — лондоновская глубина проникновения. Последний член в формуле (1.3) представляет собой δ -функциональный вклад сверхпроводящего конденсата на нулевой частоте. Экспериментально установлено, что в обычных сверхпроводниках спектральный вес $W(\Omega_c, T)$ уже при довольно малых $\Omega_c \approx (4-6)\Delta$ удовлетворяет правилу сумм Феррела–Гловера–Тинкхэма (FGT)

$$\int_0^{\Omega_c} d\omega [\sigma_1^N(\omega) - \sigma_1^S(\omega)] \approx \frac{c^2}{8\Lambda_L^2}, \quad (1.4)$$

где Δ — сверхпроводящая щель, а $\sigma_1^{N,S}(\omega)$ — оптическая проводимость, соответственно в нормальном и сверхпроводящем состояниях [17], т. е. в этом случае для достаточно больших Ω_c спектральный вес (1.1) при переходе в сверхпроводящее состояние практически не меняется. Для ВТСП-систем этот вопрос остается неясным.

Основные особенности поведения спектрального веса $W(T, \Omega_c)$ легко понять, рассматривая модель однородного электронного газа, взаимодействующего с некоторыми промежуточными бозонами. Используя оптическое правило сумм [18] для спектрального веса $W(\Omega_c, T)$ в пределе $\Omega_c \rightarrow \infty$,

$$W = \int_0^{\infty} d\omega \sigma_1(\omega) = \frac{\pi}{2} \frac{ne^2}{m}, \quad (1.5)$$

где n — полная плотность электронов и m — масса свободного электрона, мы можем записать формулу (1.1) в виде

$$W(\Omega_c, T) = W - \int_{\Omega_c}^{\infty} d\omega \sigma_1(\omega). \quad (1.6)$$

Как следует из этого выражения, свойства ограниченного правила сумм зависят от поведения оптической проводимости при высоких энергиях, так как величина W , как это следует из формулы (1.5), не зависит от температуры, состояния вещества и его электронной структуры. Легко показать [12], что для $\omega \gg (2\Delta, \bar{\omega})$ ($\bar{\omega}$ — некоторая средняя частота бозона) проводимость $\sigma_1(\omega)$ может быть записана как

$$\sigma_1(\omega) = \sigma_1^N(\omega) \left(1 - \frac{\zeta \overline{\Delta^2}}{\omega^2}\right). \quad (1.7)$$

Это выражение может быть получено в рамках уравнений Элиашберга [19] как для изотропного, так и для анизотропного спаривания [20]. Здесь ζ — коэффициент порядка единицы, учитывающий усреднение по углам, и $\overline{\Delta^2}$ — некоторый средний по углам квадрат анизотропной щели. Проводимость нормального состояния $\sigma_1^N(\omega)$ при больших энергиях может быть записана в этой модели как [12]

$$\sigma_1^N(\omega) = \frac{\omega_{pl}^2}{4\pi} \frac{\Gamma(T)}{\omega^2 + \Gamma^2(T)}, \quad (1.8)$$

где $\Gamma(T)$ — скорость релаксации из-за взаимодействия электронов с бозонами при больших энергиях. Используя формулы (1.6)–(1.8), мы можем написать выражение для оптического веса в виде

$$W(\Omega_c, T) = \frac{\omega_{pl}^2}{8} \left[1 - \frac{2}{\pi} \frac{\Gamma(T)}{\Omega_c} \left(1 - \frac{2}{3\pi} \zeta \frac{\overline{\Delta^2}}{\Omega_c^2}\right)\right]. \quad (1.9)$$

Выражение (1.9) показывает, что правило сумм FGT удовлетворяется в отсутствие релаксации в системах близких к модели БКШ при любых Ω_c . Кроме того, как можно видеть, нет никакого прямого вклада в правило сумм FGT от сверхпроводящей щели. Как видно из формулы (1.9), этот вклад пропорционален малой величине Γ/Ω_c . Как было показано в нашей работе [12], скорость релаксации для обсуждаемой модели имеет квадратичную зависимость от температуры в интервале температур $100 \text{ K} \leq T \leq 300 \text{ K}$. Такая температурная зависимость спектрального веса хорошо описывает экспериментальные данные, полученные как для обычного металла Au, так и для высокотемпературных сверхпроводников.

В большинстве теоретических работ ограниченное оптическое правило сумм рассматривалось не в модели однородного электронного газа, а в модели изолированной зоны. Здесь мы должны упомянуть одно отличие этой модели от рассмотренной выше. Как было показано Ван дер Марелом [9, 10], спектральный вес (1.1) изолированной зоны может зависеть от температуры как в нормальном, так и в сверхпроводящем состояниях даже в отсутствие релаксации вследствие температурного размытия ферми-поверхности. В этом случае, например, для нормального состояния спектральный вес зоны проводимости кристалла единичного объема V равен

$$W(T) = \pi e^2 \sum_{\mathbf{p}} \frac{\partial^2 \xi_{\mathbf{p}}}{\partial \mathbf{p}^2} f_{\mathbf{p}}, \quad (1.10)$$

где $f_{\mathbf{p}}$ — функция распределения Ферми. (Здесь и далее мы полагаем $V = h = k_B = 1$). Температур-

ная зависимость (1.10) $W(T) \propto T^2$ прямо следует из зоммерфельдовского разложения

$$\int d\xi f(\xi - \mu)F(\xi) = \int_0^\mu d\xi F(\xi) + \frac{\pi^2}{6}T^2F'(\mu) + \dots \propto \left(\frac{T}{\xi}\right)^2, \quad (1.11)$$

где μ — химический потенциал, а $\bar{\xi}$ — характерная энергия электронной структуры (порядка ширины зоны $2W_b$ или фермиевской энергии ε_F). В ряде работ [8–11, 13, 14] спектральный вес зоны во взаимодействующей системе также связывается с выражением (1.10) при замене в нем $f_{\mathbf{p}}$ на точную функцию распределения. Возникающая в этом случае поправка от первого члена разложения (1.11), имеющая место даже в зоне свободных электронов с квадратичным законом дисперсии, оказывается порядка $\bar{\Sigma}(T)/\bar{\xi}$, где $\bar{\Sigma}(T)$ — средняя собственно-энергетическая часть, пропорциональная константе связи λ . Эта поправка может значительно превышать по величине второй член разложения (1.11) и существенно повлиять на вид температурной зависимости $W(T)$. По порядку величины эта оценка остается справедливой и при учете межзонных переходов, поэтому основная цель этой работы состоит в том, чтобы детально изучить ограниченное оптическое правило сумм для одной зоны блоховских электронов, сильно взаимодействующих с низкочастотными бозонами.

2. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЙ ОТКЛИК ОДНОЗОННОГО СВЕРХПРОВОДНИКА

Рассмотрим электромагнитный отклик сверхпроводника в случае, когда межзонные переходы можно считать малыми. Такая ситуация, как показал Хольстейн [21], возможна, когда зона проводимости s отделена от других зон s' прямой межзонной щелью $E_g = \min |\xi_{\mathbf{p}}^s - \xi_{\mathbf{p}}^{s'}|$, большей, чем рассматриваемая область энергий Ω_c и ширина зоны $2W_b$.

Запишем гамильтониан сверхпроводника [22, 23] в виде суммы внутризонной и межзонной H_{inter} частей:

$$H = \sum_{\mathbf{p}} \Psi_{\mathbf{p}}^\dagger \hat{\tau}_3 \xi(\mathbf{p}) \Psi_{\mathbf{p}} + \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{q}, \lambda} \Psi_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}^\dagger \hat{\tau}_3 g(\mathbf{q}, \lambda) \Psi_{\mathbf{p}} (b_{\mathbf{q}\lambda} + b_{-\mathbf{q}\lambda}^\dagger) + H_{inter}, \quad (2.1)$$

$$\Psi_{\mathbf{p}} = \begin{pmatrix} c_{\mathbf{p}s\uparrow} \\ c_{-\mathbf{p}s\downarrow}^\dagger \end{pmatrix}, \quad \Psi_{\mathbf{p}}^\dagger = \begin{pmatrix} c_{\mathbf{p}s\uparrow}^\dagger & c_{-\mathbf{p}s\downarrow} \end{pmatrix},$$

где $\Psi_{\mathbf{p}}, \Psi_{\mathbf{p}}^\dagger$ — полевые операторы Намбу, $c_{\mathbf{p}s}^\dagger, c_{\mathbf{p}s}$ — операторы рождения и уничтожения электронов, $\hat{\tau}_i$ — матрицы Паули, $g(\mathbf{q}, \lambda)$ — матричный элемент электрон-бозонного взаимодействия и $b_{\mathbf{q}\lambda}^\dagger, b_{\mathbf{q}\lambda}$ — операторы рождения и уничтожения бозонов. Оператор H_{inter} , содержащий все недиагональные по зонным индексам матричные элементы, будем считать малым. Гамильтониан сверхпроводника в присутствии однородного электромагнитного поля с потенциалом \mathbf{A} в технике Намбу [23] может быть получен формальной заменой

$$\xi(\mathbf{p}) \rightarrow \xi\left(\mathbf{p} - \hat{\tau}_3 \frac{e}{c} \mathbf{A}\right)$$

в операторе кинетической энергии H_{kin} (первый член в формуле (2.1)). Запишем оператор тока зоны проводимости в виде суммы парамагнитного и диамагнитного токов

$$j_\alpha^{(s)} = -c \frac{\delta H_{kin}}{\delta A_\alpha} = e \sum_{\mathbf{p}} \frac{\partial \xi(\mathbf{p})}{\partial p_\alpha} \Psi_{\mathbf{p}}^\dagger \Psi_{\mathbf{p}} - \frac{e^2}{c} \sum_{\mathbf{p}} \frac{\partial^2 \xi(\mathbf{p})}{\partial p_\alpha \partial p_\beta} \Psi_{\mathbf{p}}^\dagger \hat{\tau}_3 \Psi_{\mathbf{p}} A_\beta. \quad (2.2)$$

Проводя дальнейшие вычисления плотности тока $\langle j_\alpha^{(s)} \rangle$ в линейном по полю \mathbf{A} приближении обычным образом [21, 23, 24], получим для оптической проводимости одной зоны (в системе с кубической симметрией) выражение

$$\sigma_{\alpha\alpha}^{(s)}(\omega) = i \frac{K_{\alpha\alpha}^{(s)d} + \Pi_{\alpha\alpha}^{(s)}(\omega)}{\omega + i\delta} = \left[K_{\alpha\alpha}^{(s)d} + \Pi_{\alpha\alpha}^{(s)}(\omega) \right] \left[\pi\delta(\omega) + \frac{i}{\omega} \right], \quad (2.3)$$

в котором $\Pi_{\alpha\alpha}^{(s)}(\omega)$ — корреляционная функция парамагнитных токов (см. (2.2)) и $K_{\alpha\alpha}^{(s)d}$ — диамагнитный отклик,

$$K_{\alpha\alpha}^{(s)d} = 2e^2 \sum_{\mathbf{p}} \frac{\partial^2 \xi_{\mathbf{p}}}{\partial p_\alpha^2} n_{\mathbf{p}}, \quad (2.4)$$

где $n_{\mathbf{p}} = \langle \Psi_{\mathbf{p}}^\dagger \hat{\tau}_3 \Psi_{\mathbf{p}} \rangle$ — электронная функция распределения системы со взаимодействием. Поскольку в рассматриваемом нами случае, с точностью до малого межзонного вклада, проводимость $\sigma(\omega < E_g) \approx \sigma^{(s)}(\omega < E_g)$, ниже мы не будем указывать явно однозонный индекс, а также опустим для краткости несущественные координатные индексы.

