

НЕЛИНЕЙНЫЙ СЦЕНАРИЙ РАЗВИТИЯ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ВИХРЕВОГО СЛОЯ В ПОЛЕ ТЯЖЕСТИ

*В. П. Гончаров**

*Институт физики атмосферы им. А. М. Обухова Российской академии наук
109017, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 26 февраля 2007 г.

Сформулирована гамильтоновская версия контурной динамики для моделей плоских равнозавихренных течений с контактной границей. В рамках этого подхода рассмотрен нелинейный сценарий развития неустойчивости и изучены структурные элементы этого процесса — локализованные вихревые образования, возникающие в сильно возмущенном пограничном слое завихренной жидкости со свободной границей в присутствии силы тяжести. Исследовано влияние силы тяжести и завихренности на форму и скорость распространения вихревых структур. Показано, что на роль частицеподобных вихревых структур, описывающих процесс дезинтеграции течения, претендуют компактоны — нелинейные решения с компактным носителем. Исследование механизма неустойчивости показало возможность автомодельного коллапса. Установлено, что на финальной стадии коллапса форма вихря стабилизируется, а на его границе происходит интенсификация вихревой пелены по закону $(t_0 - t)^{-1}$, где t_0 — время коллапса.

PACS: 47.10.-g, 47.15.ki, 47.32.cd, 05.45.Yv

1. ВВЕДЕНИЕ

Хорошо известно, что процессы концентрации вещества и энергии могут быть связаны с развитием гидродинамических неустойчивостей [1]. В частности, в пятидесятые годы прошлого века к изучению тейлоровской неустойчивости, возникающей на поверхности раздела двух сред, когда более тяжелое вещество приводится в ускорение более легким, неоднократно обращались Ферми и Нейман [2] в связи с важностью этой задачи для имплозивного метода производства атомного взрыва. Неустойчивость рассматривалась ими в рамках простейших моделей, в которых на границе раздела учитывался лишь скачок плотности.

В физике высоких плотностей энергий, в физике реагирующих систем, а также в астро- и геофизике актуальны и другие, более сложные модели, связанные с изучением динамики контактных границ, на которых может испытывать скачок не только плотность, но и завихренность. Наличие таких границ раздела является причиной различного рода гидродинамических неустойчивостей, которые на нелинейной стадии своего развития приводят к

дезинтеграции слоев и появлению доминирующих структур — локализованных пространственных образований, структурно устойчивых в широком диапазоне граничных и начальных условий. Эти образования отвечают собственным внутренним симметриям нелинейной среды и проявляются на фоне турбулентных флуктуаций как области высокоупорядоченного (когерентного) крупномасштабного движения жидкости с высокой концентрацией завихренности.

При исследовании динамики расслоенной жидкости часто прибегают к идеализированным моделям, в которых границы раздела (линии или поверхности) движутся вместе с жидкостью так, что их самоиндуцированную эволюцию можно описать замкнутым образом в терминах переменных, идентифицирующих только эти границы. Описание всей остальной жидкости игнорируется. Такой подход к описанию динамики жидкости известен как метод контурной динамики [3, 4]. Классический пример — поверхностные волны на границе тяжелой несжимаемой жидкости. То обстоятельство, что в точной постановке уравнения контурной динамики сильно нелинейны и нелокальны, стимулировало развитие и применение преимущественно численных методов

*E-mail: v.goncharov@mtu-net.ru

для их решения. Аналитические версии контурной динамики получили гораздо меньшее распространение, поскольку их эффективность существенным образом зависит от выбора динамических переменных и способа параметризации контура. К сожалению, здесь возможности традиционных формулировок в значительной мере ограничены. Требование физической наглядности, которого придерживаются в таких формулировках при выборе динамических переменных, отнюдь не гарантируют простой картины эволюции в фазовом пространстве этих переменных. Поэтому желательно иметь более гибкую формулировку задачи, позволяющую, с одной стороны, легко совершать переход из одного фазового пространства в другое, а с другой стороны, контролировать искажения модели при использовании асимптотических методов. Именно таким требованиям отвечают гамильтоновские версии контурной динамики [5–9].

В отличие от традиционных методов гамильтоновский подход позволяет не только обеспечить адекватный выбор динамических переменных, но и контролировать внутренние симметрии, а следовательно, и динамическую идентичность точной и приближенной моделей. Как известно, информация относительно внутренних свойств симметрии содержится в скобках Пуассона. Гамильтониан системы в этом смысле — второстепенная величина, фиксирующая в фазовом пространстве поверхность, на которой лежит динамическая траектория системы. Таким образом, чтобы предотвратить потерю или искажение внутренних свойств симметрии, необходимо использовать аппроксимации, которые не нарушают свойства скобок Пуассона. В жертву погрешностям приносится только одна величина — гамильтониан системы.

Применительно к контурной динамике, цель такой стратегии — вывод нелинейных уравнений, которые в числе своих решений содержат решения с компактным носителем, описывающие доминирующие структуры как пространственно замкнутые области когерентных движений захваченной жидкости. Требуемого вида решения известны как компактоны [10, 11] и являются следствиями уравнений с так называемой нелинейной дисперсией. На языке теории возмущений вывод таких уравнений предполагает не малость отклонений динамических переменных от равновесных значений, а малость вкладов, которые ассоциированы с их производными. Поэтому степенные разложения ведутся не по возмущениям, а по производным, и в первом порядке теории возмущений в гамильтониане удерживают лишь самые младшие члены.

Будучи частицеподобными решениями, компактоны в отличие от волн или солитонов не обладают осциллирующими или установившимися на бесконечности хвостами, хранящими память о невозмущенном (фоновом) режиме. Это замечательное свойство делает их идеальными претендентами на роль структурных элементов, описывающих процессы дезынтеграции течений, инициированных крупномасштабной гидродинамической неустойчивостью.

До недавнего времени гамильтоновский подход с успехом использовался для исследования вихревых структур преимущественно в задачах, которые приводили к однородным по плотности моделям контурной динамики [5–7]. Как известно, в ходе эволюции скачок плотности на контуре неизбежно приводит к появлению вихревой пелены. Динамика контура становится еще более сложной, а цена стратегии, которая бы обеспечивала адекватное, но сравнительно простое аналитическое описание, становится более высокой. Наиболее последовательно эта стратегия была реализована недавно для простейшей модели осесимметричного равновзвихренного струйного течения [9]. Отметим, что единственный дополнительный фактор, помимо скачка завихренности на контуре, — скачок плотности — учитывался в этой модели в отсутствие силы тяжести.

Учет или не учет силы тяжести несомненно играет определенную роль. На это указывают качественные соображения, которые можно сделать, рассматривая плоское течение завихренной жидкости со свободной границей. Действительно, в отсутствие силы тяжести в такой системе существует только один характерный масштаб движения — временной $T = \omega^{-1}$, где ω — завихренность. Присутствие силы тяжести меняет ситуацию и в задаче возникает масштаб длины $L = |g|\omega^{-2}$ (g — ускорение силы тяжести), который делит движения на мелкомасштабные и крупномасштабные.

Цель данной работы — построение модели для изучения нелинейного сценария развития неустойчивости в вихревом слое со свободной границей и учетом влияния силы тяжести. Работа построена следующим образом. В разд. 2 сформулирована гамильтоновская версия контурной динамики для равновзвихренных плоских течений с разрывом плотности и завихренности на контактных границах. Модель вихревого слоя со свободной границей в поле сил тяжести рассматривается в разд. 3. Здесь же выведены уравнения динамики контура в приближении нелинейной дисперсии. Раздел 4 посвящен анализу решений, которые описывают достаточно сильные деформации контура и которые можно интер-

претировать как вихревые структуры, возникающие на предтурбулентной стадии развития сильно возмущенного течения. В разд. 5 обсуждается неустойчивость компактных решений, а в разд. 6 рассматривается автомодельный сценарий их коллапса. Общие выводы даны в разд. 7.

