

# О СПЕКТРЕ ДИФFUЗИОННОГО МУЛЬТИФРАКТАЛЬНОГО ПРОЦЕССА

*А. И. Саичев\**, *В. А. Филимонов\*\**

*Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского  
603950, Нижний Новгород, Россия*

Поступила в редакцию 24 апреля 2007 г.

Рассматривается модель квазимультифрактальных случайных процессов. В отличие от более известной модели мультифрактальных случайных блужданий, она избавлена от таких существенных недостатков, как бесконечная дисперсия моделируемых процессов и нестационарность приращений. Основным результатом работы является анализ мультифрактального процесса диффузионного типа — изучаются моменты приращений и локальные масштабные показатели процесса, а также строится его квазимультифрактальный спектр. Особое внимание уделяется двум новым понятиям теории мультифрактальных процессов — понятию эффективного масштабного показателя и понятию квазимультифрактального спектра процесса.

PACS: 47.53.+n, 05.45.Df

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Изучение мультифрактальных процессов, являющихся обобщением каскадных моделей Ричардсона и Колмогорова [1], началось сравнительно недавно. Тем не менее к настоящему времени эта область теории случайных процессов вызвала значительный интерес у физиков, так как описываемый ею круг процессов весьма многообразен — начиная от развитой турбулентности [2] и физики высокоэнергетичных частиц вплоть до биологии и финансов [3].

В данной работе обсуждается непрерывная модель мультифрактальных процессов. Более ранняя модель мультифрактальных случайных блужданий, подробно рассмотренная в статьях [4–6], имеет существенный недостаток — бесконечную дисперсию моделируемых процессов, что ограничивает ее применение для описания реальных процессов. Этому недостатка лишена предложенная в работе [7] непрерывная модель, которая и легла в основу настоящей статьи. Являясь развитием модели случайных блужданий, она вводит в употребление несколько дополнительных существенных параметров, благодаря чему позволяет описывать более широкий класс про-

цессов. Однако модель представленная в работе [7], описывает строго монотонно растущий процесс, в то время как в большинстве приложений среднее мультифрактального процесса равно нулю. Характерным примером здесь могут служить мультифрактальные приращения поля скорости сильной развитой турбулентности [2].

Модификация данной модели позволяет сконструировать симметричный мультифрактальный процесс, построить его реализации и обсудить моменты приращений. Особое внимание в работе уделяется понятию квазимультифрактального спектра и составляющим его — так называемым эффективным масштабным показателям. В статье подробно описывается процесс отыскания моментов приращений и приводится способ упрощения численных вычислений последних. На основании расчетов строится квазимультифрактальный спектр и проводится его сравнение со спектром, получаемым в модели случайных блужданий [4].

## 2. ПОНЯТИЕ КВАЗИМУЛЬТИФРАКТАЛЬНОСТИ

Прежде всего определим понятие мультифрактальности процесса. Для этого возьмем случайный

\*E-mail: saichev@hotmail.ru

\*\*E-mail: vladimir.filimonov@wl.unn.ru

процесс со стационарными приращениями  $X(t)$  и рассмотрим  $q$ -й момент его приращений:

$$M_q(l) = \langle (\delta_l X(t))^q \rangle = \langle (X(t) - X(t-l))^q \rangle,$$

где  $\delta_l X(t) = X(t+l) - X(t)$  — приращение процесса,  $M_q(l)$  —  $q$ -й момент приращений, а уголки скобки обозначают математическое ожидание. Запишем выражение для данного момента в виде

$$M_q(l) = K_q l^{\zeta_q(l)},$$

где  $K_q$  — некоторая постоянная, а  $\zeta_q(l)$  — некоторая функция, параметром которой служит порядок момента  $q$ , а аргументом — масштаб  $l$ . Если данная функция не зависит от масштаба и определяется только порядком момента:

$$M_q(l) = K_q l^{\zeta_q}, \tag{1}$$

то говорят, что процесс  $X(t)$  обладает масштабной инвариантностью. При этом величина  $\zeta_q$  носит название масштабного показателя, а зависимость данного показателя  $\zeta_q$  от порядка момента  $q$  — спектра процесса. Если спектр линейен:  $\zeta_q = qH$ , где  $H$  — некоторая постоянная, то говорят, что исходный процесс монофрактален, если же  $\zeta_q$  — нелинейная функция порядка момента приращений  $q$ , то говорят о мультифрактальном процессе.