Действительная часть оптической проводимости (2.3) имеет вид

$$\sigma_1(\omega) = \pi [K^d + \Pi(0)] \delta(\omega) - \frac{\text{Im } \Pi(\omega)}{\omega} \quad (2.5)$$

и оптическое правило сумм может быть записано как

$$\int_0^{\Omega_c} d\omega \sigma_1(\omega) = \frac{\pi}{2} [K^d + \Pi(0)] - \int_0^{\Omega_c} d\omega \frac{\text{Im } \Pi(\omega)}{\omega}. \quad (2.6)$$

В случае, когда верхний предел Ω_c находится в области межзонной щели $E_g > \Omega_c > 2W_b$, где $\text{Im } \Pi(\omega) \approx 0$, можно положить в (2.6) $\Omega_c \rightarrow \infty$. Учитывая, что корреляционная функция токов $\Pi(\omega)$ удовлетворяет соотношению Крамерса–Кронига

$$\Pi(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega' \omega' \frac{\text{Im } \Pi(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2 - i\delta},$$

вычислим парамагнитный вклад в формуле (2.6):

$$\int_0^{\Omega_c} d\omega \frac{\text{Im } \Pi(\omega)}{\omega} = \frac{\pi}{2} \Pi(0) \quad (2.7)$$

и получим выражение для спектрального веса зоны:

$$\begin{aligned} W(T) &= \int_0^{\Omega_c} d\omega \sigma_1(\omega) = \frac{\pi}{2} K^d = \\ &= e^2 \pi \sum_{\mathbf{p}} \frac{\partial^2 \xi_{\mathbf{p}}}{\partial \mathbf{p}^2} n_{\mathbf{p}}, \quad (2.8) \end{aligned}$$

справедливое как для нормального, так и для сверхпроводящего состояний. Следует отметить, что правило сумм (2.8) является очень чувствительным тестом правильности вычисления как функций Грина взаимодействующей системы, так и оптической проводимости.

В большинстве работ [9–11, 13, 14] для обсуждения зависимости ограниченного оптического правила сумм от температуры, сверхпроводящей щели и т. д. используется именно формула (2.8), хотя следует заметить, что экспериментальные данные и в обычном металле [7], и в ВТСП [1–7] показывают непрерывное увеличение спектрального веса при увеличении энергии обрезания Ω_c . Мы обсудим этот вопрос несколько позже (см. разд. 4).

Для исследования зависимости спектрального веса от температуры T и энергии обрезания Ω_c будем рассматривать модель сверхпроводника с изотропным электрон-фононным взаимодействием, предполагая для простоты наличие частично-дырочной

симметрии электронного спектра сверхпроводника и пренебрегая в расчетах вершинными поправками. Покажем, что в этом приближении сохраняются все свойства точной функции отклика, т. е. имеют место соотношения (2.7), (2.8), а также обращается в нуль диамагнитный отклик в нормальном состоянии

$$\Pi(0) \equiv -K^d. \quad (2.9)$$

В рассматриваемом приближении функция $\Pi(i\omega_n)$ имеет вид [24]

$$\begin{aligned} \Pi(i\omega_n) &= e^2 T \sum_{m, \mathbf{p}} \left(\frac{\partial \xi_{\mathbf{p}}}{\partial \mathbf{p}} \right)^2 \times \\ &\times \text{Sp} \left\{ \hat{G}(\mathbf{p}, i\omega_m + i\omega_n) \hat{G}(\mathbf{p}, i\omega_m) \right\}, \quad (2.10) \end{aligned}$$

где $\omega_m = \pi T(2m + 1)$ и $\hat{G}(\mathbf{p}, i\omega_n)$ — электронная функция Грина в представлении Намбу:

$$\begin{aligned} \hat{G}(\mathbf{p}, i\omega_n) &= \\ &= -\frac{i\omega_n Z_{\mathbf{p}}(i\omega_n) \hat{\tau}_0 + \Phi_{\mathbf{p}}(i\omega_n) \hat{\tau}_1 + \xi_{\mathbf{p}} \hat{\tau}_3}{\omega_n^2 Z_{\mathbf{p}}^2(i\omega_n) + \Phi_{\mathbf{p}}^2(i\omega_n) + \xi_{\mathbf{p}}^2}. \quad (2.11) \end{aligned}$$

Входящие в формулу (2.11) компоненты матрицы электронной собственно-энергетической части

$$\hat{\Sigma}_{\mathbf{p}}(i\omega_n) = i\omega_n [1 - Z_{\mathbf{p}}(i\omega_n)] \hat{\tau}_0 + \Phi_{\mathbf{p}}(i\omega_n) \hat{\tau}_1 \quad (2.12)$$

функции $Z_{\mathbf{p}}(i\omega_m)$, $\Phi_{\mathbf{p}}(i\omega_n)$ являются решениями уравнений Элиашберга. Электронная функция распределения в формуле (2.4) в технике Намбу определяется как [22, 25]

$$\langle \Psi_{\mathbf{p}}^\dagger \hat{\tau}_3 \Psi_{\mathbf{p}} \rangle \rightarrow 2T \lim_{\tau \rightarrow 0} \sum_m G_{11}(\mathbf{p}, i\omega_m) e^{-i\omega_m \tau}. \quad (2.13)$$

С помощью формул (2.10) и (2.11) путем прямого вычисления можно убедиться, что в случае электрон-дырочной симметрии спектра

$$\begin{aligned} \Pi(0) &= 2e^2 T \sum_{m, \mathbf{p}} \left(\frac{\partial \xi_{\mathbf{p}}}{\partial \mathbf{p}} \right)^2 \times \\ &\times \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi_{\mathbf{p}}} G_{11}(\mathbf{p}, i\omega_m) + 2G_{12}^2(\mathbf{p}, i\omega_m) \right\}, \quad (2.14) \end{aligned}$$

откуда в результате интегрирования по частям первого члена в правой части формулы (2.14) находим

$$\begin{aligned} \Pi(0) &= -2e^2 \sum_{\mathbf{p}} \frac{\partial^2 \xi_{\mathbf{p}}}{\partial \mathbf{p}^2} n_{\mathbf{p}} + \\ &+ 2e^2 T \sum_{m, \mathbf{p}} \left(\frac{\partial \xi_{\mathbf{p}}}{\partial \mathbf{p}} \right)^2 2G_{12}^2(\mathbf{p}, i\omega_m). \quad (2.15) \end{aligned}$$

Первый член в формуле (2.15) в точности равен диамагнитному члену с обратным знаком, второй член в формулах (2.14), (2.15) пропорционален лондоновской глубине проникновения магнитного поля в сверхпроводник согласно определению

$$\Lambda_L^{-2} = \frac{4\pi}{c^2} [K^d + \Pi(0)]. \quad (2.16)$$

Сравнивая формулы (2.15) и (2.4), видим, что в рассматриваемом нами приближении тождество (2.9) для нормального состояния действительно удовлетворяется точно.

Для нахождения спектрального веса зоны найдем аналитическое продолжение $\Pi(i\omega_n)$ на действительную ось ω с помощью дисперсионного соотношения

$$\hat{G}(\mathbf{p}, i\omega_n) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{\text{Im} \hat{G}(\mathbf{p}, z)}{i\omega_n - z} \quad (2.17)$$

и известного правила суммирования

$$2T \sum_m (i\omega_m - z)^{-1} = -\text{th} \frac{z}{2T}. \quad (2.18)$$

В результате получим

$$\begin{aligned} \Pi(\omega) = e^2 \sum_{\mathbf{p}} \left(\frac{\partial \xi_{\mathbf{p}}}{\partial \mathbf{p}} \right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{2\pi} \text{th} \frac{z}{2T} \times \\ \times \text{Sp} \left\{ \hat{G}^*(\mathbf{p}, z - \omega) \text{Im} \hat{G}(\mathbf{p}, z) + \hat{G}(\mathbf{p}, z + \omega) \times \right. \\ \left. \times \text{Im} \hat{G}(\mathbf{p}, z) \right\}. \quad (2.19) \end{aligned}$$

Используем это выражение и следующее из него соотношение симметрии

$$\Pi(-\omega) = \Pi^*(\omega), \quad (2.20)$$

а также спектральное представление (2.17) с заменой $i\omega_n \rightarrow \omega + i\delta$ для вычисления интеграла в правой части (2.6):

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} d\omega \frac{\text{Im} \Pi(\omega)}{\omega} = e^2 \sum_{\mathbf{p}} \left(\frac{\partial \xi_{\mathbf{p}}}{\partial \mathbf{p}} \right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{2\pi} \times \\ \times \text{th} \frac{z}{2T} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{\omega} \text{Sp} \left\{ \text{Im} \hat{G}(\mathbf{p}, z + \omega) \text{Im} \hat{G}(\mathbf{p}, z) \right\} = \\ = \frac{\pi}{2} e^2 \sum_{\mathbf{p}} \left(\frac{\partial \xi_{\mathbf{p}}}{\partial \mathbf{p}} \right)^2 \text{Sp} \int_{-\infty}^{\infty} dz \text{th} \frac{z}{2T} \text{Im} \hat{G}^2(\mathbf{p}, z) = \\ = \frac{\pi}{2} \Pi(0). \quad (2.21) \end{aligned}$$

Таким образом, в нашем приближении также имеют место соотношения (2.7) и (2.8).

В заключение этого раздела остановимся несколько подробнее на упомянутой во введении зависимости спектрального веса от температуры зоммерфельдовского типа. Как было указано в работах [10, 11], спектральный вес (2.8) может зависеть от температуры в нормальном и в сверхпроводящем состояниях даже в отсутствие релаксации. Примером такой системы является классический БКШ-сверхпроводник. В этом случае выражение (2.8) для спектрального веса $W(T)$ записывается как

$$W(T) = \pi e^2 \sum_{\mathbf{p}} \frac{\partial^2 \xi_{\mathbf{p}}}{\partial \mathbf{p}^2} f_{\mathbf{p}}, \quad (2.22)$$

где $f_{\mathbf{p}}$ — функция распределения Ферми для нормального состояния и

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{p}} = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega f(\omega) \text{Im} G_{11}^{BCS}(\mathbf{p}, \omega) = \\ = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\xi_{\mathbf{p}} - \mu}{E_{\mathbf{p}}} \text{th} \frac{E_{\mathbf{p}}}{2T} \right) \quad (2.23) \end{aligned}$$

для сверхпроводящего состояния [22] (см. также (1.5)). В формуле (2.23) $G_{11}^{BCS}(\omega)$ — элемент матрицы аналитического продолжения электронной функции Грина (2.11) в приближении БКШ и $E_{\mathbf{p}} = \sqrt{(\xi_{\mathbf{p}} - \mu)^2 + \Delta^2}$ — закон дисперсии квазичастиц БКШ. Температурная зависимость $W(T)$ в нормальном состоянии является следствием температурного размытия распределения Ферми и, согласно формуле (1.11), имеет вид

$$W(T) = W(0) \left(1 - \frac{BT^2}{W_b^2} \right), \quad (2.24)$$

где B — некоторый численный коэффициент. Этот результат напоминает экспериментально наблюдаемые температурные зависимости $W(\Omega_c, T)$. Однако, как это было подчеркнуто в работах [8, 14], есть только формальная аналогия между экспериментальными данными и результатом, полученным в приближении БКШ. Измеренная величина коэффициента B , характеризующего температурную зависимость $W(T)$, по крайней мере, на один порядок больше ожидаемой из формулы (2.24). Этот результат был получен в работах [8, 14], использующих для оценок величину ширины зоны $2W_b$, полученную из ARPES-измерений поверхности Ферми в ВТСП-купратах. Этот подход, с нашей точки зрения [26], ведет к недооценке величины $2W_b$. Это

означает, что реальное различие между экспериментальными данными и $W(T)$ в модели БКШ для одной зоны (2.24) могло бы быть еще больше. Зависимость $W(T)$ в сверхпроводящем состоянии связана также и с дополнительным размытием функции распределения (2.23) из-за открывшейся сверхпроводящей щели Δ , вследствие чего $W(T)$ в сверхпроводящем состоянии уменьшается при понижении температуры. Абсолютная величина этого уменьшения мала как отношение $(\Delta/W_b)^2$. Мы покажем ниже, что эффекты, имеющие место из-за температурного изменения скорости релаксации, могут быть много большими, чем упомянутые выше даже при $T < T_c$.