2. ГАМИЛЬТОНОВСКАЯ ВЕРСИЯ КОНТУРНОЙ ДИНАМИКИ ДЛЯ ПЛОСКИХ ТЕЧЕНИЙ

Система скобок Пуассона, позволяющая записать трехмерные уравнения движения несжимаемой неоднородной жидкости в гамильтоновской форме, формулируется в терминах поля плотности ρ и поля завихренности $\gamma = \text{rot } \mathbf{\pi}$ для плотности гидродинамического импульса $\mathbf{\pi} = \rho \mathbf{v}$ и выглядит следующим образом [7, 8]:

$$\{\rho, \rho'\} = 0, \tag{2.1}$$

$$\{\rho, \gamma^{ik}\} = e^{knm} \partial_m \rho \partial_n \delta, \tag{2.2}$$

$$\{\gamma^i, \gamma^{jk}\} = e^{ipj} e_{jln} e^{kmn} \partial_p \gamma^l \partial_m \delta. \tag{2.3}$$

Здесь и далее по повторяющимся индексам подразумевается суммирование, а полевые переменные со штрихом обозначают зависимость от пространственных координат со штрихом. Кроме того, обозначение $\delta = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ подразумевает дельта-функцию Дирака, $\partial_i = \partial/\partial x^i$ — оператор дифференцирования, $e^{ikj} \equiv e_{ikj}$ — единичный антисимметричный тензор (символ Леви-Чивита), а γ^i — компоненты вектора γ , связанные соотношением

$$\gamma^i = e^{ikn} \partial_k \rho v_n \tag{2.4}$$

с компонентами v_n гидродинамической скорости.

Гидродинамические движения, соответствующие скобкам (2.1)–(2.3), описываются уравнениями

$$\partial_t \gamma = \{\gamma, H\} = \text{rot} \left(\left(\text{rot} \frac{\delta H}{\delta \gamma} \right) \times \gamma + \frac{\delta H}{\delta \rho} \nabla \rho \right),$$

$$\partial_t \rho = \{\rho, H\} = - \left(\text{rot} \frac{\delta H}{\delta \gamma} \right) \cdot \nabla \rho,$$

где векторное поле $\text{rot}(\delta H/\delta \gamma)$ есть не что иное как гидродинамическая скорость \mathbf{v} , гамильтониан H совпадает с полной энергией жидкости,

$$H = \int \frac{\mathbf{v}^2}{2} d\mathbf{x} + U[\rho],$$

а потенциальная часть U гамильтониана — заданный функционал плотности, который фиксируется модельными соображениями.

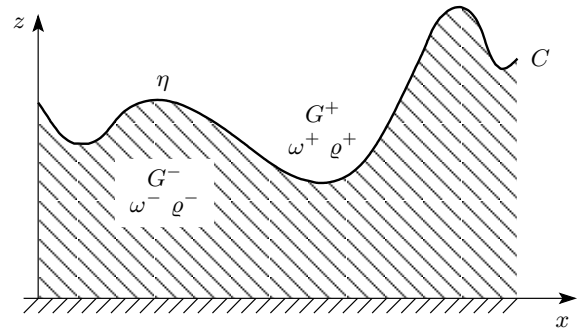


Рис. 1. Схема плоского равновихренного течения с контактной границей $C: z = \eta(x)$

Скобки Пуассона (2.1)–(2.3) являются основой для построения различных версий гамильтоновской контурной динамики в двумерных течениях. В плоских течениях, где все поля являются функциями только двух координат $\mathbf{x} = (x^1, x^2)$, лежащих в плоскости течения, векторное поле завихренности γ имеет только одну компоненту $\gamma^3 = \gamma$, для которой согласно (2.4) имеет место соотношение

$$\gamma = e^{ik} \partial_i \rho v_k, \tag{2.5}$$

где e^{ik} — единичный антисимметричный тензор.

В терминах скалярных полей γ и ρ скобки Пуассона (2.1)–(2.3) приводятся к более простому виду:

$$\{\rho, \rho'\} = 0, \tag{2.6}$$

$$\{\rho, \gamma'\} = e^{ki} \partial_i \rho \partial_k \delta, \tag{2.7}$$

$$\{\gamma, \gamma'\} = e^{ki} \partial_i \gamma \partial_k \delta. \tag{2.8}$$

Рассмотрим (см. рис. 1) для простоты две области G^+ , G^- , которые отделены друг от друга контактной границей C , по обе стороны которой плотность ρ и завихренность $\omega = \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1$ принимают различные, но постоянные значения. Используя знаки «+» и «-» для обозначения переменных соответственно в областях G^+ и G^- , запишем плотность и компоненты гидродинамического импульса в виде разложений:

$$\rho = \rho^+ \theta^+ + \rho^- \theta^-, \tag{2.9}$$

$$\rho v_i = \rho^+ v_i^+ \theta^+ + \rho^- v_i^- \theta^-. \tag{2.10}$$

Здесь θ^+ и θ^- — взаимно дополнительные субстанциональные характеристические функции:

$$\theta^\pm = \begin{cases} 1, & \text{если } \mathbf{x} \in G^\pm, \\ 0, & \text{если } \mathbf{x} \notin G^\pm, \end{cases}$$

которые обладают свойствами

$$\theta^+ + \theta^- = 1, \quad \theta^+ \theta^- = 0, \quad \partial_t \theta^\pm + v^i \partial_i \theta^\pm = 0.$$

Последнее из этих свойств является условием лагранжестости, т. е. того, что субстанциональные объемы G^+ и G^- движутся вместе с жидкостью.

Подстановка представления (2.10) в формулу (2.5) приводит к выражению

$$\gamma = \omega^+ \varrho^+ \theta^+ + \omega^- \varrho^- \theta^- + \beta, \quad (2.11)$$

где величина

$$\beta = e^{ik} (\varrho^+ v_k^+ - \varrho^- v_k^-) \partial_i \theta^+$$

описывает сингулярную часть плотности завихренности импульса, которая сосредоточена на контуре.

Предполагая, что контактная граница задана соотношением $z = \eta(x, t)$ (z — вертикальная координата, x — горизонтальная, η — форма границы), выберем в качестве субстанциональной характеристической функции θ^+ обычную функцию Хевисайда

$$\theta^+ = \theta(z - \eta),$$

обладающую свойством: $\theta(z) = 1$ при $z \geq 1$ и $\theta(z) = 0$ при $z < 0$.