Хорошо известны так называемые самоподобные монофрактальные процессы, такие как, например, дробное броуновское движение, описываемые следующим выражением для приращений:

$$\delta_{l_1} X(t) \sim \left( \frac{l_1}{l_2} \right)^H \delta_{l_2} X(t). \tag{2}$$

Здесь  $l_1$  и  $l_2$  — произвольные масштабы, а знак « $\sim$ » обозначает эквивалентность процессов в статистическом смысле (равенство вероятностных распределений). Отметим, что мультифрактальные процессы, которым присуща нелинейная зависимость масштабного показателя от порядка момента, обладают отличительной особенностью: нелинейный спектр процесса  $\zeta_q$  не может существовать до бесконечных масштабов времени [4, 5], и равенство (1) выполняется лишь для масштабов  $l$ , меньших некоторого интегрального масштаба  $L$  (для монофрактальных процессов интегральный масштаб простирается до бесконечности:  $L = \infty$ ).

Существует несколько моделей, отражающих мультифрактальные свойства процессов. Первые попытки создать подобную модель основывались

на так называемом каскадном правиле [8, 9] для приращений процесса  $X(t)$ :

$$\delta_{l_1} X(t) \sim W_{l_1/l_2} \delta_{l_2} X(t), \tag{3}$$

где  $W_{l_1/l_2}$  — случайная величина, зависящая только от отношения  $l_1/l_2$ . По своей сути каскадное правило, справедливое на масштабах, меньших интегрального ( $l_1 < l_2 < L$ ), является обобщением описанного выше свойства дробного броуновского движения (2) на случай стохастической величины  $H$ . Очевидно, что случайная величина  $H$  должна быть логарифмически (мультипликативно) безгранично-делимой, в чем несложно убедиться, подставив последнее выражение само в себя.

В работе [10] было предложено интегральное уравнение с самоподобным ядром для плотности вероятности  $P_l(\delta X)$  приращений  $\delta_l X(t)$ . Ему удовлетворяет так называемая лог-нормальная модель мультифрактальности, которая, однако, имеет три существенных недостатка.

1. Приращения данного процесса нестационарны, поэтому он не может являться мультифрактальным в строгом смысле.

2. Масштабная инвариантность данного процесса не обладает непрерывными свойствами — условие (3) выполняется только для дискретного набора масштабов  $l_n = \lambda^n$ .

3. Наибольшим же препятствием в использовании модели, основанной на каскадном правиле, является отсутствие явной зависимости от времени, т. е. данная модель не описывает процесс в полном смысле.

Модель мультифрактальных случайных блужданий, предложенная в работах [4, 5], лишена указанных недостатков. В описываемом подходе процесс представляется в виде предела

$$X(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} X_{\Delta t}(t)$$

конечной суммы

$$X_{\Delta t}(t) = \sum_{k=1}^{t/\Delta t} \varepsilon_{\Delta t}[k] e^{\omega_{\Delta t}[k]},$$

где  $\varepsilon_{\Delta t}[k]$  — белый гауссов шум с дисперсией  $\sigma_\varepsilon^2 \Delta t$ , а  $\omega_{\Delta t}[k]$  — независимый от него гауссов случайный процесс с корреляцией:

$$\langle \omega_{\Delta t}[k_1] \omega_{\Delta t}[k_2] \rangle = \lambda^2 \ln \rho_{\Delta t}[|k_1 - k_2|],$$

где

$$\rho_{\Delta t}[k] = \begin{cases} \frac{L}{(|k|+1)\Delta t}, & |k| \leq \frac{L}{\Delta t} - 1, \\ 1, & |k| > \frac{L}{\Delta t} - 1. \end{cases}$$

Непосредственные вычисления [4] показывают, что мультифрактальный спектр в этом случае имеет вид

$$\zeta_q = \frac{1}{2} \left( q - q(q-2)\lambda^2 \right), \quad (4)$$

а выражение для момента (1) справедливо лишь при  $l \leq L$ .