3. ЭЛЕКТРОН-ФОНОННОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ В ОДНОЗОННОМ СВЕРХПРОВОДНИКЕ

В однозонной модели с частично-дырочной симметрией электронного спектра уравнения Элиашберга для собственно-энергетической части (2.12) электронной функции Грина (2.11) на мнимой оси имеют вид [25]

$$\hat{\Sigma}(i\omega_n) = \pi T \sum_{m, \mathbf{p}} \left[\lambda(i\omega_n - i\omega_m) + \delta_{nm} \frac{\gamma_{imp}}{\pi T} \right] \times \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{N_b(0)} \delta(\xi - \xi_{\mathbf{p}}) \hat{\tau}_3 \hat{G}(\xi_{\mathbf{p}}, i\omega_m) \hat{\tau}_3 \right\}, \quad (3.1)$$

$$\lambda(i\omega_n) = \int_0^{\infty} d\Omega \frac{2\Omega \alpha^2(\Omega) F(\Omega)}{\Omega^2 - (i\omega_n)^2},$$

$$N_b(\xi) = \sum_{\mathbf{p}} \delta(\xi - \xi_{\mathbf{p}}),$$

где $\alpha^2(\omega)F(\omega)$ — функция Элиашберга, $N_b(\xi)$ — зонная плотность состояний, γ_{imp} — скорость релаксации электронов из-за рассеяния на статических примесях. (Для краткости мы не рассматриваем здесь кулоновскую часть взаимодействия.)

Обычно зависимостью электронной плотности состояний от энергии пренебрегают, полагая $N_b(\xi) \approx N_b(\mu)$, и вычисляют интеграл в формуле (3.1) в полюсном приближении. В последнем случае функция перенормировки $Z(\omega)$ нормального состояния записывается (с точностью $\bar{\Sigma}(T)/\bar{\xi}$, где $\bar{\xi} \sim \varepsilon_F, W_b$) как

$$\omega [Z(\omega) - 1] = \int_{-\infty}^{\infty} dz \left\{ \text{th} \frac{z}{2T} \text{Re} \Lambda(\omega - z) + i \left[\text{cth} \frac{\omega - z}{2T} + \text{th} \frac{z}{2T} \right] \text{Im} \Lambda(\omega - z) \right\} + i\gamma_{imp}, \quad (3.2)$$

$$\Lambda(\omega) = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega \frac{\alpha^2(\Omega) F(\Omega)}{\omega + i\delta - \Omega}. \quad (3.3)$$

В непосредственной окрестности поверхности Ферми, $\omega \leq \Omega_{ph}$, при низких по сравнению с фоновой энергией Ω_{ph} температурах

$$\omega Z(\omega) \approx \omega(1 + \lambda) + i\lambda T^3 / \Omega_{ph}^2 + i\gamma_{imp} \approx \omega(1 + \lambda) + i\gamma_{imp}. \quad (3.4)$$

Таким образом, вблизи поверхности Ферми имеет место увеличение эффективной массы m^* по отношению к зонной массе m_b ,

$$m^* = m_b(1 + \lambda), \quad (3.5)$$

и, соответственно, плотности состояний на поверхности Ферми, $N_b(\mu)(1 + \lambda)$, и электронной теплоемкости, $c_e = (\pi^2/3)TN_b(\mu)(1 + \lambda)$. Вдали же от поверхности Ферми (и для всех энергий ω при высоких, $(\Omega_{ph}/2\pi T)^2 \ll 1$, температурах)

$$\omega Z(\omega) \approx \omega + i\pi \int_0^{\infty} dz \text{cth} \frac{z}{2T} \alpha^2(z) F(z) + i\gamma_{imp} \quad (3.6)$$

и зонная масса m_b не перенормируется.

Электронная функция Грина, входящая в уравнения (3.1), в однозонной модели вычисляется самоогласованно. Самоогласованные уравнения Элиашберга при высоких, $(\Omega_{ph}/2\pi T)^2 \ll 1$, температурах могут быть решены точно. В этом случае электрон-фононное взаимодействие $\lambda(i\omega_n - i\omega_m) \sim \delta_{nm}$, как и упругое примесное рассеяние. Аналитическое продолжение уравнений (3.1) при высоких температурах (для нормального состояния) имеет вид

$$\Sigma(\omega) = -\frac{\Gamma(T)}{N_b(0)} \left\{ -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \frac{N_b(\xi)}{\omega - \Sigma(\omega) - \xi} \right\}, \quad (3.7)$$

где $\omega = \omega + i\delta$, $\Gamma(T) = \lambda\pi T + \gamma_{imp}$. Уравнение (3.7) может быть легко решено с помощью универсальной модели электронной плотности состояний на спин [27, 28]:

$$N_b(\xi) = \frac{2}{\pi W_b} \sqrt{1 - \left(\frac{\xi}{W_b} \right)^2}. \quad (3.8)$$

С этой целью определим комплексные функции $g(z)$ и $n(z)$:

$$g(z) = -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 d\eta \frac{\sqrt{1-\eta^2}}{z-\eta} = \text{sign}(\text{Re } z) \sqrt{z^2-1} - z \equiv n(z) - z \quad (3.9)$$

и запишем согласно формулам (3.7) и (3.9) уравнение для нормированной на полуширину затравочной зоны W_b функции $[\omega - \Sigma(\omega)]/W_b \equiv \omega_b Z(\omega)$ в виде

$$\omega_b Z(\omega) = \omega_b + \beta g(\omega_b Z(\omega)), \quad (3.10)$$

где безразмерные переменная ω_b и параметр β равны

$$\omega_b = \frac{\omega}{W_b}, \quad \beta = \frac{\Gamma(T)}{W_b}. \quad (3.11)$$

Самосоглашенное решение алгебраического уравнения (3.10) имеет вид

$$\omega_b Z(\omega) = \alpha \omega_\beta + \gamma n(\omega_\beta), \quad (3.12)$$

где введены параметры α, γ и переменная ω_β :

$$\alpha = \frac{1+\beta}{\sqrt{1+2\beta}}, \quad \gamma = \frac{\beta}{\sqrt{1+2\beta}}, \quad (3.13)$$

$$\omega_\beta = \frac{\omega}{W_\beta}, \quad W_\beta = W_b \sqrt{1+2\beta}.$$

Средняя электронная функция Грина (интеграл в правой части формулы (3.7)) оказывается равной

$$N_b(0)g(\omega_b Z(\omega)) = \frac{2}{\pi W_b} (\gamma - \alpha) [\omega_\beta - n(\omega_\beta)] = \frac{2}{\pi W_\beta} g(\omega_\beta). \quad (3.14)$$

Перепишем формулу (3.12) для функции перенормировки в более наглядном виде:

$$\omega Z(\omega) = \left(1 - \frac{\beta}{1+2\beta}\right) \times \times \omega + \frac{\beta}{1+2\beta} \sqrt{\omega^2 - W_b^2(1+2\beta)}. \quad (3.15)$$

Из выражений (3.14), (3.15) следует, во-первых, что эффективная масса из-за упругого рассеяния уменьшается (при малых β как $m_{el}^*/m_b \approx -\beta$) и, во-вторых, что параметр W_β (3.13) является перенормированной полушириной зоны. Заметим при этом, что средняя функция Грина (3.14) в системе со взаимодействием оказывается равной средней функции Грина $N_\beta(0)g(\omega_\beta)$ в системе невзаимодействующих электронов с полушириной зоны W_β .

Эти результаты являются следствием самосоглашенного учета уширения электронных уровней в системе со взаимодействием из-за конечного времени жизни $\tau(T) = \Gamma^{-1}(T)$. Соответствующее увеличение ширины зоны $W_\beta \approx W_b + \Gamma(T)$ приводит к уменьшению эффективной массы и электронной плотности состояний как

$$m_{el}^* \sim \frac{W_b}{W_b + \Gamma(T)} m_b \approx m_b \left(1 - \frac{\Gamma(T)}{W_b}\right), \quad (3.16)$$

$$N_\beta(\xi) = \frac{2}{\pi W_\beta} \sqrt{1 - \left(\frac{\xi}{W_\beta}\right)^2}.$$

Такого рода поправки порядка $\Gamma(T)/W_b$, определяемые свойствами только бозонной подсистемы и не учитываемые в обычном подходе, могут существенно повлиять на величину и вид температурной зависимости, например, электронной теплоемкости уже при относительно невысоких температурах (см. разд. 4).

Возвращаясь к уравнениям Элиашберга для сверхпроводящего состояния, запишем с помощью (2.17) и формул суммирования аналитическое продолжение (3.1) для матрицы $\omega \hat{\tau}_0 - \hat{\Sigma}(\omega) = \omega Z(\omega) \hat{\tau}_0 - \Phi(\omega) \hat{\tau}_1$ в виде

$$\omega Z(\omega) \hat{\tau}_0 - \Phi(\omega) \hat{\tau}_1 = \omega \hat{\tau}_0 + \int_{-\infty}^{\infty} dz \left\{ \text{th} \frac{z}{2T} \Lambda(\omega - z) \text{Im} \hat{g}(z) + \text{cth} \frac{\omega - z}{2T} \hat{g}(z) \text{Im} \Lambda(\omega - z) \right\} + \gamma_{imp} \hat{g}(\omega), \quad (3.17)$$

где $\omega = \omega + i\delta$, взаимодействие $\Lambda(\omega)$ определяется формулой (3.3)

$$\hat{g}(\omega) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \frac{N_b(\xi)}{N_b(\mu)} \hat{\tau}_3 \hat{G}(\xi, \omega) \hat{\tau}_3 = [g_0(\omega) \hat{\tau}_0 - g_1(\omega) \hat{\tau}_1] g(\varepsilon_b(\omega)), \quad (3.18)$$

$$g_0(\omega) = \omega Z(\omega)/\varepsilon(\omega), \quad g_1(\omega) = \Phi(\omega)/\varepsilon(\omega), \quad (3.19)$$

$$\varepsilon(\omega) = \sqrt{\omega^2 Z^2(\omega) - |\Phi^2(\omega)|}, \quad (3.20)$$

$$\varepsilon_b(\omega) = \varepsilon(\omega)/W_b.$$

Решения уравнений (3.17) имеют обычные свойства симметрии

$$Z(-\omega) = Z^*(\omega), \quad \Phi(-\omega) = \Phi^*(\omega), \quad (3.21)$$

$$\varepsilon(-\omega) = \varepsilon^*(\omega).$$

Функция Грина $\hat{g}(\omega)$ (3.18) представляется в виде произведения сингулярной в области энергий $\omega \sim \Delta$ сверхпроводящей матричной части и регулярной зонной части $g(\varepsilon_b(\omega))$. Вследствие этого непосредственный анализ уравнений (3.17) в случае конечного примесного рассеяния довольно затруднителен из-за сингулярного поведения примесной матрицы в правой части (3.17). Чтобы устранить эту сингулярность, будем искать решение в виде

$$\begin{aligned} \omega Z(\omega)\hat{\tau}_0 - \Phi(\omega)\hat{\tau}_1 &= \\ &= (\omega Z_{ph}(\omega)\hat{\tau}_0 - \Phi_{ph}(\omega)\hat{\tau}_1)\chi(\omega). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Преобразование (3.22) не изменяет щель $\Delta(\omega) = \Phi(\omega)/Z(\omega) = \Phi_{ph}(\omega)/Z_{ph}(\omega)$ и, вследствие этого, не изменяет вида сверхпроводящей матричной части $g_{0,1}(\omega)$ в выражении (3.18). Зонная же часть функции Грина преобразуется как $g(\varepsilon_b(\omega)) = g(\chi(\omega)\varepsilon_{ph,b}(\omega))$, где