Такой выбор позволяет переписать разложение (2.9) и (2.11) в виде

$$\varrho = \varrho^- + (\varrho^+ - \varrho^-) \theta(z - \eta), \quad (2.12)$$

$$\gamma = \omega^- \varrho^- + \nu \theta(z - \eta) + \mu \delta(z - \eta), \quad (2.13)$$

где $\nu = \varrho^+ \omega^+ - \varrho^- \omega^-$ — скачок завихренности плотности импульса, μ — скачок тангенциальной компоненты импульса на контуре:

$$\mu = - \left[\eta_x (\varrho^+ v_2^+ - \varrho^- v_2^-) + (\varrho^+ v_1^+ - \varrho^- v_1^-) \right]_{z=\eta}. \quad (2.14)$$

Соотношения (2.12), (2.13) позволяют легко пересчитать скобки Пуассона для переменных (γ, ϱ) в скобки для переменных (η, μ) , заданных на контуре. После подстановки (2.12), (2.13) в систему (2.6)–(2.8) и ее решения в предположении, что $\varrho^+ - \varrho^- \neq 0$, т. е. наличия скачка плотности, получим

$$\{\eta, \eta'\} = 0, \quad (2.15)$$

$$\{\eta, \mu'\} = -\partial_x \delta(x - x'), \quad (2.16)$$

$$\{\mu, \mu'\} = -\nu \partial_x \delta(x - x'). \quad (2.17)$$

Если $\nu \neq 0$, то с помощью замены

$$\xi = \mu - \nu \eta \quad (2.18)$$

скобки (2.15)–(2.17) приводятся к следующим:

$$\{\xi, \mu'\} = 0, \quad (2.19)$$

$$\{\xi, \xi'\} = \nu \partial_x \delta(x - x'), \quad (2.20)$$

$$\{\mu, \mu'\} = -\nu \partial_x \delta(x - x'). \quad (2.21)$$

Полученные скобки соответствуют уравнениям движения

$$\partial_t \xi = \nu \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta H}{\delta \xi}, \quad \partial_t \mu = -\nu \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta H}{\delta \mu}, \quad (2.22)$$

которые кроме гамильтониана H сохраняют интегралы

$$P = \frac{1}{2} \int (\xi^2 - \mu^2) dx, \quad (2.23)$$

$$T_1 = \int \xi dx, \quad T_2 = \int \mu dx. \quad (2.24)$$

Если сохранение интеграла (2.23), играющего роль вихревого импульса, связано с трансляционной инвариантностью гамильтониана H , то интегралы (2.24) являются аннуляторами скобок (2.19)–(2.21) и, следовательно, сохраняются независимо от H . Именно поэтому в моделях с такой пуассоновой структурой гамильтониан можно определять с точностью до линейных членов, которые не влияют на уравнения движения.

Процедура, позволяющая выразить гамильтониан H в терминах переменных ξ, μ , осуществляется с помощью краевой задачи. Для рассматриваемых здесь плоских течений несжимаемой жидкости такая задача формулируется в терминах функции тока:

$$\psi = \psi^+ \theta^+ + \psi^- \theta^-.$$

Учитывая соотношения

$$v_1 = -\partial_z \psi, \quad v_2 = \partial_x \psi,$$

которыми соответствующие компоненты скорости связаны с функцией тока ψ , на основании формул (2.5), (2.14) получим краевую задачу:

$$(\partial_x^2 + \partial_z^2) \psi^\pm = \omega^\pm, \quad (2.25)$$

$$\left[(\eta_x \partial_x - \partial_z) (\varrho^- \psi^- - \varrho^+ \psi^+) \right]_{z=\eta} = \mu. \quad (2.26)$$

При необходимости данная краевая задача дополняется условиями непрерывности функции тока на внутренних границах раздела и постоянства на внешних.

3. МОДЕЛЬ ВИХРЕВОГО СЛОЯ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ

Наличие свободной границы равносильно условию $\varrho^+ = 0$, поэтому будем предполагать далее, что слой жидкости единичной плотности $\varrho^- = 1$ и завихренности $\omega^- = \omega$ находится в поле сил тяжести с ускорением g , снизу ограничен горизонтальной твердой поверхностью, а сверху контактирует с невесомой несжимаемой жидкостью (см. рис. 1).

Тип возможного равновесия в такой модели зависит от знака g . В частности, при $g > 0$ равновесие устойчиво, а при $g < 0$ — неустойчиво. В последнем случае она эквивалентна так называемой модели «опрокинутой мелкой воды», в которой весомый слой жидкости ограничен сверху горизонтальной твердой поверхностью, а снизу опирается на невесомую жидкость. Необычное, на первый взгляд, неустойчивое равновесие невозмущенного состояния обеспечивается равенством гидростатических давлений на контактной границе.

В задаче существуют характерные масштабы: временной $T = \omega^{-1}$ и пространственный $L = |g|\omega^{-2}$, поэтому осуществим переход к безразмерным зависимым и независимым переменным. После приведения к безразмерному виду уравнения движения (2.22) выглядят следующим образом:

$$\partial_t \xi = -\frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta H}{\delta \xi}, \quad \partial_t \mu = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta H}{\delta \mu}, \quad (3.1)$$

где H — безразмерный гамильтониан модели, который предстоит вычислить.

При вычислении гамильтониана H будем исходить из интеграла полной энергии

$$E = \int \left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} + gz \right) d\mathbf{x} = \frac{1}{2} \int dx \int_0^\eta \left((\partial_z \psi^-)^2 + (\partial_x \psi^-)^2 + 2gz \right) dz,$$

с которым H совпадает с точностью до линейных членов, не влияющих на уравнения движения. По этой причине гамильтониан H , вообще говоря, не является знакоопределенной величиной, даже если полная энергия E (например, при $g \geq 0$) — сугубо положительная величина.

На основании формул (2.25), (2.26) для функции тока ψ^- , через которую выражается кинетическая энергия, имеет место краевая задача:

$$(\partial_x^2 + \partial_z^2) \psi^- = 1, \quad (3.2)$$

$$(\eta_x \partial_x - \partial_z) \psi^-|_{z=\eta} = \mu, \quad (3.3)$$

дополненная условием «калибровки» $\psi^-|_{z=0} = 0$ на твердой границе.

По аналогии с работами [5, 6] общее решение краевой задачи (3.2)–(3.3) будем искать в виде

$$\psi^- = \frac{1}{2} z^2 + \text{sh}(z\Gamma) A, \quad (3.4)$$

где Γ — оператор, который определяется соотношением $\Gamma = \partial_x \hat{H}$, а \hat{H} — так называемое преобразование Гильберта:

$$\hat{H}f(x) = \frac{1}{\pi} \int \frac{f(x')}{x-x'} dx'.$$

Замечательными свойствами этих операторов являются тождества

$$\hat{H}^2 = -1, \quad \hat{H}^+ = -\hat{H}, \quad \Gamma^2 = -\partial_x^2, \quad \Gamma^+ = \Gamma.$$

Здесь знак «+» в качестве верхнего индекса обозначает эрмитово сопряжение.

Подстановка решения (3.4) в краевое условие (3.3) приводит к уравнению

$$\partial_x \text{ch}(\eta\Gamma) \hat{H}A = -\xi, \quad (3.5)$$

где согласно выражению (2.18) $\xi = \mu + \eta$.

Если мы ограничиваемся приближением так называемой нелинейной дисперсии, то при решении уравнения (3.5) достаточно учесть только члены второго порядка по производной ∂_x . В этом случае, разлагая псевдодифференциальный оператор $\text{ch}(\eta\Gamma)$ в ряд теории возмущений, из уравнения (3.5) легко найти решение

$$\Gamma A = - \left(1 + \frac{1}{2} \partial_x \eta^2 \partial_x \right) \xi,$$

а затем и безразмерный гамильтониан модели,

$$H = \frac{1}{2} \int \left(\sigma (\xi - \mu)^2 + \frac{1}{3} (\xi^3 - \mu^3) - \frac{1}{3} (\xi - \mu)^3 \xi_x^2 \right) dx.$$

Здесь параметр σ может принимать три значения 0, 1, -1 в зависимости от типа равновесия в модели. Устойчивому равновесию ($g > 0$) соответствует $\sigma = 1$, неустойчивому ($g < 0$) — $\sigma = -1$, а $\sigma = 0$ означает отсутствие силы тяжести.