Однако данная модель обладает существенным недостатком. Автокорреляция процесса  $\omega(t)$  имеет очевидную асимптотику

$$\langle \omega(t)\omega(t+\tau) \rangle \sim \lambda^2 \ln \left( \frac{L}{\tau} \right), \quad \tau \rightarrow 0,$$

а значит, сам процесс имеет бесконечную дисперсию:  $\langle \omega^2 \rangle \sim \ln(\infty) = \infty$ , что противоречит физическому смыслу. В то же время наличие бесконечной дисперсии позволяет снять внутреннее противоречие данной модели, которая теряет смысл при больших порядках  $q$ , вернее, начиная с некоторого  $q = q^*$ , при котором значение спектра становится равным единице:  $\zeta_{q^*} = 1$ .

Обсужденные выше модели мультифрактальности имели существенные недостатки, от которых избавлена модель квазимultiфрактальности, предложенная в работе [7]. Согласно [11], приращения  $\delta_l X(t)$  на масштабе  $l$  мультифрактального процесса  $X(t)$  представимы в виде

$$\delta_l X(t) = \int_{t-l}^t \xi(t) e^{\omega(t)} dt, \quad (5)$$

где  $\omega(t)$  — некоторый авторегрессионный процесс:

$$\omega(t) = \int_{-\infty}^t \mu(t') h(t-t') dt', \quad (6)$$

а  $\xi(t)$  и  $\mu(t)$  — некоррелированные гауссовы шумы, обладающие корреляционными функциями

$$\langle \xi(t)\xi(t+\tau) \rangle = D_1 \delta(\tau) \quad (7)$$

и

$$\langle \mu(t)\mu(t+\tau) \rangle = D_2 \delta(\tau). \quad (8)$$

Не уменьшая общности можно положить  $\langle \mu(t) \rangle = 0$ . Кроме того, ограничимся здесь рассмотрением только симметричных диффузионных процессов, положив  $\langle \xi(t) \rangle = 0$ .

В качестве ядра  $h(t)$  выберем медленно убывающую функцию:

$$h(t) = \frac{h_0}{(1+t/\tau)^{\varphi+1/2}}. \quad (9)$$

Здесь фигурирует характеристический масштаб  $\tau$ , по аналогии с теорией турбулентности носящий название масштаба вязкости. Вместе со введенным ранее интегральным масштабом, масштаб вязкости задает так называемый инерционный интервал:

$$\tau \ll l \ll L. \quad (10)$$

Как будет видно из расчетов, мультифрактальные свойства процесса  $X(t)$  проявляются именно на данном интервале масштабов. Если это имеет место, то такой процесс будем называть квазимultiфрактальным. Заметим, что введение ограничения на временной масштаб  $l$  не снижает ценности модели, наоборот, обогащает ее дополнительным параметром.

Квазимultiфрактальность описывается ядром (9) с  $\varphi \gtrsim 0$ , в то время как при  $\varphi = 0$  данная модель описывает мультифрактальность с параболическим спектром (4). Добавка малого  $\varphi \ll 1$  в показателе степени в (9) приводит к тому, что корреляция случайного процесса  $\omega(t)$  уже не является логарифмически убывающей, что служило основной причиной возникновения мультифрактальности в модели [4, 5]. Однако в работе [7] было показано, что несмотря на это, ненулевые значения показателя  $\varphi$ , тем не менее, не разрушают мультифрактальных свойств процесса  $X(t)$ .

Параметрами процесса  $X(t)$  являются масштаб вязкости  $\tau$ , показатель  $\varphi$  и коэффициенты  $D_1$  и  $D_2$  в выражении корреляционных функций процессов  $\xi(t)$  и  $\mu(t)$ . Однако, как мы увидим в дальнейшем, более естественно применять комбинированный параметр  $\sigma^2$  (13). Заметим еще, что параметр  $D_1$  входит в моментные функции мультипликативно, поэтому не играет значительной роли; кроме того, удобно рассматривать нормированное время  $y = t/\tau$ . В итоге, предложенный квазимultiфрактальный процесс описывается двумя существенными параметрами  $\sigma^2$  и  $\varphi$ .

### 3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ МУЛЬТИФРАКТАЛЬНЫХ МОМЕНТОВ

Обсудим свойства случайного процесса  $X(t)$ , описываемого выражением для приращений (5) и показателем (6) с ядром (9). Для этого займемся отысканием моментов приращений процесса.