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ph}(\omega) &= \sqrt{\omega^2 Z_{ph}^2(\omega) - \Phi_{ph}^2(\omega)}, \\ \varepsilon_{ph,b}(\omega) &= \varepsilon_{ph}(\omega)/W_b. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Определим функцию $\chi(\omega)$ условием

$$\chi(\omega) - \beta g(\chi(\omega)\varepsilon_{ph,b}(\omega)) / \varepsilon_{ph,b}(\omega) = 1, \quad (3.24)$$

где $\beta = \gamma_{imp}/W_b$, позволяющим устранить явную зависимость уравнений (3.17) от сингулярных примесных членов. Уравнения, определяющие матрицу $\omega Z_{ph}(\omega)\hat{\tau}_0 - \Phi_{ph}(\omega)\hat{\tau}_1$, теперь можно записать как

$$\begin{aligned} \omega [Z_{ph}(\omega) - 1]\hat{\tau}_0 - \Phi_{ph}(\omega)\hat{\tau}_1 &= \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dz \left\{ \text{th} \frac{z}{2T} \Lambda(\omega - z) \text{Im} \hat{g}_{ph}(z) + \right. \\ &\quad \left. + \text{cth} \frac{\omega - z}{2T} \hat{g}_{ph}(z) \text{Im} \Lambda(\omega - z) \right\}, \end{aligned} \quad (3.25)$$

где

$$\hat{g}_{ph}(\omega) = [g_0(\omega)\hat{\tau}_0 - g_1(\omega)\hat{\tau}_1]g(\chi(\omega)\varepsilon_{ph,b}(\omega)). \quad (3.26)$$

Явный вид функций $\varepsilon_b(\omega)$ и $g(\varepsilon_b(\omega))$ найдем из уравнения самосогласования (3.24), имеющего в точности такой же функциональный вид, как и уравнение (3.10),

$$\begin{aligned} \varepsilon_b(\omega) &= \chi(\omega)\varepsilon_{ph,b}(\omega) = \\ &= \alpha\varepsilon_{ph,\beta}(\omega) + \gamma n(\varepsilon_{ph,\beta}(\omega)), \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned} g(\chi(\omega)\varepsilon_{ph,b}(\omega)) &= \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+2\beta}} [n(\varepsilon_{ph,\beta}(\omega)) - \varepsilon_{ph,\beta}(\omega)] \end{aligned} \quad (3.28)$$

в полной аналогии с формулами (3.12)–(3.14). Таким образом, уравнения Элиашберга для сверхпроводника со статическими примесями формально совпадают с уравнениями для чистого сверхпроводника с меньшей, чем затравочная, константой связи $\lambda(\beta) = \lambda/\sqrt{1+2\beta}$ и большей затравочной полушириной зоны W_β (т. е. с меньшей плотностью состояний), вследствие чего щель и критическая температура грязного сверхпроводника уменьшаются. (Для точной оценки влияния примесей необходимо учитывать также и динамическую часть взаимодействия Λ_{imp} , что может, в принципе, и увеличить ЭФВ.)

В пределе очень широкой зоны $g(\varepsilon_b(\omega)) \approx i \text{sign} \omega$ уравнения (3.25) переходят в обычные уравнения Элиашберга для однородного электрон-фононного газа. В этом пределе решения уравнений (3.25) $\omega Z_{ph}(\omega)\hat{\tau}_0 - \Phi_{ph}(\omega)\hat{\tau}_1$ очевидно не зависят от рассеяния на примесях, а функция $\varepsilon(\omega)$ (3.27), явно входящая в выражение для оптической проводимости, имеет аддитивный вид,

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_{ph}(\omega) + i\gamma_{imp} \text{sign} \omega, \quad (3.29)$$

что полностью соответствует хорошо известному результату [24, 29].

Рассмотрим асимптотические свойства решений уравнений (3.25), предполагая, что $\Delta \leq \Omega_{ph}$. В этом случае в интеграле, зависящем от $\hat{\tau}_1 \text{Re} \Lambda$, как и в уравнении БКШ существенны только $z \leq \Omega_{ph}$. В асимптотической области энергий $\omega \gg \Delta; \Omega_{ph}$ этот интеграл и сверхпроводящая щель $\Delta(\omega)$ малы как $\lambda(\Omega_{ph}/\omega)^2$. В той же степени мал и интеграл, зависящий от $\hat{\tau}_0 \text{Re} \Lambda$. С этой точностью мы можем записать (3.25) как

$$\begin{aligned} \omega [Z_{ph}(\omega) - 1]\hat{\tau}_0 &\approx \hat{\tau}_0 \frac{\pi}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dz \alpha^2(z) F(z) \times \\ &\times \left\{ i \text{Im} g(\omega - z) \text{th} \frac{\omega - z}{2T} + \right. \\ &\quad \left. + g(\omega - z) \text{cth} \frac{z}{2T} \right\}, \end{aligned} \quad (3.30)$$

где в соответствии с формулой (3.28)

$$g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1+2\beta}} [n(\omega_\beta Z_{ph}(\pi)) - \omega_\beta Z_{ph}(\omega)]. \quad (3.31)$$

Для не слишком узких ($\Omega_{ph}/W_b \ll 1$) зон функция Грина $g(\omega - z)$ (3.31) слабо зависит от энергии по сравнению с $\alpha^2(z)F(z)$, поэтому в ней можно положить $z = 0$ и с точностью около $\lambda(\Omega_{ph}/W_b)^2$ вынести из-под интеграла. Таким образом, уравнение (3.25)

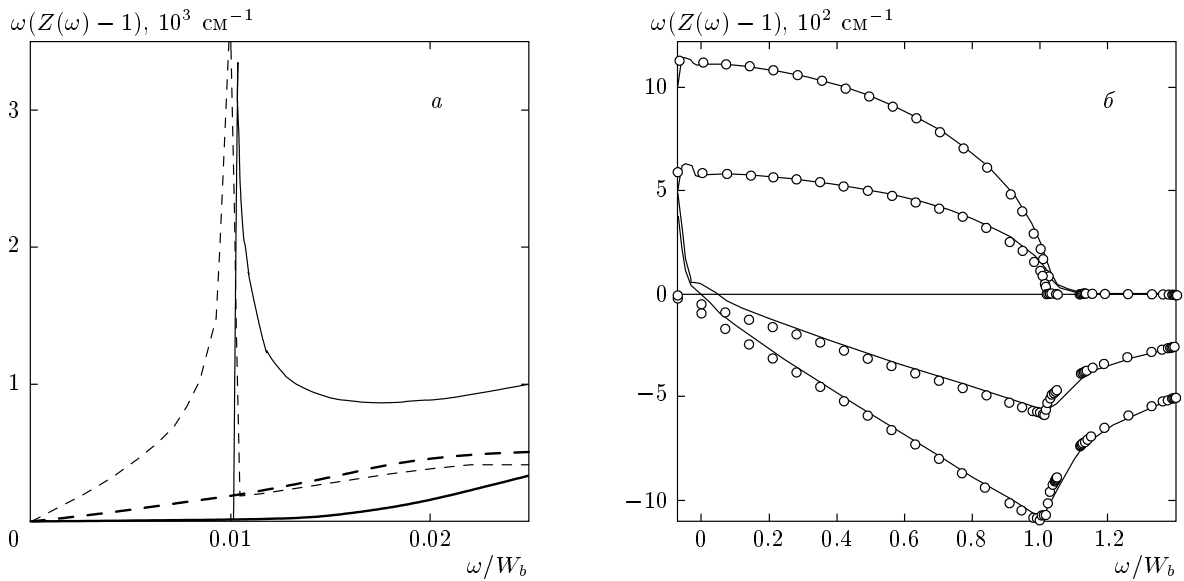


Рис. 1. а) Вид нормальных компонент решений уравнений (3.25) и (3.17) для энергий в области сверхпроводящей щели, $\omega/W_b \leq 0.025$ (см. текст). б) Вид нормальных компонент решений уравнений (3.25) и (3.17) в обозначениях рис. 1а для больших энергий $\omega/W_b \geq 0.025$ и их асимптотические аппроксимации (3.33) и (3.34) (светлые кружки)

в рассматриваемой области энергий фактически совпадает с уравнением (3.7), в котором скорость релаксации представляется величиной

$$\Gamma(T) = \frac{\Gamma_{ph}(T)}{1 + 2\beta}, \quad (3.32)$$

$$\Gamma_{ph}(T) = \pi \int_0^\infty dz \operatorname{cth} \frac{z}{2T} \alpha^2(z) F(z),$$

а затравочная полуширина зоны — величиной W_β . Решение этого уравнения (см. (3.15))

$$\omega Z_{ph}(\omega) = \omega - \frac{\beta_{ph}}{1 + 2(\beta_{ph} + \beta)} \times \left[\omega - \sqrt{\omega^2 - W_b^2 (1 + 2(\beta_{ph} + \beta))} \right], \quad (3.33)$$

где $\beta_{ph} = \Gamma_{ph}(T)/W_b$. Полное решение $\omega Z(\omega) = \omega \chi(\omega) Z_{ph}(\omega)$, найденное из формул (3.27), (3.33),

$$\omega Z(\omega) = \omega - \frac{\beta_{ph} + \beta}{1 + 2(\beta_{ph} + \beta)} \times \left[\omega - \sqrt{\omega^2 - W_b^2 (1 + 2(\beta_{ph} + \beta))} \right], \quad (3.34)$$

совпадает с решением (3.15) с заменой $\lambda\pi T$ на скорость релаксации $\Gamma_{ph}(T)$, стремящуюся к $\lambda\pi T$ при $(\Omega_{ph}/2\pi T)^2 \ll 1$. Таким образом, в области энергий

$\omega \gg \Delta$; Ω_{ph} электрон-фононное взаимодействие при любых температурах сводится к упругому рассеянию со скоростью релаксации

$$\Gamma(T) = \pi \int_0^\infty dz \operatorname{cth} \frac{z}{2T} \alpha^2(z) F(z) + \gamma_{imp}, \quad (3.35)$$

которое перенормирует зонную массу m_b так же, как и (3.15).

В заключение этого раздела приведем для иллюстрации вид нормальных компонент решений уравнений (3.25) и (3.17) для спектральной функции $\alpha^2(\omega)F(\omega)$ из работы [12] с константой связи $\lambda \approx 2$, средней фононной энергией $\langle \Omega_{ph} \rangle \approx 300$ К, где

$$\langle \Omega_{ph} \rangle^2 = 2 \int_0^\infty d\omega \omega \alpha^2(\omega) F(\omega) / \lambda, \quad (3.36)$$

и статического электрон-примесного рассеяния со скоростью релаксации $\gamma_{imp} = 600 \text{ см}^{-1}$ ($W_b = 10^4 \text{ см}^{-1}$) в сверхпроводящем состоянии ($T = 10 \text{ К}$). На рис. 1 показаны функция $\omega [Z_{ph}(\omega) - 1]$ и полное решение $\omega [Z(\omega) - 1]$, содержащее сингулярный примесный вклад:

$$\omega Z(\omega) = \omega \chi(\omega) Z_{ph}(\omega) = g_0(\omega) [\alpha \varepsilon_{ph}(\omega) + \gamma_n(\varepsilon_{ph}(\omega))] \quad (3.37)$$

при малых (в области сверхпроводящей щели, $\omega/W_b \leq 0.025$) (рис. 1а) и больших (рис. 1б) энергиях ($\omega/W_b \geq 0.025$). На обоих рисунках жирными

линиями показаны действительная часть функции $\omega[Z_{ph}(\omega) - 1]$ (штрихи) и ее мнимая часть (сплошная линия). Тонкими линиями показаны соответствующие кривые для полного решения $\omega[Z(\omega) - 1]$. Точками на рис. 1б показаны их асимптотические аппроксимации (3.33) и (3.34). Результаты, аналогичные приведенным на рис. 1б, были получены нами ранее [30] для нормального состояния и показывают, что приближенное решение, определяемое формулами (3.33) и (3.34), с очень хорошей точностью совпадает с полным численным решением уравнений Элиашберга при высоких энергиях в сверхпроводящем и нормальном состояниях.