Соответствующие уравнения контурной динамики выписываются на основании (3.1) и в данном приближении выглядят как

$$\partial_t \xi = -\frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta H}{\delta \xi} = -\frac{1}{2} \partial_x \left(2\sigma (\xi - \mu) + \xi^2 - (\xi - \mu)^2 \xi_x^2 + \frac{2}{3} \partial_x (\xi - \mu)^3 \xi_x \right), \quad (3.6)$$

$$\partial_t \mu = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta H}{\delta \mu} = -\frac{1}{2} \partial_x \left(2\sigma (\xi - \mu) + \mu^2 - (\xi - \mu)^2 \xi_x^2 \right). \quad (3.7)$$

4. СТАЦИОНАРНЫЕ РЕШЕНИЯ

Рассмотрим решения в виде так называемых стационарных возмущений

$$\xi = \xi(s), \quad \mu = \mu(s), \quad s = x - ct,$$

распространяющихся с постоянной скоростью c без деформации профиля.

После подстановки стационарных решений в уравнения (3.6), (3.7) и интегрирования эти уравнения принимают вид

$$\frac{\xi^3 - \mu^3}{3} + \frac{1}{3} (\xi - \mu)^3 \xi_s^2 - c (\xi^2 - \mu^2) + \sigma (\xi - \mu)^2 + c_1 \xi - c_2 \mu - c_3 = 0, \quad (4.1)$$

$$\mu^2 + 2\sigma (\xi - \mu) - (\xi - \mu)^2 \xi_s^2 - 2c\mu + c_2 = 0, \quad (4.2)$$

где c_1, c_2, c_3 — константы интегрирования.

Константы интегрирования фиксируются типом решения, который определяется поведением контура $\eta = \xi - \mu$ и интенсивностью μ вихревой пелены при $s \rightarrow \pm\infty$.

Анализ уравнений (4.1), (4.2) показывает, что они могут иметь как периодические, так и локализованные решения (солитоны и компактоны). Решения с полуограниченным носителем, которые также существуют, здесь не рассматриваются.

4.1. Солитоны

Решения классического солитонного типа можно определить как решения, которые экспоненциально убывают при $s \rightarrow \pm\infty$, принимают значения

$$\eta|_{s=\pm\infty} = d, \quad \mu|_{s=\infty} = 0,$$

где положительная величина d — безразмерная толщина невозмущенного слоя.

В этом случае из уравнений (4.1), (4.2) можно найти, что решения данного типа реализуются при

$$\begin{aligned} c_1 &= 2d(c - \sigma) - d^2, & c_2 &= -2d\sigma, \\ c_3 &= d^2 \left(c - \sigma - \frac{2}{3}d \right), \end{aligned} \quad (4.3)$$

где c — скорость солитона.

Дальнейший анализ решений выполним, предполагая, что размер солитона η достигает максимального значения в некоторых точках $s = \pm s_m$, симметрично расположенных относительно центра $s = 0$, в котором имеет место локальный минимум. Обозначив в этих точках амплитудные характеристики решений как $\eta = a, \mu = b$, можно найти соотношение

$$4b^2 a + b(3a^2 - 8ac + 6cd - 3d^2) + (a - d) \times \times ((a - d)(a - 3c + 2d) + \sigma(5a - 3d)) = 0. \quad (4.4)$$

В точках максимума (4.4) решается совместно с равенством

$$8ba + 3a^2 - 8ac + 6cd - 3d^2 = 0 \quad (4.5)$$

при соблюдении неравенства

$$b^2 - 2bc + 2\sigma(a - d) \geq 0. \quad (4.6)$$

Отметим, что в точке минимума равенство (4.5) исключается, а неравенство (4.6) заменяется на равенство, которое решается совместно с (4.4).

Кроме ограничения (4.6) есть еще два условия существования солитонных решений:

$$a \geq d, \quad \frac{c^2}{c + \sigma} \geq d, \quad (4.7)$$

гарантирующие экспоненциальное убывание возмущений при $s \rightarrow \pm\infty$. Подчеркнем, что первое из неравенств (4.7) означает, что солитоны реализуются только как возмущения положительной полярности, т. е. для солитонов контур η всегда возвышается над уровнем d — толщиной невозмущенного слоя.

С помощью неравенств (4.6), (4.7) и соотношений (4.4), (4.5) можно определить область существования солитонных решений.

Области существования в плоскости параметров (a, d) приведены на рис. 2. При $\sigma = -1$ верхняя граница области описывается одной гладкой кривой D , а при $\sigma = 1$ состоит из трех участков A, B, C . Кривые A, B, C, D представляют собой геометрическое место точек, где соответствующие неравенства превращаются в равенства. На кривых A, C и D равенство превращается в неравенство (4.6), а на кривой B — второе из неравенств (4.7).

Один из выводов, который следует из рис. 2, состоит в том, что амплитуда солитонов должна превышать некоторое пороговое значение, зависящее от параметров устойчивости σ и толщины слоя d .

Профили возможных солитонных решений показаны на рис. 3. В центральной части форма солитонных возмущений η имеет прогиб (локальный минимум), по обе стороны от которого расположены два

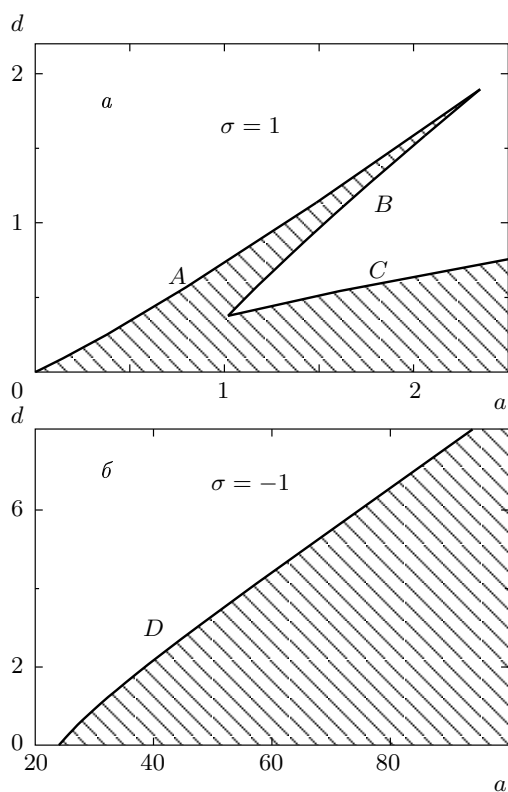


Рис. 2. Области существования (выделены штриховкой) солитонных решений в плоскости параметров (a, d)

локальных максимума. Исключением являются маргинальные решения, соответствующие точкам, которые лежат на тех участках границы области существования, где неравенство (4.6) превращается в равенство. Эти решения имеют только один максимум.