В силу симметричности процесса  $X(t)$ , все нечетные моменты процесса тождественно равны нулю:

$$M_{2m+1}(l) \equiv \langle (\delta_l X(t))^{2m+1} \rangle = 0,$$

где  $m = 0, 1, 2, 3 \dots$

Подробно исследуем свойства четных моментов приращений процесса  $X(t)$ . Второй момент равен:

$$M_2(l) = \langle (\delta_l X(t))^2 \rangle = \left\langle \left( \int_{t-l}^t \xi(t') e^{\omega(t')} dt' \right)^2 \right\rangle.$$

Переходя от квадрата интеграла к двойному интегралу, внося усреднение под знак интеграла, учитывая независимость процессов  $\xi(t)$  и  $\omega(t)$  и используя выражения (7) и (8), имеем

$$M_2(l) = D_1 \int_{t-l}^t \langle e^{2\omega(t')} \rangle dt'.$$

Как видно, для определения искомого момента необходимо найти среднее процесса:

$$\Omega(t) = e^{2\omega(t)}.$$

Очевидно, что процесс  $\omega(t)$ , заданный выражением (6), — гауссов, а значит, процесс  $\Omega(t)$  имеет лог-нормальное распределение. Найдем среднее процесса  $\Omega(t)$  при помощи аппарата характеристической функции. Заметим, что:

$$\langle \omega(t) \rangle = 0, \quad \langle \omega^2(t) \rangle = D_2 \|h\|^2, \quad (11)$$

где введена норма функции-ядра (9):

$$\|h\|^2 = \int_0^\infty h^2(t) dt = \frac{h_0^2 \tau}{2\varphi},$$

а значит, характеристическая функция процесса  $\omega(t)$  равна:

$$\theta_\omega(u) \equiv \langle e^{iu\omega} \rangle = e^{-D_2 \|h\|^2 u^2 / 2},$$

а искомое среднее процесса  $\Omega(t)$ :

$$\langle \Omega(t) \rangle = \langle e^{2\omega} \rangle = \theta_\omega(-2i) = e^{2D_2 \|h\|^2}.$$

В итоге среднее квадрат приращений процесса  $X(t)$

$$M_2(l) = D_1 e^{\sigma^2 / 2} l \quad (12)$$

растет по классическому линейному диффузионному закону. В (12) фигурирует величина

$$\sigma^2 = 4D_2 \|h\|^2 = 2D_2 \frac{h_0^2 \tau}{\varphi}, \quad (13)$$

являющаяся одним из важнейших параметров обсуждаемого в данной статье квазимультифрактального процесса  $X(t)$ .

Перейдем к анализу высших моментов приращений квазимультифрактального процесса  $X(t)$ :

$$M_{2m}(l) \equiv \int_{t-l}^t dt_1 \dots \dots \int_{t-l}^t dt_{2m} \langle \xi(t_1) \dots \xi(t_{2m}) \langle e^{\omega(t_1) + \dots + \omega(t_{2m})} \rangle \rangle.$$

Учитывая гауссовость дельта-коррелированного процесса  $\xi(t)$  с корреляционной функцией (7), получим:

$$M_{2m}(l) = (2m-1)!! D_1^m \int_{t-l}^t dt_1 \dots \dots \int_{t-l}^t dt_m \langle e^{2\omega(t_1) + 2\omega(t_2) + \dots + 2\omega(t_m)} \rangle.$$

Как и в случае второго момента, под знаком усреднения находится лог-нормальный процесс. Среднее показателя экспоненты тривиально:

$$2 \langle \omega(t_1) + \omega(t_2) + \dots + \omega(t_m) \rangle = 0.$$

Дисперсия составляет

$$4 \langle (\omega(t_1) + \omega(t_2) + \dots + \omega(t_m))^2 \rangle = 4m \langle \omega^2(t) \rangle + 4 \sum_{i,j=1; i \neq j}^m \langle \omega(t_i) \omega(t_j) \rangle.$$

Дисперсия процесса  $\omega(t)$  была найдена ранее (11), а функция корреляции равна:

$$\langle \omega(t_i) \omega(t_j) \rangle = D_2 \int_0^\infty h(t') h(t' + |t_i - t_j|) dt'.$$