4. ОПТИЧЕСКИЕ ПРАВИЛА СУММ

Спектральный вес зоны (2.8), (1.5) может быть записан как

$$W(T) = \pi e^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\omega f(\omega) \left\{ -\frac{1}{\pi} \text{Im} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi G_{11}(\xi, \omega) \right\} \times \frac{\partial}{\partial \xi} \sum_{\mathbf{p}} \left(\frac{\partial \xi_{\mathbf{p}}}{\partial p_x} \right)^2 \delta(\xi_{\mathbf{p}} - \xi). \quad (4.1)$$

Выберем функцию распределения скоростей в зоне в виде

$$\sum_{\mathbf{p}} \left(\frac{\partial \xi_{\mathbf{p}}}{\partial p_x} \right)^2 \delta(\xi_{\mathbf{p}} - \xi) = \langle v_s^2(\xi) \rangle N_b(\xi) = \frac{v_m^2}{3} N_b(0) \left[1 - \left(\frac{\xi}{W_b} \right)^2 \right]^{3/2}, \quad (4.2)$$

где v_m — максимальная электронная скорость. Распределение (4.2), так же, как и $N_b(\xi)$ (3.8), предполагает частично-дырочную симметрию электронного спектра и позволяет использовать в расчетах решения уравнений Элиашберга, полученные в разд. 3. Запишем аналитическое продолжение (2.11)

$$G_{11}(\xi_{\mathbf{p}}, \omega) = \frac{\omega Z(\omega) + \xi_{\mathbf{p}}}{\varepsilon^2(\omega) - \xi_{\mathbf{p}}^2}, \quad (4.3)$$

где $\varepsilon(\omega)$ выражается формулой (3.27). Далее, вычисляя интеграл по $d\xi_{\mathbf{p}}$ с функцией распределения (4.2), получим спектральный вес зоны в виде

$$W(T) = 3 \frac{\omega_{pl}^2}{8} \text{Im} \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{W_b} \text{th} \frac{\omega}{2T} \varepsilon_b(\omega) g(\varepsilon_b(\omega)), \quad (4.4)$$

$$\omega_{pl}^2 = \frac{8\pi}{3} e^2 v_m^2 N_b(0), \quad (4.5)$$

где ω_{pl} — затравочная плазменная частота зоны, $g(\varepsilon_b(\omega))$ выражается формулой (3.28), $\varepsilon_b(\omega) = \varepsilon(\omega)/W_b$. Интеграл (4.4) можно записать в виде зоммерфельдовского разложения (1.11), первый член которого зависит от температуры только из-за взаимодействия электронов с фононами, а второй представляет зоммерфельдовский вклад в спектральный вес. Для оценки этих вкладов вычислим спектральный вес (4.4) для упругого рассеяния на статических примесях или (и) электрон-фононного рассеяния при высоких температурах. Используя формулы (3.12) и (3.14), найдем

$$W(T) = \frac{\omega_{pl}^2}{8\sqrt{1+2\beta}} \left(1 - \frac{\pi^2}{2} \frac{T^2}{W_b^2} \right) \equiv \frac{\tilde{\omega}_{pl}^2}{8} \left(1 - \frac{\pi^2}{2} \frac{T^2}{W_b^2} \right), \quad (4.6)$$

где перенормированная плазменная частота

$$\tilde{\omega}_{pl}^2 = \frac{8\pi}{3} e^2 v_m^2 N_{\beta}(0) \quad (4.7)$$

и $N_{\beta}(\omega)$ — плотность состояний перенормированной зоны (см. (3.16)). При малых β имеем

$$W(T) \approx \frac{\omega_{pl}^2}{8} \left(1 - \frac{\Gamma(T)}{W_b} - \frac{\pi^2}{2} \frac{T^2}{W_b^2} \right). \quad (4.8)$$

Использование для $\Gamma(T)$ даже самой простой оценки (3.4) показывает, что для сильного электрон-фононного взаимодействия вклад второго члена в правой части (4.8) становится большим, чем зоммерфельдовский (третий член) уже при температурах

$$\frac{T}{\Omega_{ph}} \geq \frac{\Omega_{ph}}{W_b}. \quad (4.9)$$

Заметим также, что спектральный вес даже при $T = 0$ равен не $\omega_{pl}^2/8$, а $\tilde{\omega}_{pl}^2/8$ и приближается к этому значению только в пределе $W_b \rightarrow \infty$.

Температурная зависимость спектрального веса (4.8) существенно зависит от структуры функции Элиашберга $\alpha^2(\omega)F(\omega)$ и определяется только интегральной характеристикой бозонной подсистемы $\Gamma_{ph}(T)$ (3.32). В предельных случаях низких и высоких температур $\Gamma_{ph}(T)$ может быть близкой к T^α , где $\alpha \geq 3$, при $T \ll \Omega_{ph}$ и к T при $T \gg \Omega_{ph}$. В интервале же промежуточных температур зависимость $\Gamma_{ph}(T)$ определяется только численно и, как показано в работе [12], может быть очень близка к

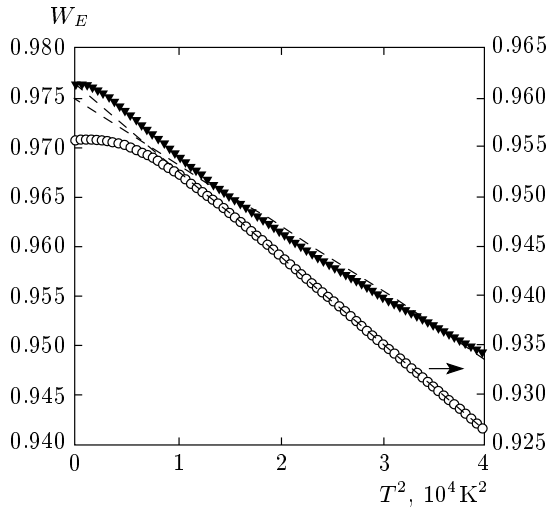


Рис. 2. Зависимость нормированного спектрального веса зоны от температуры для эйнштейновских спектров с энергиями $\Omega_E = 200$ К (темные треугольники) и 400 К (светлые кружки, правая ось). Штрихом показаны квадратичные асимптотики (1.2)

T^2 . Представление об этой зависимости дает рис. 2. На этом рисунке показана нормированная на $\omega_{pl}^2/8$ функция (4.8):

$$w_E(T) = 1 - \frac{G_E(T)}{W_b} \approx 1 - \lambda \frac{\pi}{2} \frac{\Omega_E}{W_b} \operatorname{cth} \left(\frac{\Omega_E}{2T} \right) \quad (4.10)$$

для эйнштейновских спектров с частотами фононов $\Omega_E = 200$ К и $\Omega_E = 400$ К, константой электрон-фононного взаимодействия $\lambda = 1.5$ и $W_b \approx 2$ эВ. Кривые демонстрируют поведение близкое к T^2 в температурном интервале $100 \text{ К} \leq T \leq 200 \text{ К}$, но отклоняются от T^2 при низких температурах, как это можно видеть на рисунке, и при высоких температурах, которые на рисунке не показаны. В связи с этим следует отметить, что в области низких температур подобные же отклонения оптического правила сумм наблюдаются экспериментально в ВТСП-системах [2, 4]. Эти отклонения начинаются еще в нормальном состоянии, причем у оптимально допированных образцов спектральный вес возрастает при уменьшении температуры быстрее, чем квадратичная асимптотика (1.2), а у недодопированных слабее. Однако в работах [2, 4] при анализе экспериментальных данных предполагается зоммерфельдовский тип зависимости спектрального веса нормального металла вида (1.2) и в области низких ($T < 100$ К) температур. В таком случае оказывается, что отклонения

спектрального веса недодопированных образцов от зависимости (1.2) формально совпадают с ожидаемыми при переходе в сверхпроводящее состояние отклонениями в модели БКШ. (Спектральный вес сверхпроводника по отношению к спектральному весу нормального состояния (1.2) уменьшается при понижении температуры.) В случае же оптимально допированных образцов спектральный вес возрастает при уменьшении температуры быстрее чем в зависимости (1.2), что противоречит поведению, ожидаемому в модели БКШ. На основании этого делается заключение о различной природе сверхпроводящего состояния в оптимально допированных и недодопированных образцах [4]. На наш взгляд, это заключение является явно поспешным, поскольку экспериментально наблюдаемое поведение спектрального веса может быть простым следствием особенностей электрон-фононного взаимодействия с различными фононными модами в этих системах.

Для анализа поведения спектрального веса $W(\Omega_c, T)$ (2.6) необходимы прямое вычисление поляризационного оператора $\Pi(\omega)$ (2.19) и оптической проводимости $\sigma(\omega)$ (2.3). Используя симметрию решений уравнений Элиашберга в рассматриваемой модели (3.21) и учитывая, что порядок интегрирования в (2.19) несуществен, так как вне зоны $\operatorname{Im} \hat{G}(\mathbf{p}, \omega) \approx 0$ (см. рис. 1б), запишем выражение (2.19) в виде

$$\Pi(\omega) = \int_0^{\omega/2} dz [\pi_1(\omega, -z) - \operatorname{Im} \pi_2(\omega, -z)] + \int_0^{\infty} dz [\pi_1(\omega, z) - \operatorname{Im} \pi_2(\omega, z)], \quad (4.11)$$

$$\pi_1(\omega, z) = \left(\operatorname{th} \frac{\omega + z}{2T} - \operatorname{th} \frac{z}{2T} \right) \left\{ -\frac{1}{\pi} e^2 \times \sum_{\mathbf{p}} \left(\frac{\partial \xi_{\mathbf{p}}}{\partial \mathbf{p}} \right)^2 \operatorname{Sp} \left[\hat{G}(\mathbf{p}, \omega + z) \operatorname{Im} \hat{G}(\mathbf{p}, z) \right] \right\}, \quad (4.12)$$

$$\pi_2(\omega, z) = \operatorname{th} \frac{\omega + z}{2T} \left\{ -\frac{1}{\pi} e^2 \times \sum_{\mathbf{p}} \left(\frac{\partial \xi_{\mathbf{p}}}{\partial \mathbf{p}} \right)^2 \operatorname{Sp} \left[\hat{G}(\mathbf{p}, \omega + z) \operatorname{Im} \hat{G}(\mathbf{p}, z) \right] \right\}. \quad (4.13)$$

Вычисление выражений (4.12) и (4.13) сводится к интегрированию комплексных дробей вида $(1/2\pi)(z - \xi_{\mathbf{p}})^{-1}$ с функцией распределения скоростей. Обычно [24] такие интегралы вычисляются

в полюсном приближении и полагают равным примерно $i \operatorname{sign} \operatorname{Im} z$. В однозонном приближении с функцией распределения (4.2) эти интегралы также вычисляются аналитически и выражаются комплексной функцией

$$g_{tr}(z) = -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 d\eta \frac{(1-\eta^2)^{3/2}}{z-\eta} = (1-z^2) \left\{ -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 d\eta \frac{\sqrt{1-\eta^2}}{z-\eta} \right\} - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 d\eta (z+\eta) \sqrt{1-\eta^2}, \quad (4.14)$$