4.2. Компактоны

Решения с компактным носителем представляют интерес с точки зрения изучения финальной стадии развития сильно возмущенного течения, когда слой разбивается на отдельные вихревые густки. В отличие от традиционных солитонных решений, такие возмущения, называемые компактонами [10, 11], не обладают установившимися или исчезающими на бесконечности хвостами, что имеет весьма глубокие физические следствия. Во-первых, это означает, что компактоны не хранят память о невозмущенном режиме, а во-вторых, любая суперпозиция неперекрывающихся компактонных решений тоже является решением. Именно поэтому компактоны — идеальные кандидаты на роль структурных элементов, на осно-

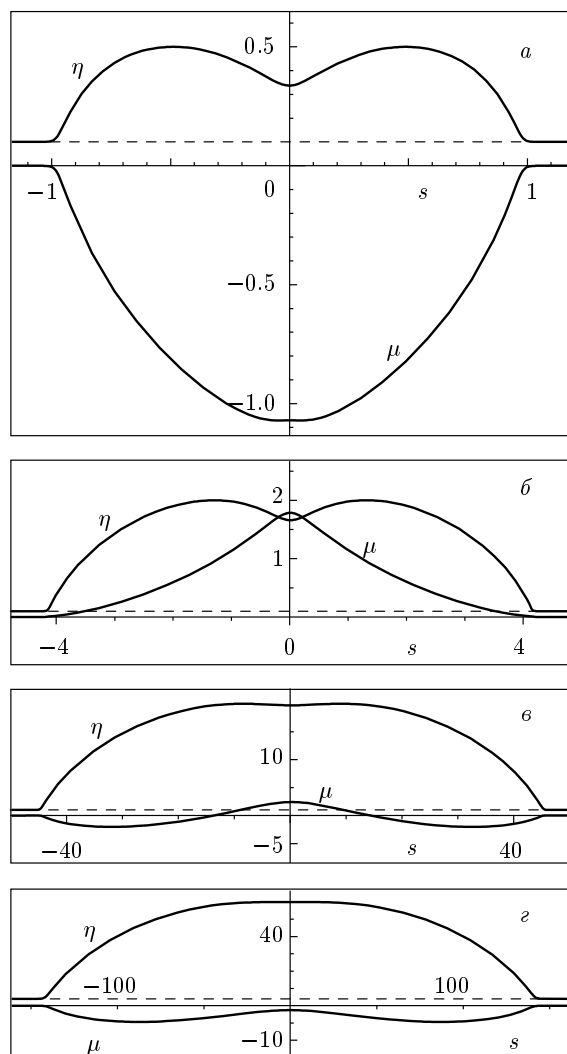


Рис. 3. Профили функций η и μ для солитонов на вихревом слое жидкости: a — $\sigma = 1$, $a = 0.5$, $d = 0.1$, $c = -0.757$; б — $\sigma = 1$, $a = 2$, $d = 0.1$, $c = 1.77$; в — $\sigma = 1$, $a = 20$, $d = 1$, $c = 8.62$; г — $\sigma = -1$, $a = 60$, $d = 4$, $c = 20.8$. Невозмущенная толщина слоя d отмечена штриховой линией

вании которых можно описывать процессы дезинтеграции течений.

Для уравнений (4.1), (4.2) соответствующий класс решений реализуется при следующем выборе констант интегрирования:

$$c_1 = 0, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = 0. \quad (4.8)$$

Этот выбор можно рассматривать как результат предельного перехода в формулах (4.3) при $d \rightarrow 0$.

Условия (4.8) позволяют понизить порядок и привести систему уравнений (4.1), (4.2) к виду

$$2\mu^2 + \xi^2 + \xi\mu - 3c\xi - 5c\mu + 5\sigma(\xi - \mu) = 0, \quad (4.9)$$

$$4(\xi - \mu)\xi_s^2 = 3(c + \sigma) - 2\mu - \xi. \quad (4.10)$$

Можно еще более упростить задачу, если на основании уравнения (4.9) униформизировать класс компактных решений, т. е. описать переменные ξ и μ в терминах одной функции $u(s)$ с помощью соотношений

$$\xi = c - \frac{25}{7}\sigma + \frac{4}{7}\epsilon u, \quad (4.11)$$

$$\mu = c + \frac{15}{7}\sigma - \frac{\epsilon}{7} \left(u + \sqrt{7} (1 - u^2)^{1/2} \right). \quad (4.12)$$

Здесь для удобства введено обозначение $\epsilon = (14c^2 + 50\sigma^2)^{1/2}$.

Униформизация, с одной стороны, дает выражение для формы контура:

$$\eta = \xi - \mu = \frac{\epsilon}{7} \left(5u + \sqrt{7} (1 - u^2)^{1/2} \right) - \frac{40}{7}\sigma, \quad (4.13)$$

а с другой, после подстановки (4.11), (4.12) в (4.10) приводит к уравнению

$$2 \left(\frac{4}{7} \right)^2 \epsilon^2 u_s^2 = \frac{\sqrt{7} (1 - u^2)^{1/2} + (\lambda - u)}{\sqrt{7} (1 - u^2)^{1/2} - 5(\lambda - u)}, \quad (4.14)$$

где $\lambda = 8\sigma\epsilon^{-1}$, а функция u изменяется в интервале $u_{min} \leq u \leq u_{max}$.

При $|\lambda| \leq 1$ границы этого интервала u_{min} и u_{max} определяются как нули соответственно знаменателя и числителя правой части (4.14) и зависят от параметра λ следующим образом:

$$u_{min} = \frac{25}{32}\lambda - \frac{\sqrt{7}}{32} (32 - 25\lambda^2)^{1/2}, \quad (4.15)$$

$$u_{max} = \frac{\lambda}{8} + \frac{\sqrt{7}}{8} (8 - \lambda^2)^{1/2}.$$

При $1 \leq \lambda \leq 4\sqrt{2}/5$ границы интервала определяются только нулями знаменателя правой части (4.14). Поэтому формула (4.15) для верхней границы в этом случае заменяется соотношением

$$u_{max} = \frac{25}{32}\lambda + \frac{\sqrt{7}}{32} (32 - 25\lambda^2)^{1/2}. \quad (4.16)$$

В явном виде решения уравнения (4.14) сравнительно легко находятся лишь для некоторых частных случаев.

Пусть сила тяжести отсутствует, $\sigma = 0$, и, следовательно, $\lambda = 0$, $\epsilon^2 = 14c^2$. В этом случае уравнение (4.14) заменой

$$u = \frac{\sqrt{2}}{4} \left(\cos \varphi + \sqrt{7} \sin \varphi \right) \quad (4.17)$$

приводится к уравнению

$$c^2 \left(1 + 2 \cos 2\varphi - \frac{2}{\sqrt{7}} \sin 2\varphi \right)^2 \varphi_s^2 = \left(\frac{3}{4} \right)^2 - \sin^2 \varphi,$$

которое решается при $|\varphi| \leq \arcsin(3/4)$ в эллиптических интегралах:

$$s = \pm c \left(\frac{l}{2} + \frac{1}{\sqrt{7}} \sqrt{9 - 16 \sin^2 \varphi} + 3E \left(\varphi, \frac{4}{3} \right) + F \left(\varphi, \frac{4}{3} \right) \right).$$

Здесь $E(\varphi, k)$, $F(\varphi, k)$ — эллиптические интегралы второго рода, а константа интегрирования l ,

$$l = 8E \left(\frac{3}{4} \right) - 2K \left(\frac{3}{4} \right) \approx 6.726,$$

характеризует продольный (вдоль оси s) размер компактона.

Параметрическое описание компактона замыкается соотношениями

$$\xi = c \left(1 - 2 \sin \varphi + \frac{2}{\sqrt{7}} \cos \varphi \right),$$

$$\mu = c \left(1 - \frac{4}{\sqrt{7}} \cos \varphi \right),$$

$$\eta = \xi - \mu = 2c \left(\frac{3}{\sqrt{7}} \cos \varphi - \sin \varphi \right),$$

которые следуют из выражений (4.11)–(4.13) при подстановке в них замены (4.17) и $\sigma = 0$.

В общем случае наиболее рациональный путь решения уравнения (4.14) — классификация решений в области параметров и численное интегрирование для некоторых типичных значений.