Аналогично второму моменту, искомое среднее лог-нормального процесса легко находится при помощи аппарата характеристических функций:

$$e^{m\sigma^2/2} \prod_{i=1}^m \prod_{j=i+1}^m \exp \left( \frac{\sigma^2}{\|h\|^2} \int_0^\infty h(t) h(t + |t_i - t_j|) dt \right).$$

После замены переменных и несложных преобразований выражение для четных моментов мультифрактального процесса принимает вид

$$M_{2m}(l) = C_{2m} \int_0^l dt_1 \dots \dots \int_0^l dt_m \prod_{i=1}^m \prod_{j=i+1}^m G \left( \frac{t_i - t_j}{\tau} \right), \quad (14)$$

где

$$C_{2m} = (2m - 1)!! D_1^m e^{m^2 \sigma^2 / 2}$$

и

$$G(y) = e^{\sigma^2(C(y)-1)},$$

$$C(y) = \frac{1}{\|h\|^2} \int_0^\infty h(t)h(t + |y|\tau) dt. \quad (15)$$

#### 4. ЭФФЕКТИВНЫЕ МАСШТАБНЫЕ ПОКАЗАТЕЛИ

Полученные выражения (12) и (14) позволяют определить мультифрактальный спектр исследуемого процесса  $X(t)$ . Определение масштабного показателя для момента второго порядка не вызывает трудностей. Из сравнения выражений (1) и (12) видно, что

$$\zeta_2 = 1.$$

Определение масштабных показателей высших четных моментов не столь тривиально. Для удобства анализа перейдем к изучению нормированных моментных функций. Введем нормированный момент приращений следующим образом:

$$S_{2m}(y) = \frac{M_{2m}(y)}{\tau^m C_{2m}} = \int_0^y dx_1 \int_0^y dx_2 \dots$$

$$\dots \int_0^y dx_m \prod_{i=1}^m \prod_{j=i+1}^m G(x_i - x_j),$$

где  $y = l/\tau$ , а  $x = t/\tau$ . Данное выражение достаточно громоздко как для аналитического, так и для численного рассмотрения, поэтому, прежде чем приступить к дальнейшему анализу, упростим его.

Рассмотрим нормированный момент четвертого порядка:

$$S_4(y) = \int_0^y dx_1 \int_0^y dx_2 G(x_1 - x_2).$$

Положив  $Q = -P = x_1 G(x_1 - x_2)$  и применив формулу Грина

$$\int_0^y \int_0^y \left( \frac{\partial Q}{\partial x_1} - \frac{\partial P}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2 =$$

$$= \int_\gamma (Q dx_2 + P dx_1), \quad (16)$$

где  $\gamma$  — периметр прямоугольника, ограничивающего область интегрирования, получаем упрощенное выражение для нормированного момента:

$$S_4(y) = 2 \int_0^y (y - x) G(x) dx.$$

Нормированный шестой момент, как следует из выражения (16), имеет вид

$$S_6(y) = \int_0^y dx_1 \int_0^y dx_2 \times$$

$$\times \int_0^y dx_3 G(x_1 - x_2) G(x_1 - x_3) G(x_2 - x_3).$$

Продифференцируем последнее выражение по  $y$ :

$$\frac{dS_6}{dy} = 3 \int_0^y dx_1 \int_0^y dx_2 G(x_1 - x_2) G(x_1 - y) G(x_2 - y)$$

и сделаем замену переменных:

$$u = x_1 - y, \quad v = x_2 - y.$$

Получившееся выражение

$$\frac{dS_6}{dy} = 3 \int_0^y du \int_0^y dv G(u - v) G(u) G(v)$$

продифференцируем еще раз:

$$\frac{d^2 S_6}{dy^2} = 6G(y) \int_0^y G(u) G(y - u) du = 6G_3(y).$$

Последнее выражение можно интерпретировать как дифференциальное уравнение относительно функции  $S_6(y)$ . Его решение, удовлетворяющее очевидному начальному условию

$$S_6(0) = \left. \frac{dS_6(y)}{dy} \right|_{y=0} = 0,$$

имеет вид

$$S_6(y) = 6 \int_0^y dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 G(x_2).$$