где функция в фигурных скобках равна $g(z)$ (3.9). С учетом (4.14) функции

$$\pi_0(z, z') = -\frac{1}{\pi} e^2 \sum_{\mathbf{p}} \left(\frac{\partial \xi_{\mathbf{p}}}{\partial \mathbf{p}} \right)^2 \times \operatorname{Sp} \left\{ \hat{G}(\mathbf{p}, z) \hat{G}(\mathbf{p}, z') \right\}, \quad (4.15)$$

полностью определяющие (4.12) и (4.13), записываются в виде произведения факторов когерентности и комплексных транспортных функций релаксации $\tau^{\pm}(z, z')$:

$$\tau^{\pm}(z, z') = \frac{1}{W_b} \frac{g_{tr}(z) \pm g_{tr}(z')}{z \pm z'}, \quad (4.16)$$

$$\pi_0(z, z') = -\frac{\omega_b^2}{8\pi} \{ [1 + g_0(z)g_0(z') + g_1(z)g_1(z')] \times \tau^{-}(\varepsilon_b(z), \varepsilon_b(z')) + [1 - g_0(z)g_0(z') - g_1(z)g_1(z')] \times \tau^{+}(\varepsilon_b(z), \varepsilon_b(z')) \}, \quad (4.17)$$

где $g_{0,1}(\omega)$ — компоненты (3.19) матричной части функции Грина. Заметим, что линейный член в функции $g_{tr}(z)$ (4.14) не дает вклада в $\Pi(\omega)$ и $g_{tr}(z)$ может быть определена с точностью до произвольного линейного слагаемого. Мы определим функцию $g_{tr}(z)$ как

$$g_{tr}(z) = (1-z^2)g(z) - z/2 \rightarrow z^3 - (z^2 - 1)^{3/2} \quad (4.18)$$

и, соответственно,

$$\lim_{z \leftrightarrow z'} \tau^{-}(\varepsilon_b(z), \varepsilon_b(z')) = \frac{\delta g_{tr}(\varepsilon_b(z))}{\delta \varepsilon_b(z)} \rightarrow -3\varepsilon_b(z)g(\varepsilon_b(z)) \frac{1}{W_b}. \quad (4.19)$$

Формулы (4.16), (4.17) полностью определяют вид поляризационного оператора (4.11) после интегрирования по импульсам. Явный вид поляризационного оператора приводим ниже для простых случаев, в частности, в Приложении II приведены формулы для статической проводимости и поляризационного оператора на нулевой частоте $\Pi(0)$.

Особенности $\sigma(\omega)$ в однозонной модели рассмотрим на простом примере нормального металла со статическими примесями при $T = 0$. Для действительной части оптической проводимости нормального металла из формул (4.11)–(4.13) и (4.17) имеем

$$\sigma_1(\omega) = -\frac{\omega_{pl}^2}{4\pi\omega} \operatorname{Re} \int_0^{\omega/2} dz \{ \tau^{+}(\varepsilon_b(\omega-z), \varepsilon_b^*(z)) - \tau^{+}(\varepsilon_b(\omega-z), \varepsilon_b(z)) \}. \quad (4.20)$$

(Для краткости сохраним обозначение $\varepsilon_b(\omega)$ и для нормального состояния, в котором эта функция должна быть заменена величиной $\varepsilon_b^N(\omega) \rightarrow (\omega/W_b)Z(\omega)$.) В случае, когда рассеяние можно считать упругим, как было показано в разд. 3, функции $\varepsilon_b(\omega)$ и $g(\varepsilon_b(\omega))$ выражаются через элементарные функции (см. (3.10)–(3.14)). Используя эти формулы, мы можем таким же образом представить и функцию $g_{tr}(\omega)$:

$$g_{tr}(\omega) = [\alpha\omega_{\beta} + \gamma n(\omega_{\beta})]^3 - [\gamma\omega_{\beta} + \alpha n(\omega_{\beta})]^3 \quad (4.21)$$

в формулах (4.16) и (4.20). В результате простых алгебраических преобразований получим

$$\sigma_1^{imp}(\omega) = \frac{\omega_{pl}^2}{4\pi\omega} \frac{1+3\beta}{1+2\beta} \int_0^{\tilde{\omega}_{2\beta}} dz \frac{\gamma(\alpha^2 - z^2 - \delta\omega_{2\beta}^2)}{\alpha^2\omega_{2\beta}^2 + \gamma^2(\alpha^2 - z^2)} \times n_2(\omega_{2\beta} - z)n_2(\omega_{2\beta} + z), \quad (4.22)$$

где $\tilde{\omega}_{2\beta} = \min(\omega_{2\beta}; 1 - \omega_{2\beta})$, $\omega_{2\beta} = \omega/(2W_{\beta})$, $\delta = (1 + \beta)/(1 + 3\beta)$, $n_2(\omega)$ — плотность состояний,

$$n_2(\omega) = \operatorname{Im} n(\omega). \quad (4.23)$$

Формула (4.22) имеет вид близкий к обычной друдевской проводимости, взвешенной с произведением плотностей начального и конечного состояний и со скоростью релаксации, зависящей от энергии. Как следует из формулы (4.22), в низкочастотной области $\sigma_1^{imp}(\omega)$ за счет зонных эффектов, по сравнению с моделью Друде, увеличивается. В частности, статическая проводимость $\sigma_1^{imp}(0)$ имеет вид $4\pi\sigma_1^{imp}(0)/\omega_{pl}^2 = \tau_{imp} + \tau_b$, где $\tau_{imp} = (2\gamma_{imp})^{-1}$ и $\tau_b = (2W_b(1 + 2\beta))^{-1}$ (см. также (П.П.7) для

$T = 0$). В области частот ω больших полуширины зоны поведение проводимости определяется, в основном, плотностями начального и конечного состояний, вследствие чего проводимость очень резко убывает, по сравнению с друдевской зависимостью, как ω^{-2} . Легко показать, что $\sigma_1^{imp}(\omega > W_\beta) \sim \sim \omega^{-2}(1 - \omega_{2\beta})^3/\omega_{2\beta}$. Таким образом, уже в этой области энергий малый внутризонный вклад может оказаться порядка или даже меньше межзонного. Это обстоятельство, строго говоря, сужает область применимости однозонной модели, однако вряд ли существенно влияет на температурную зависимость спектрального веса $W(\Omega_c, T)$, так как природа релаксации вследствие межзонных переходов принципиально ничем не отличается от внутризонной.

Для анализа поведения спектрального веса $W(\Omega_c, T)$ систем с электрон-фононным взаимодействием необходимы численные расчеты. Результаты наших расчетов оптического спектрального веса, включающих в себя решение уравнений (3.17) и последующее вычисление оптической проводимости ((4.11) и (2.5)), а также $W(\Omega_c, T)$ (1.3) для различных температур и спектральных функций электрон-фононного взаимодействия $\alpha^2(\omega)F(\omega)$, представлены на рис. 3–7. Во всех случаях полуширина заграющей зоны была выбрана равной $W_b = 10^4 \text{ см}^{-1}$. Используемые в расчетах различные спектральные функции электрон-фононного взаимодействия будем здесь для краткости характеризовать только константой связи λ и средней фононной частотой $\langle \Omega_{ph} \rangle$ (3.36). (Отметим, что правило сумм (4.4) выполнялось во всех наших расчетах с относительной точностью не ниже чем 10^{-10} .)

Как видно на рис. 3, 4, нормированный спектральный вес $w(\Omega_c, T)$ при $\Omega_c \gg \langle \Omega_{ph} \rangle$ очень хорошо (с точностью от 5% до 0.5% в зависимости от величины Ω_c) аппроксимируется спектральным весом проводимости (4.22) для скорости упругой релаксации $\Gamma_{ph}(T)$ (3.32) (в частности, при $\Omega_c = 2W_\beta$ формулой (4.8)) и действительно имеет в интервале промежуточных температур зависимость, близкую к $W - B(\Omega_c)T^2$. Остановимся подробнее на рис. 3, на котором показана также и область более низких (в том числе и ниже $T_c \approx 70 \text{ К}$) температур. Приведенная на рисунке зависимость, помимо того, что с большой точностью совпадает с аппроксимацией (4.8), весьма близка к виду модельной кривой (4.10) для нормального металла с мягким фононным спектром $\Omega_E = 200 \text{ К}$ на рис. 2. В обоих случаях спектральный вес возрастает при уменьшении температуры быстрее, чем асимптотика $W - B(2W_\beta)T^2$. Та-

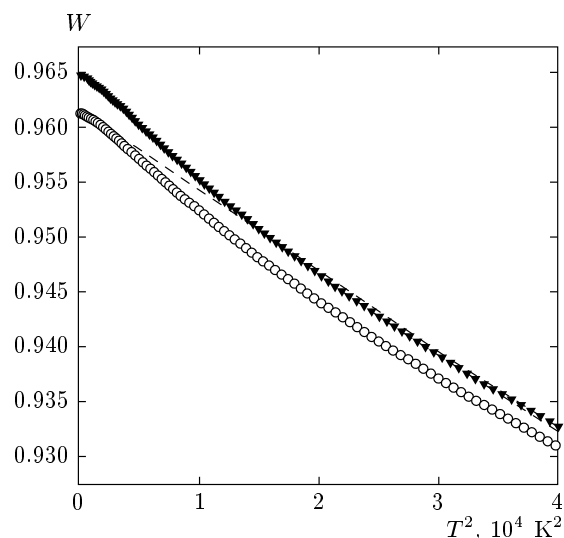


Рис. 3. Температурная зависимость зонного спектрального веса (4.4) взаимодействующей электрон-фононной системы $\lambda = 1.5$; $\langle \Omega_{ph} \rangle = 250 \text{ см}^{-1}$, $\gamma_{imp} = 0$ (темные треугольники) и ее аппроксимация по формуле (4.8) (светлые кружки)

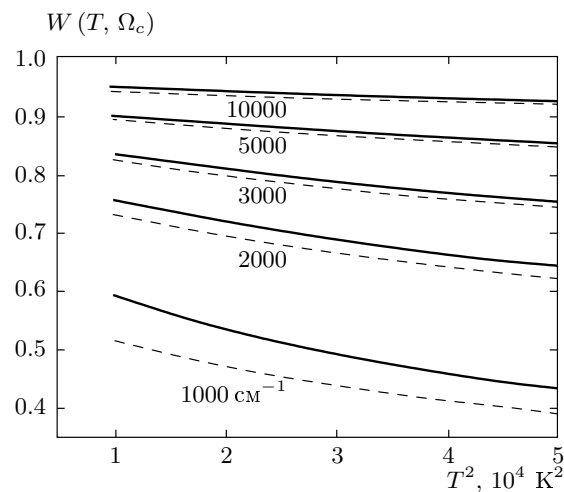


Рис. 4. Зависимость спектрального веса той же, что и на рис. 3, взаимодействующей системы от температуры (сплошные кривые) и ее аппроксимация — спектральный вес проводимости $\sigma_1^{imp}(\omega)$ (4.22) со скоростью релаксации (3.32) (штрихи) для различных энергий обрезания Ω_c

ким образом, можно предположить, что вид экспериментальных кривых, наблюдаемых в оптимально допированных образцах, обусловлен сильным взаимодействием с относительно мягкими фононными модами.