Согласно (4.13) в общем случае амплитуда компактона a определяется выражением

$$a = \eta_{max} = \frac{8}{7} \left(\sqrt{7c^2 + 25\sigma^2} - 5\sigma \right). \quad (4.18)$$

Это значение характеризует локальный максимум, функция η принимает при $u = 5\sqrt{2}/8$ в двух точках, которые расположены симметрично по обе стороны от центральной точки $s = 0$.

Если $|\lambda| \leq 1$, то при $u = u_{max}$, что соответствует $s = 0$, в центральной части компактона имеет место прогиб контура (локальный минимум):

$$\eta_{min} = 3 \left(\sqrt{c^2 + 3\sigma^2} - 2\sigma \right).$$

Согласно этому равенству при $\lambda = 1$, что соответствует $c = 1$, $\sigma = 1$, прогиб контура достигает дна,

$\eta_{min} = 0$, а вместо локального минимума в точке $s = 0$ возникает особенность — скачок первой производной. По существу, это означает, что при переходе в область $1 \leq \lambda \leq 4\sqrt{2}/5 \approx 1.13$, где $\sigma = 1$ и $0 \leq c \leq 1$, меняется тип компактных решений, и при расчетах в этой области вместо (4.15) должна использоваться формула (4.16), которая дает значение $\eta_{min} = 0$ для всех решений в этой области.

В контексте рассматриваемой задачи параметр σ принимает три фиксированных значения 1, 0, -1, указывая на тип стратификации. Устойчивому типу стратификации соответствует ветвь $\sigma = 1$, неустойчивому — $\sigma = -1$, а ветвь $\sigma = 0$ соответствует нейтральной стратификации, которая имеет место в отсутствие силы тяжести. Каждая ветвь компактных решений имеет свои условия существования. Эти условия, учитывая неравенства¹⁾

$$c + \sigma \geq 0, \quad a \geq \eta_{min} \geq 0,$$

можно сформулировать в виде ограничений как на скорость c , так и на амплитуду a :

	$\sigma = 1$	$\sigma = 0$	$\sigma = -1$	(4.19)
$c \geq$	0	0	$\sqrt{33}$	
$a \geq$	0	0	24	

Один из выводов, который следует из условий (4.19), заключается в том, что при неустойчивом типе стратификации ($\sigma = -1$) и скорость, и амплитуда компактона должны превышать указанные пороговые значения. Кроме того, так как независимо от типа устойчивости все значения безразмерной скорости c неотрицательны, направление движения компактонов всегда совпадает со знаком их завихренности ω^2 .

На основании (4.18) можно найти нелинейное дисперсионное соотношение

$$c = \frac{1}{8} (7a^2 + 80\sigma a)^{1/2},$$

которое выражает скорость движения компактона через его амплитуду.

В центральной части компактона всегда имеет место прогиб контура. Наиболее ярко выражен прогиб при устойчивом типе стратификации ($\sigma = 1$) у компактонов с параметрами

¹⁾ Первое из неравенств следует из неотрицательности левой части (4.10).

²⁾ Этот вывод следует из того, что в качестве масштаба времени используется обратная завихренности величина.

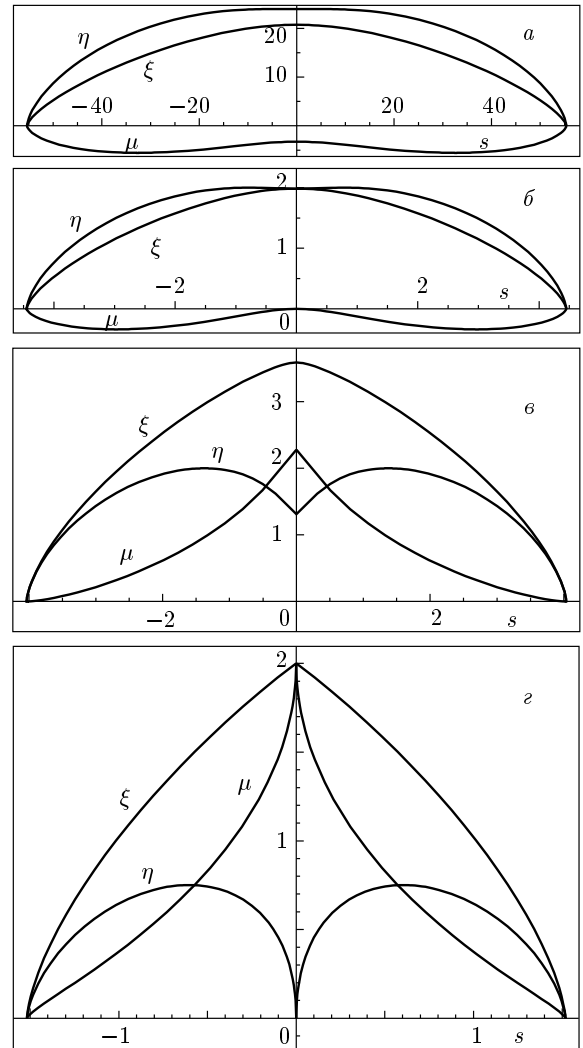


Рис. 4. Профили функций η , ξ и μ для компактонов на равновихренном слое тяжелой жидкости: $a - \sigma = -1, a = 24$; $б - \sigma = 0, a = 2$; $в - \sigma = 1, a = 2$; $г - \sigma = 1, a = 0.75$

$$0 \leq c \leq 1, \quad 0 \leq a \leq \frac{8(4\sqrt{2} - 5)}{7} \approx 0.75.$$

В этом случае прогиб достигает предельно возможного значения, при котором контур касается дна, $\eta_{min} = 0$, и в точке касания нарушается аналитичность контура — образуется особенность. Прогиб исчезает, сливаясь с локальными максимумами, при неустойчивом типе стратификации ($\sigma = -1$) у компактонов с пороговыми значениями параметров $c = \sqrt{33}, a = 24$. Графики решений для типичных значений параметров a и σ приведены на рис. 4.

5. НЕУСТОЙЧИВОСТЬ КОМПАКТОНОВ

Изучим устойчивость локализованных решений с компактным носителем. Особое значение этот вопрос приобретает в связи с явлением коллапса — образованием особенности за конечное время [12, 13]. В частности, это явление может проявляться как перманентное самосжатие локализованного возмущения, которое при фиксированных интегралах движения должно сопровождаться бесконечным ростом его амплитуды.

Для исследования неустойчивости введем новые переменные

$$\eta = \xi - \mu, \quad \kappa = \frac{1}{2}(\xi + \mu),$$

в терминах которых уравнения контурной динамики (3.6)–(3.7), гамильтониан H и, что особенно следует подчеркнуть, интеграл движения P принимают более удобный для последующего анализа вид:

$$\partial_t \eta = -\frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta H}{\delta \kappa}, \quad \partial_t \kappa = -\frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta H}{\delta \eta}, \quad (5.1)$$

$$H = \sigma I_0 + I_1 - I_2, \quad (5.2)$$

$$I_0 = \frac{1}{2} \int \eta^2 dx,$$

$$I_1 = \int \left(\frac{1}{4!} \eta^3 + \frac{1}{2} \eta \kappa^2 \right) dx,$$

$$I_2 = \frac{1}{3!} \int \eta^3 \left(\frac{1}{2} \eta_x + \kappa_x \right)^2 dx, \quad P = \int \eta \kappa dx.$$

Компактонные решения можно рассматривать как точку равновесия в бесконечномерном фазовом пространстве полей η, κ . Действительно, на компактонных решениях уравнения движения записываются в виде

$$c\eta - \frac{\delta H}{\delta \kappa} = 0, \quad c\kappa - \frac{\delta H}{\delta \eta} = 0,$$

что может быть истолковано как следствие вариационной задачи

$$\delta(H - cP) = 0, \quad (5.3)$$

в которой скорость компактона c играет роль множителя Лагранжа.