Аналогично предыдущему случаю, применяя формулу Грина (16) для  $Q = x_1 G_3(x_2)$  и  $P = 0$  имеем окончательное выражение для нормированного шестого момента:

$$S_6(y) = 6 \int_0^y (y-x)G_3(x) dx, \tag{17}$$

где ядро

$$G_3(x) = G(x) \int_0^x G(u)G(x-u) du. \tag{18}$$

Проводя аналогичные выкладки для остальных четных моментов, можно прийти к дифференциальным уравнениям вида

$$\frac{d^2 S_{2m}}{dy^2} = m(m-1)G_m(y),$$

где

$$G_m(x) = G(x) \int_0^x dx_1 \dots \int_0^x dx_{m-2} \times \\ \times \prod_{i=1}^{m-2} G(x_i)G(x-x_i) \prod_{j=i+1}^{m-2} G(x_i-x_j). \tag{19}$$

Решения данных уравнений, аналогично предыдущему, имеют вид

$$S_{2m}(y) = m(m-1) \int_0^y (y-x)G_m(x) dx. \tag{20}$$

Проанализируем полученные выражения для нормированных моментов приращений процесса  $X(t)$ , для чего представим их в степенном виде:

$$S_{2m}(y) = y^{\zeta_{2m}(y)}.$$

Введенную здесь функцию

$$\zeta_{2m}(y) = \frac{y}{S_{2m}(y)} \frac{dS_{2m}(y)}{dy}$$

назовем локальным масштабным показателем. Подставив сюда выражение (20), получим

$$\zeta_{2m}(y) = \frac{2}{2 - \Delta_m(y)}, \tag{21}$$

где

$$\Delta_m(y) = \frac{2\Psi_m(y)}{y}, \tag{22}$$

$$\Psi_m(y) = \int_0^y xG_m(x) dx \left\{ \int_0^y G_m(x) dx \right\}^{-1}.$$

Последняя функция  $\Psi(y)$  имеет прозрачный «механический» смысл — если  $G_m(x)$  представляет собой плотность некоторого вещества, распределенного вдоль оси  $x$ , то функция  $\Psi(y)$  описывает положение центра масс этого вещества на отрезке  $[0, y]$ .

Заметим, что для  $G(y)$ , заданной выражением (15), локальные масштабные показатели  $\zeta_{2m}(y)$  имеют монофрактальные асимптоты при  $y \rightarrow 0$  и  $y \rightarrow \infty$ . Покажем это на примере четвертого момента. При  $y \rightarrow 0$ , как видно из (15),  $C(y) \rightarrow 1$ , а значит, и  $G(y) \rightarrow 1$ . При  $y \rightarrow \infty$  величина  $C(y) \rightarrow 0$ , т. е.  $G(y) \rightarrow e^{-\sigma^2}$ . Соответственно, асимптотики нормированного четвертого момента равны

$$S_4(y) \sim y^2 \quad (y \rightarrow 0), \quad S_4(y) \sim e^{-\sigma^2} y^2 \quad (y \rightarrow \infty),$$

и асимптоты локальных показателей:

$$\lim_{y \rightarrow 0} \zeta_4(y) = \lim_{y \rightarrow \infty} \zeta_4(y) = 2.$$

Аналогичным образом можно найти асимптотики и для высших моментов. В общем случае произвольного натурального  $m$ :

$$\lim_{y \rightarrow 0} \zeta_{2m}(y) = \lim_{y \rightarrow \infty} \zeta_{2m}(y) = m. \tag{23}$$

Асимптотики (23) означают существенную немонотонность функций  $\zeta_{2m}(y)$ , поскольку очевидно, что  $\zeta_{2m}(y) \neq \text{const}$ , и равенство (1) не может быть выполнено строго. Невозможность строгого выполнения равенства (1), однако, не говорит об отсутствии мультифрактальных свойств процесса  $X(t)$ . Так, существует достаточно значительная область масштабов, на которых зависимость  $M_q(l)$  может быть аппроксимирована чисто степенной зависимостью (1). К примеру, график нормированного четвертого момента приращений процесса  $X(t)$  (штриховая линия) и его степенная аппроксимация (сплошная линия) в логарифмическом масштабе для параметров  $\varphi = 0.01$  и  $\sigma^2 = 25$  представлены на рис. 1. Также на рисунке отмечены границы области, на которой проводилась аппроксимация. Как видно на рисунке, данная область составляет 8 порядков, что позволяет говорить о существовании инерционного интервала и ввести понятие квази-мультифрактального процесса.