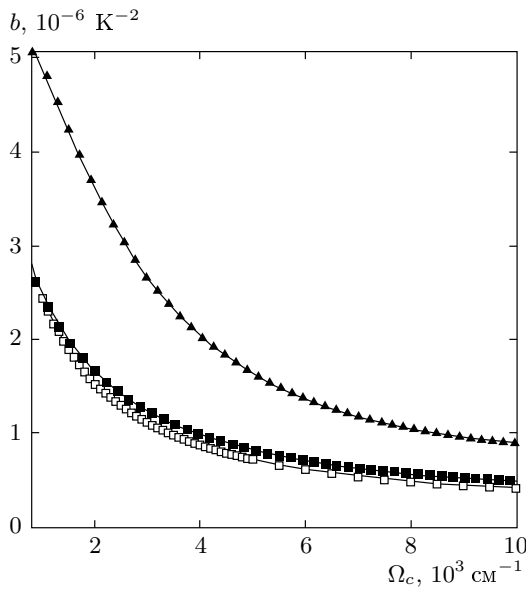


Рис. 5. Зависимость коэффициента b от энергии обрезания Ω_c для различных спектральных функций электрон-фононного взаимодействия при $\gamma_{imp} = 0$. Мягкий спектр — $\lambda = 1.45$; $\langle \Omega_{ph} \rangle = 200 \text{ см}^{-1}$ (темные треугольники) и более жесткий спектр — $\langle \Omega_{ph} \rangle = 400 \text{ см}^{-1}$ с различными константами связи: $\lambda = 1.45$ (темные квадраты) и $\lambda = 1.45$ (светлые квадраты)

На рис. 5 и 6 представлена зависимость нормированного температурного коэффициента $B(\Omega_c)$ в формуле (1.2), который мы в расчетах приняли равным

$$b(\Omega_c) \approx -\partial w(\Omega_c, T) / \partial T^2 \Big|_{T=150 \text{ К}}, \quad (4.24)$$

от энергии обрезания Ω_c для различных спектральных функций электрон-фононного взаимодействия и скоростей электрон-примесной релаксации. Как видно на этих рисунках, форма кривых $b(\Omega_c)$ зависит, в основном, от величин $\langle \Omega_{ph} \rangle$ и γ_{imp} . В случае жестких, по сравнению с температурой, спектров коэффициент b уменьшается по величине и слабо зависит от энергии обрезания Ω_c . То же самое имеет место и в случае сильного примесного рассеяния при $\gamma_{imp} > \Gamma_{ph}$, как это видно на рис. 5 и 6, на которых показано изменение формы кривой $b(\Omega_c)$ для спектра $\lambda = 1.45$; $\langle \Omega_{ph} \rangle = 400 \text{ см}^{-1}$ (кривые из темных квадратов на рис. 5 и 6) при введении примесей с $\gamma_{imp} = 600 \text{ см}^{-1} \approx \Gamma_{ph}$. На рис. 6 штриховой линией также показана зависимость коэффициента b от Ω_c в случае рассеяния только на статических примесях (нефононная, зоммерфельдовская). Как видно на рисунке, при близких скоростях релаксации зависимость $b_{Zomm}(\Omega_c)$ на два порядка меньше фо-

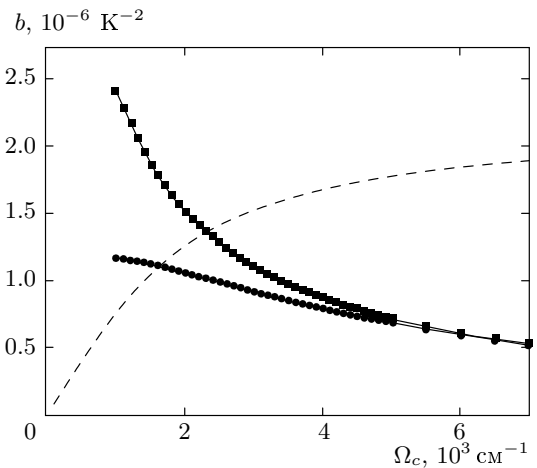


Рис. 6. Пример зависимости коэффициента b от скорости релаксации упругого примесного рассеяния γ_{imp} . Темными квадратами показана трансформация $b(\Omega_c)$ для спектра $\lambda = 1.45$; $\langle \Omega_{ph} \rangle = 400 \text{ см}^{-1}$ (соответствующая кривая на рис. 5) при введении примесей с $\gamma_{imp} = 600 \text{ см}^{-1} \approx \Gamma_{ph}$. Штрихом показан зоммерфельдовский тип зависимости $b_{Zomm}(\Omega_c) \cdot 10^2$ с той же γ_{imp} . (Светлыми квадратами показано то же, что и на рис. 5)

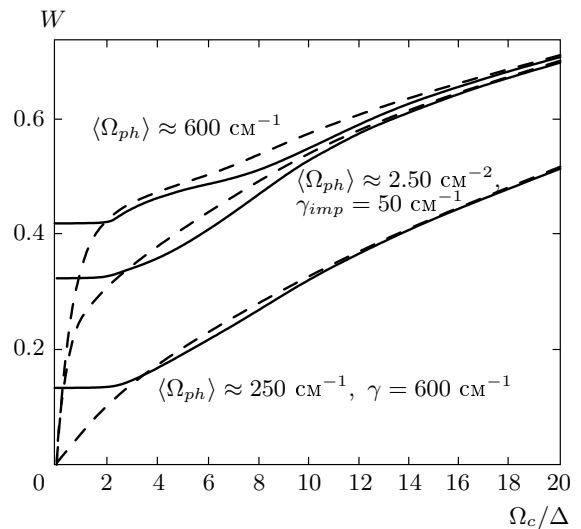


Рис. 7. Правило сумм FGT для различных спектральных функций электрон-фононного взаимодействия. Сплошные кривые — сверхпроводящее, штриховые — нормальное состояния (см. текст)

нонной и имеет совсем другую (монотонно возрастающую) зависимость от Ω_c .

Результаты, приведенные выше, относились как

к нормальному, так и к сверхпроводящему состояниям, поскольку при больших энергиях, $\Omega_c \gg \langle \Omega_{ph} \rangle$, кривые для обоих состояний, согласно нашим расчетам, совпадают с точностью около $(\Delta/\Omega_c)^2$, как и в формуле (1.9). Различие в поведении спектрального веса нормального и сверхпроводящего состояний наблюдается при более низких энергиях Ω_c , и для обычных сверхпроводников описывается правилом сумм FGT (1.4). На рис. 7 приведены результаты наших расчетов правила сумм FGT для различных функций электрон-фононного взаимодействия и концентраций примесей. На этом рисунке сплошные кривые представляют спектральный вес сверхпроводящего, а штриховые — нормального состояния. Сверхпроводящая щель и температура выбраны одинаковыми для всех трех случаев и равны $\Delta \approx 100 \text{ см}^{-1}$, $T = 10 \text{ К}$. Две верхние пары кривых представляют правило сумм FGT соответственно для жесткого $\langle \Omega_{ph} \rangle \approx 600 \text{ см}^{-1}$ и мягкого $\langle \Omega_{ph} \rangle \approx 250 \text{ см}^{-1}$ спектров в случае малого примесного рассеяния $\gamma_{imp} = 50 \text{ см}^{-1}$. Нижние кривые представляют правило сумм FGT для грязного металла с параметрами $\langle \Omega_{ph} \rangle \approx 250 \text{ см}^{-1}$ и $\gamma_{imp} = 600 \text{ см}^{-1}$. Рисунок 7 ясно показывает, что интервал энергий Ω_c , в котором спектральный вес нормального и сверхпроводящего состояний существенно различается, определяется амплитудой и положением особенности оптической проводимости сверхпроводника (хольстейновским сдвигом) [21, 31] и шириной фононного спектра, а не величиной щели Δ , как это принято считать. Как видно на рисунке, максимальные отклонения наблюдаются именно при энергиях $2\Delta + \langle \Omega_{ph} \rangle$. В грязном металле (нижняя пара кривых на рисунке) амплитуда отклонения существенно уменьшается вследствие того, что хольстейновские особенности размываются примесями. К последнему случаю относятся и классические сверхпроводники, в которых эти особенности выражены очень слабо.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученные нами результаты показывают, что для достаточно больших $\Omega_c \gg \langle \Omega_{ph} \rangle$ в интервале температур $100 \text{ К} \leq T \leq 200 \text{ К}$ оптический спектральный вес металла с электрон-фононным взаимодействием имеет температурную зависимость, близкую к квадратичной (1.2), которая очень точно аппроксимируется спектральным весом проводимости (4.22), который зависит от температуры только за счет скорости упругой релаксации (3.35). Вид

квадратичной зависимости (1.2) определяется величиной $B(\Omega_c)$. Коэффициенты $B(\Omega_c)$ были получены экспериментально [7] и имеют принципиально незоммерфельдовский вид (см. рис. 6). Рассчитанные нами коэффициенты $B(\Omega_c)$, зависимость которых от энергии обрезания Ω_c ослабляется как для более жестких фононных мод, так и при введении примесей, могут качественно объяснить экспериментальные данные работы [7]. В частности, это относится к экспериментальным кривым $B(\Omega_c)$ для Au — несверхпроводящего металла с мягкими модами — и соединений $\text{La}_{2-x}\text{Sr}_x\text{CuO}_4$, имеющих существенно разную стехиометрию $x = 0.26$; 0.12 и разные константы связи. (Как известно, $\text{La}_{2-x}\text{Sr}_x\text{CuO}_4$ с $x = 0.26$ вообще не сверхпроводник и, согласно данным ARPES, скорость релаксации квазичастиц в этом соединении намного меньше, чем в сверхпроводящем соединении с концентрацией Sr, равной $x = 0.12$.) В области более низких температур зависимость спектрального веса металла с электрон-фононным взаимодействием отклоняется от квадратичной асимптотики (1.2), причем кривые расположены выше асимптотики для мягких и ниже нее для жестких фононных спектров (рис. 2, 3). Подобные типы температурных зависимостей также получены в экспериментальных измерениях [1–7].

В области температур ниже T_c различие в поведении оптического спектрального веса нормального и сверхпроводящего состояний металла при больших $\Omega_c \gg \langle \Omega_{ph} \rangle$ пренебрежимо мало и имеет место только для Ω_c меньших или порядка энергии $2\Delta + \langle \Omega_{ph} \rangle$, характеризующей положение особенности оптической проводимости сверхпроводника (хольстейновский сдвиг), причем амплитуда отклонения увеличивается в зависимости от силы связи и уменьшается в грязном металле вследствие размывания особенности.

Поскольку наши результаты, представленные на рис. 2–6, качественно описывают экспериментальные данные работ [1–7], можно предположить, что наблюдаемые зависимости спектрального веса от температуры определяются интегральными свойствами бозонной подсистемы и вряд ли имеют отношение к механизму спаривания и ВТСП.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты №№ 06-02-16978-а, 07-02-00456-а), а также в рамках программы поддержки научных школ и научной программы Президиума РАН и Отделения физических наук.