Вариационное равенство (5.3) указывает, что в этой точке реализуется экстремум функционала H при фиксированном значении P . В соответствии с теоремой Ляпунова данная стационарная точка гамильтоновой системы устойчива, если она реализует минимум или максимум гамильтониана. Если же

стационарная точка представляет собой седловую точку, то данное состояние неустойчиво.

Для исследования типа стационарной точки рассмотрим преобразования, которые содержат непрерывную зависимость от параметров и оставляют инвариантным интеграл движения P . После применения таких преобразований гамильтониан H становится обычной функцией параметров, что позволяет легко выяснить тип стационарной точки.

В качестве одного из таких преобразований возьмем следующее³⁾:

$$\eta \rightarrow \alpha^{-1/2} \eta \left(\frac{x}{\alpha} \right), \quad \kappa \rightarrow \alpha^{-1/2} \kappa \left(\frac{x}{\alpha} \right) + \beta x, \quad (5.4)$$

где α и β — параметры преобразования.

Рассмотрим вначале случай $\beta \equiv 0$. Применяя соответствующее преобразование к гамильтониану H , получим

$$H(\alpha, 0) = \sigma I_0 + \alpha^{-1/2} I_1 - \alpha^{-7/2} I_2.$$

Поскольку на компактонных решениях интегралы I_0, I_1, I_2 связаны соотношениями

$$\sigma I_0 + I_1 + I_2 = cP, \quad I_1 = 7I_2,$$

первое из которых следует из (4.1) при $c_1 = c_2 = c_3 = 0$, а второе — из условия равновесия $\partial H / \partial \alpha|_{\alpha=1} = 0$, для гамильтониана $H(\alpha, 0)$ найдем

$$H(\alpha, 0) = H_0 + I_2 \left(7\alpha^{-1/2} - \alpha^{-3} - 6 \right).$$

Здесь $I_2 > 0$, а H_0 — значение гамильтониана $H(\alpha, \beta)$ в точке равновесия:

$$H_0 = H|_{\substack{\alpha=1 \\ \beta=0}} = \frac{1}{4} (\sigma I_0 + 3cP) = \sigma I_0 + 6I_2.$$

График нормированных отклонений гамильтониана от равновесного значения H_0 в плоскости $\beta = 0$ приведен на рис. 5. При $\alpha \rightarrow 0$ функция $H(\alpha, 0)$ не ограничена снизу, при $\alpha \rightarrow \infty$ — стремится к величине σI_0 , а в точке $\alpha = 1$ реализуется ее максимум.

Аналогично рассматривается случай $\alpha \equiv 1$. В этом случае применение преобразования (5.4) к гамильтониану H приводит к зависимости

$$H(1, \beta) = H_0 + \beta^2 J, \quad J = \frac{1}{2} \int \eta \left(x^2 - \frac{1}{3} \eta^2 \right) dx.$$

³⁾ Отметим, что преобразование (5.4) лишь частный случай более общего $\kappa \rightarrow \kappa + L(x, \eta, \eta_x, \eta_{xx}, \dots)$, где L — любая дифференциальная функция, которая обладает свойством

$$\int \eta L(x, \eta, \eta_x, \eta_{xx}, \dots) dx = 0.$$

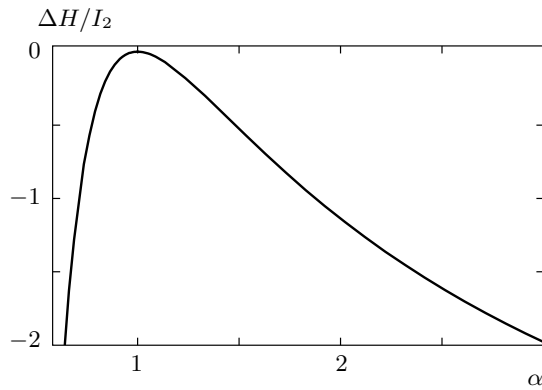


Рис. 5. Зависимость величины $\Delta H/I_2 = (H(\alpha, 0) - H_0)/I_2$ от параметра масштабного преобразования α

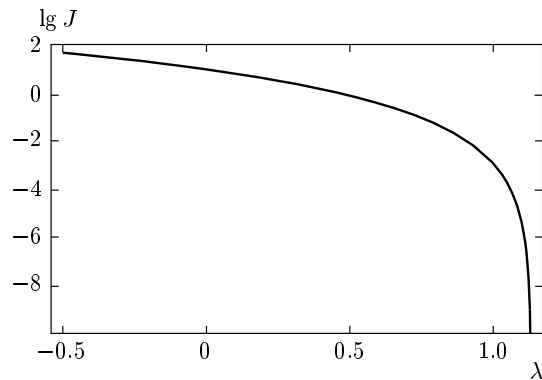


Рис. 6. Зависимость величины $\lg J$ от параметра λ

Как показывает численный анализ (см. рис. 6), знак интеграла J положителен для всех допустимых значений $-\sqrt{2}/4 \leq \lambda \leq 4\sqrt{2}/5$. Это означает, что в точке $\beta = 0$ реализуется минимум функции $H(1, \beta)$. Таким образом, компактным решениям соответствует седловая точка функционала H , что указывает на неустойчивость этих решений.

6. АВТОМОДЕЛЬНЫЙ КОЛЛАПС

Для того чтобы изучить финальную стадию развития неустойчивости, рассмотрим автомоделный сценарий коллапса, полагая, что вблизи точки коллапса $t \approx t_0$, справедливы зависимости

$$\eta = \hat{\eta}(x - ct), \quad \kappa = (t_0 - t)^{-1} \hat{\kappa}(x - ct), \quad (6.1)$$

где c — скорость распространения возмущения.

Перейдем в сопровождающую систему координат $s = x - ct$. Учитывая, что этот переход влечет за собой преобразование $H \rightarrow H + cP$, для гамильтониана (5.2) получим

$$H = \sigma I_0 + I_1 - I_2 + cP = \frac{1}{2} \int \left(2c\eta\kappa + \sigma\eta^2 + \eta\kappa^2 + \frac{1}{12}\eta^3 - \frac{1}{3}\eta^3 \left(\frac{1}{2}\eta_s + \kappa_s \right)^2 \right) ds. \quad (6.2)$$

Предполагая в соответствии с соотношениями (6.1), что в окрестности коллапса главную роль играют самые старшие по κ члены, из формулы (6.2) получим «укороченный» гамильтониан

$$H_{col} = \frac{1}{2} \int \left(\eta\kappa^2 - \frac{1}{3}\eta^3 \kappa_s^2 \right) ds,$$

отличающийся от (6.2) тем, что в нем отброшены все менее значимые члены.

Соответствующие гамильтониану H_{col} уравнения движения (5.1) имеют вид

$$\partial_t \eta = -\partial_s \frac{\delta H_{col}}{\delta \kappa} = -\partial_s \left(\eta\kappa + \frac{1}{3} \partial_s (\eta^3 \kappa_s) \right), \quad (6.3)$$

$$\partial_t \kappa = -\partial_s \frac{\delta H_{col}}{\delta \eta} = -\partial_s \left(\frac{1}{2} \kappa^2 - \frac{1}{2} \eta^2 \kappa_s^2 \right). \quad (6.4)$$

После подстановки (6.1) в (6.3), (6.4) для структурных функций $\hat{\eta}, \hat{\kappa}$ получим уравнения

$$\hat{\eta} \hat{\kappa} = -\frac{1}{3} \partial_s (\hat{\eta}^3 \hat{\kappa}_s), \quad \hat{\kappa} (1 + \hat{\kappa}_s) = \frac{1}{2} \partial_s (\hat{\eta}^2 \hat{\kappa}_s^2). \quad (6.5)$$

На решениях этих уравнений, сосредоточенных на носителе $-R \leq s \leq R$, интегралы движения принимают значения

$$H_{col} = -\frac{1}{3!} \eta^3 \kappa \kappa_s \Big|_{-R}^R, \quad P = -\frac{1}{3} \eta^3 \kappa_s \Big|_{-R}^R,$$

$$\int \kappa ds = \frac{1}{2} (\eta^2 \kappa_s^2 - \kappa^2) \Big|_{-R}^R,$$

откуда, учитывая свойства решений — нулевые краевые значения $\hat{\eta}$ и нечетность $\hat{\kappa}$, — легко сделать вывод, что

$$H_{col} = 0, \quad P = 0, \quad \int \kappa dx = 0.$$

Таким образом, автомоделные решения не нарушают законы сохранения и соответствуют сценарию слабого коллапса.

Явные решения уравнений (6.5) легко найти, если заметить, что эти уравнения имеют интеграл

$$\hat{\eta}^3 \hat{\kappa}_s (1 + 2\hat{\kappa}_s) = \text{const.}$$

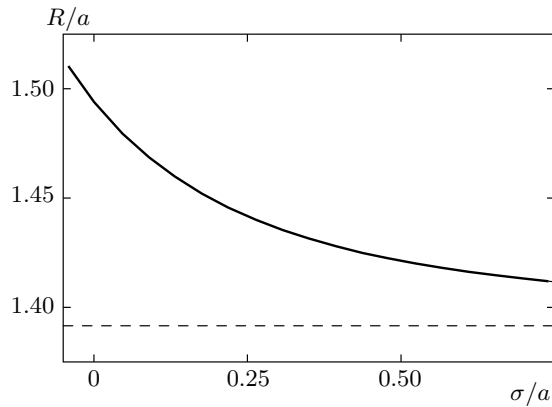


Рис. 7. Зависимость отношения R/a от параметра σ/a . Штриховая линия отмечает значение, которое асимптотически достигается при $\sigma/a \rightarrow \infty$

Единственное нетривиальное регулярное решение

$$\hat{\eta} = \sqrt{R^2 - s^2}, \quad \hat{\kappa} = -\frac{1}{2}s \quad (6.6)$$

соответствует выбору $\text{const} = 0$ и локализовано на отрезке $-R \leq s \leq R$.

Если структурная функция $\hat{\eta}$ характеризует форму контактной границы, то $\hat{\kappa}$ характеризует распределение автомодельной компоненты вихревой пелены. На основании соотношений (6.6) легко установить, что на автомодельной стадии возмущение представляет собой полукруг с радиусом R . На поверхности этого полукруга со временем по закону $(t_0 - t)^{-1}$ и с распределением $\hat{\kappa} = -s/2$ происходит интенсификация асимметричной моды вихревой пелены.

Если в качестве начального возмущения рассматривать компактон, чей поперечный размер характеризуется параметром a , то на основании закона сохранения

$$I = \int \eta dx = \frac{\pi}{2} R^2$$

можно рассчитать зависимость $R(a)$. Согласно графику, представленному на рис. 7, отношение R/a изменяется в пределах $1.39 \leq R/a \leq 1.51$. Это свидетельствует о том, что коллапс не приводит к большим деформациям формы. Происходит лишь сравнительно небольшое увеличение поперечного размера компактона при соответствующем сокращении продольного.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенное исследование показывает, что крупномасштабные движения равнозавихренного слоя жидкости со свободной границей в поле тяжести неустойчивы, и этот факт не зависит от типа стратификации (направления поля тяжести). Даже для достаточно узких слоев $d \ll 1$, для которых на начальной стадии имеет место линейное приближение $\partial_t \eta = 0, \partial_t \kappa = -\sigma \partial_x \eta$, уравнения предсказывают быстрый (линейный по времени) рост интенсивности вихревой пелены, если $\eta_x \neq 0$. Это означает, что применимость линейного приближения достаточно быстро нарушается и дальнейшее адекватное описание процесса неустойчивости требует нелинейного подхода. Анализ нелинейных режимов модели показал существование компактонов — стационарных локализованных решений, претендующих на роль вихревых структур, доминирующих в сильновозмущенных слоистых течениях на стадии их дезынтеграции. Представленный здесь модельный подход позволил выяснить форму этих вихревых образований и исследовать механизм их неустойчивости — коллапс. Установлено, что в окрестности коллапса форма компактона стабилизируется, и он превращается в полукруг, радиус которого R отличается от начального поперечного размера компактона a приблизительно в 1.4–1.5 раза. По существу эффект коллапса сводится к интенсификации вихревой пелены. В сопровождающей системе координат распределение вихревой пелены определяется выражением

$$\mu = \kappa - \frac{1}{2}\eta = -\frac{1}{2} \begin{cases} \sqrt{R^2 - s^2} + \frac{s}{t_0 - t}, & |s| \leq R, \\ 0, & |s| \geq R, \end{cases}$$

где t_0 — время коллапса.

Это выражение показывает, что интенсивность вихревой пелены, означающей скачок скорости на границе компактона, состоит из симметричной $-\eta/2$ и асимметричной κ составляющих. Если интенсификация происходит за счет асимметричной составляющей, то интегральный вклад дает только симметричная составляющая, которая не зависит от времени. Поэтому, несмотря на неограниченный рост локальных значений вихревой пелены со временем, ее полная интенсивность $\int \mu ds$ сохраняется (равно как сохраняются и другие интегралы движения).

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 06.05.64185), программы президиума РАН «Математические методы в нелинейной динамике» и гранта Президента РФ НШ-4166.2006.5.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. А. Иногамов, А. Ю. Демьянов, Э. Е. Сон, *Гидродинамика перемешивания*, Изд-во МФТИ, Москва (1999).
2. Э. Ферми, *Научные труды*, т. 2, Наука, Москва (1972), с. 490–498.
3. N. J. Zabusky, M. H. Hughes, and K. V. Roberts, *J. Comp. Phys.* **30**, 96 (1979).
4. D. G. Dritschel, *J. Comp. Phys.* **77**, 240 (1988).
5. В. П. Гончаров, *Изв. АН СССР, МЖГ* № 2, 65 (1986).
6. V. P. Goncharov and V. I. Pavlov, *Europ. J. Mech. B/Fluids* **19**, 831 (2000).
7. V. P. Goncharov, V. I. Pavlov, *ЖЭТФ* **119**, 685 (2001).
8. В. П. Гончаров, В. И. Павлов, в кн. *Фундаментальные и прикладные проблемы теории вихрей*, под ред. А. В. Борисова, И. С. Мамаева, М. А. Соколовского, Институт компьютер. иссл., Москва–Ижевск (2003), с. 179.
9. В. П. Гончаров, В. И. Павлов, *Письма в ЖЭТФ* **84**, 459 (2006).
10. P. Rosenau, *Notices Amer. Math. Soc.* **55**, 738 (2005).
11. Y. A. Li and P. J. Olver, *Discrete Contin. Dynam. Systems* **3**, 419 (1997).
12. В. Е. Захаров, Е. А. Кузнецов, *ЖЭТФ* **91**, 1310 (1986).
13. Е. А. Кузнецов, *Изв. вузов. Радиофизика* **56**, 342 (2003).