ПРИЛОЖЕНИЕ I

Функция распределения сверхпроводящих электронов

Приведем явное выражение для вычисления диамагнитного отклика K^d (2.4). В теории сверхпроводимости функция распределения электронов по импульсам $n_{\mathbf{p}}$ определяется как [22]

$$n_{\mathbf{p}} = \langle \Psi_{\mathbf{p}}^\dagger \hat{\tau}_3 \Psi_{\mathbf{p}} \rangle \rightarrow \text{Sp} \left\{ \hat{\tau}_3 \hat{G}(\mathbf{p}, \tau = 0^+) \right\}. \quad (\text{П.И.1})$$

Раскрывая это выражение по правилам техники Намбу [22, 25], получим

$$\begin{aligned} K^d &= e^2 \sum_{\mathbf{p}, \sigma} \frac{\partial^2 \xi_{\mathbf{p}}}{\partial p_\alpha^2} \langle c_{\mathbf{p}\sigma}^\dagger c_{\mathbf{p}\sigma} \rangle = \\ &= 2T \lim_{\tau \rightarrow 0^-} e^2 \sum_{\mathbf{p}, m} \frac{\partial^2 \xi_{\mathbf{p}}}{\partial p_\alpha^2} G_{11}(\mathbf{p}, i\omega_m) e^{-i\omega_m \tau}. \end{aligned} \quad (\text{П.И.2})$$

Предел суммы по m в последнем выражении согласно работе [29] равен

$$\begin{aligned} 2T \text{Re} \sum_m G_{11}(\mathbf{p}, i\omega_m) + 1 &= \\ &= -\frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega f(\omega) \text{Im} G_{11}(\mathbf{p}, \omega), \end{aligned} \quad (\text{П.И.3})$$

где для вычисления левой части (П.И.3) мы использовали спектральное представление (2.17), формулу (2.18) и следующее из (П.И.2) условие нормировки для мнимой части функции Грина $G_{11}(\mathbf{p}, \omega)$:

$$-\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz \text{Im} G_{11}(\mathbf{p}, z) = 1. \quad (\text{П.И.4})$$

Теперь можно записать K^d в виде интеграла по действительной оси:

$$K^d = -\frac{2}{\pi} \sum_{\mathbf{p}} \frac{\partial^2 \xi_{\mathbf{p}}}{\partial p_\alpha^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega f(\omega) \text{Im} G_{11}(\mathbf{p}, \omega) \quad (\text{П.И.5})$$

ПРИЛОЖЕНИЕ II

Статические свойства

Как следует из соотношения симметрии (2.20) и формул (2.3) и (2.19), при малых $\omega \ll T$ проводимость имеет вид

$$\begin{aligned} \sigma_{\omega \rightarrow 0}(\omega) &= \frac{c^2}{4\pi \Lambda_L^2(T)} \left[\pi \delta(\omega) + \frac{i}{\omega} \right] - \\ &- \text{Im} \frac{d}{d\omega} \Pi(\omega) \Big|_{\omega=0}. \end{aligned} \quad (\text{П.И.1})$$

Перепишем интеграл по энергии в формуле (2.19) в виде

$$\begin{aligned} \Pi_{\mathbf{p}}(\omega) &= \text{Sp} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{2\pi} \times \\ &\times \left\{ \text{th} \frac{z+\omega}{2T} \text{Im} \left[\hat{G}(\mathbf{p}, z+\omega) \hat{G}(\mathbf{p}, z) \right] - \right. \\ &- \left[\text{th} \frac{z+\omega}{2T} - \text{th} \frac{z}{2T} \right] \times \\ &\times \left. \hat{G}(\mathbf{p}, z+\omega) \text{Im} \hat{G}(\mathbf{p}, z) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{П.И.2})$$

Тогда из (П.И.1) и (П.И.2) для действительной части статической проводимости получим

$$\begin{aligned} \sigma_1(0) &= \text{Im} \int_{-\infty}^{\infty} dz \left(-\frac{\partial f(z)}{\partial z} \right) \times \\ &\times \lim_{\omega \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\pi} e^2 \sum_{\mathbf{p}} \left(\frac{\partial \xi_{\mathbf{p}}}{\partial \mathbf{p}} \right)^2 \times \right. \\ &\times \left. \text{Sp} \left[\hat{G}(\mathbf{p}, z+\omega) \text{Im} \hat{G}(\mathbf{p}, z) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{П.И.3})$$

Простейший вид последнее выражение имеет в нормальном состоянии. В модели, рассмотренной в разд. 4, нормальная статическая проводимость $\sigma^N(0)$ может быть представлена как

$$\begin{aligned} \sigma^N(0) &= \frac{\omega_{pl}^2}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz \left(-\frac{\partial f(z)}{\partial z} \right) \times \\ &\times \lim_{\omega \rightarrow 0} \text{Re} \left\{ \tau^- (\varepsilon_b(\omega+z), \varepsilon_b^*(z)) - \right. \\ &- \left. \tau^- (\varepsilon_b(\omega+z), \varepsilon_b(z)) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{П.И.4})$$

Используя определения (4.18), (4.19) и учитывая симметрию (3.21) функций $\varepsilon(-z) = \varepsilon^*(z)$ и $g_{tr}(z^*) = g_{tr}^*(z)$, получим

$$\begin{aligned} \sigma^N(0) &= \frac{\omega_{pl}^2}{4\pi} \int_0^{\infty} \frac{dz}{W_b} \left(-\frac{\partial f(z)}{\partial z} \right) \times \\ &\times \left\{ \frac{\text{Im} g_{tr}(\varepsilon_b(z))}{\text{Im} \varepsilon_b(z)} + 3 \text{Re} \varepsilon_b(z) g(\varepsilon_b(z)) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{П.И.5})$$

Предельный переход $W_b \rightarrow \infty$ в (П.П.5) соответствует обычному случаю однородного электронного газа. В этом пределе при $z \geq 0$ имеем $\lim_{W_b \rightarrow \infty} g_{tr}(\varepsilon_b(z)) \rightarrow i$ и формула (П.П.5) переходит в хорошо известное выражение [24]

$$\sigma^N(0) = \frac{\omega_{pl}^2}{4\pi} \int_0^\infty dz \left(-\frac{\partial f(z)}{\partial z} \right) \frac{1}{\Gamma(z)}. \quad (\text{П.П.6})$$

В случае, когда рассеяние можно считать упругим, используем в (П.П.5) $g_{tr}(\omega)$ в виде (4.21). В результате из (П.П.5) получим выражение

$$\sigma_1^{imp}(0) = \frac{\omega_{pl}^2}{4\pi} \left(\frac{1}{2\Gamma} \right) \frac{1+3\beta}{1+2\beta} \times \int_0^{W_\beta/2T} \frac{dx}{\text{ch}^2(x)} n_2 \left(\frac{2T}{W_\beta} x \right). \quad (\text{П.П.7})$$

Покажем также, как может быть вычислена величина $\Pi(0)$. Из (П.П.2) следует, что

$$\Pi(0) = \text{Im} \int_{-\infty}^\infty dz \text{th} \frac{z}{2T} \lim_{\omega \rightarrow 0} \left\{ e^2 \frac{1}{\pi} \sum_{\mathbf{p}} \left(\frac{\partial \xi_{\mathbf{p}}}{\partial \mathbf{p}} \right)^2 \times \text{Sp} \left[\hat{G}(\mathbf{p}, z + \omega) \hat{G}(\mathbf{p}, z) \right] \right\}. \quad (\text{П.П.8})$$

Предел выражения в фигурных скобках может быть записан как

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \{ \} = \frac{\omega_{pl}^2}{8\pi} \lim_{\omega \rightarrow 0} \{ [1+g_1^2(z)] \tau^- (\varepsilon_b(\omega+z), \varepsilon_b(z)) - g_1^2(z) \tau^+ (\varepsilon_b(\omega+z), \varepsilon_b(z)) \}. \quad (\text{П.П.9})$$

Учитывая определения (4.16) и (4.18), получим

$$\Pi(0) = \frac{\omega_{pl}^2}{8\pi} \text{Im} \int_{-\infty}^\infty \frac{dz}{W_b} \text{th} \frac{z}{2T} \times \left\{ -g_1^2(z) \left[\frac{g_{tr}(\varepsilon_b(z))}{\varepsilon_b(z)} + 3\varepsilon_b(z)g(\varepsilon_b(z)) \right] - 3\varepsilon_b(z)g(\varepsilon_b(z)) \right\}. \quad (\text{П.П.10})$$

Сравнивая (П.П.10) с формулой (4.4), можно видеть, что второй член в (П.П.10) равен диамагнитному вкладу с обратным знаком: $-K^d$, вследствие чего диамагнитный вклад в выражении для проводимости (2.3) сокращается. Таким образом, вели-

чина лондоновской магнитной глубины проникновения определяется как

$$\Lambda_L^{-2}(T) = -\frac{\omega_{pl}^2}{c^2} \text{Im} \int_0^\infty dz \text{th} \frac{z}{2T} \frac{g_1^2(z)}{\varepsilon(z)} \times [g_{tr}(\varepsilon_b(z)) + 3\varepsilon_b^2(z)g(\varepsilon_b(z))]. \quad (\text{П.П.11})$$

ЛИТЕРАТУРА

1. D. N. Basov, S. I. Woods, A. S. Katz et al., *Science* **283**, 49 (1999).
2. H. J. A. Molegraaf, C. Presura, D. van der Marel et al., *Science* **295**, 2239 (2002).
3. A. F. Santander-Syro, R. P. S. M. Lobo, N. Bontemps et al., *Europhys. Lett.* **62**, 568 (2003).
4. A. F. Santander-Syro, R. P. S. M. Lobo, N. Bontemps et al., *Phys. Rev. B* **70**, 134504 (2004).
5. C. C. Homes, S. V. Dordevic, D. A. Bonn et al., *Phys. Rev. B* **69**, 024514 (2004).
6. A. V. Boris, N. N. Kovaleva, O. V. Dolgov et al., *Science* **304**, 708 (2004).
7. M. Ortolani, P. Calvani, and S. Lupi, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 67002 (2005).
8. J. E. Hirsch, *Science* **295**, 2226 (2002).
9. D. van der Marel, in *Concepts in Electron Correlation*, ed. by A. Newson and V. Zlatio, Kluwer (2003), p. 7.
10. D. van der Marel, in *Strong Interaction Electrons in Low Dimensions*, ed. by D. Baeriswyl and L. De Giorgi, Kluwer Academic Publishers (2004).
11. M. R. Norman and C. P'epin, *Phys. Rev. B* **66**, 100506 (2002).
12. A. E. Karakozov, E. G. Maksimov, and O. V. Dolgov, *Sol. St. Comm.* **124**, 119 (2002).
13. J. P. Carbotte and E. Schachinger, *Phys. Rev. B* **69**, 224501 (2004).
14. L. Benfatto, S. G. Sharapov, N. Andrenacci et al., *Phys. Rev. B* **71**, 104511 (2005).
15. R. A. Ferrel and R. E. Glover, *Phys. Rev.* **109**, 1398 (1958).
16. M. Tinkham and R. A. Ferrel, *Phys. Rev. Lett.* **2**, 331 (1959).
17. M. Tinkham, *Introduction to Superconductivity*, McGraw-Hill, New York (1996).
18. R. Kubo, *J. Phys. Soc. Jpn.* **12**, 570 (1957).

19. Г. М. Элиашберг, ЖЭТФ **38**, 966 (1960).
20. P. Monthoux, A. V. Balatsky, and D. Pines, Phys. Rev. Lett. **67**, 1348 (1991).
21. T. Holstein, Ann. Phys. (N.Y.) **29**, 410 (1964).
22. J. R. Schrieffer, *Theory of Superconductivity*, Addison Wesley (1988).
23. Y. Nambu, Phys. Rev. **117**, 648 (1960).
24. S. B. Nam, Phys. Rev. **156**, 470 (1967).
25. P. B. Allen and B. Mitrovic, *Solid State Physics*, ed. by H. Ehrenreich, F. Zeitz, and D. Turnbull, Acad. Press, New York, Vol. 37 (1982), p. 2.
26. Е. Г. Максимов, УФН **170**, 1033 (2000).
27. J. Hubbard, Proc. Roy. Soc. (London) **A281**, 401 (1964).
28. H. Ehrenreich and L. Schwartz, *Solid State Physics*, ed. by H. Ehrenreich, F. Zeitz, and D. Turnbull, Acad. Press, New York, Vol. 31 (1976).
29. А. А. Абрикосов, Л. П. Горьков, И. Е. Дзялошинский, *Методы квантовой теории поля в статистической механике*, Физматгиз, Москва (1962).
30. А. Е. Karakozov and E. G. Maksimov, Sol. St. Comm. **139**, 80 (2006).
31. О. V. Dolgov, А. Е. Karakozov, А. А. Mikhailovsky et al., Physica C **229**, 396 (1994).