Уточняя введенное ранее определение, будем называть процесс  $X(t)$  обладающим квазимультифрактальными свойствами, если зависимость нормированного момента  $S_q(l)$  от масштаба  $l$  можно в некотором смысле (едином для всех порядков  $q$ ) аппроксимировать зависимостью

$$\tilde{S}_q(l) = k_q l^{\tilde{\zeta}_q}$$

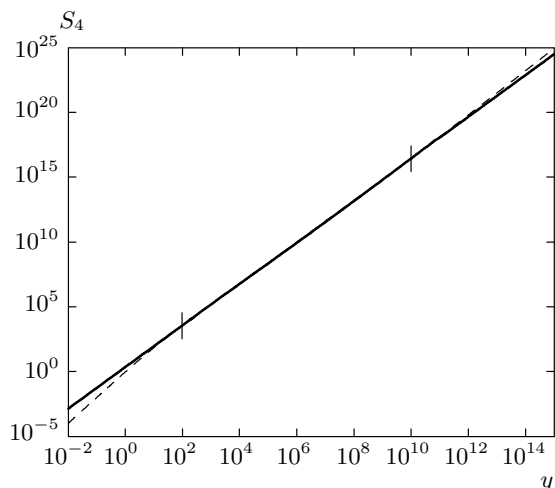


Рис. 1. График четвертого момента  $S_4(l)$  приращений процесса  $X(t)$

на введенном ранее инерционном интервале (10). Здесь  $k_q$  и  $\tilde{\zeta}_q$  — некоторые постоянные величины, зависящие от порядка момента  $q$ . Величины  $\tilde{\zeta}_q$  назовем эффективными масштабными показателями. Спектром квазимультифрактального процесса в таком случае будем называть зависимость  $\tilde{\zeta}_q(q)$ .

Остановимся подробнее на выборе способа определения эффективного показателя. Наиболее простой способ — аппроксимация кривой  $S_q(l)$  степенной зависимостью при помощи метода наименьших квадратов — не дает адекватных результатов.

В самом деле, эффективные масштабные показатели методом наименьших квадратов можно искать либо аппроксимируя зависимость  $\zeta_q(l)$  постоянной величиной  $\tilde{\zeta}_q$ , либо аппроксимируя зависимость  $S_q(l)$  зависимостью  $\tilde{S}_q(l)$ . Первый случай приводит к отысканию минимума функции

$$f_1(\tilde{\zeta}_q; a, b) = \int_a^b (\zeta_q(y) - \tilde{\zeta}_q)^2 dy,$$

где  $a$  и  $b$  — некоторые точки внутри инерционного интервала. Искомый минимум, как несложно показать, находится в центре масс кривой  $\zeta_q(y)$  на отрезке  $[a, b]$ :

$$\tilde{\zeta}_q = \frac{1}{b-a} \int_a^b \zeta_q(y) dy.$$

Во втором случае требуется отыскать минимум функции

$$f_2(\tilde{\zeta}_q; a, b) = \int_a^b (y^{\zeta_q(y)} - y^{\tilde{\zeta}_q})^2 dy.$$

Очевидно, что в обоих случаях  $\tilde{\zeta}_q$  существенно зависит от границ интервала  $a$  и  $b$ . Кажется естественным расширить интервал интегрирования на весь инерционный интервал, положив  $a = \tau$  и  $b = L$ , избавившись тем самым от неоднозначности определения  $\tilde{\zeta}_q$ , однако сама величина  $L$  не может быть введена точно.

Более того, численные расчеты показывают, что зависимость эффективного показателя  $\tilde{\zeta}_q(b)$ , вычисленного при помощи метода наименьших квадратов, от верхнего предела интегрирования ведет себя аналогично зависимости  $\zeta_q(l)$  и при  $a = \tau$  практически полностью повторяет последнюю. Поэтому взяв за определение интегрального масштаба такой масштаб  $L$ , на котором процесс  $X(t)$  становится монофрактальным, мы, фактически, будем рассматривать спектр процесса в области масштабов, на которых преобладают не мультифрактальные, а монофрактальные свойства.

Наиболее адекватным, на наш взгляд, способом определения эффективного масштаба, является метод, учитывающий особенность поведения локального показателя  $\zeta_q(l)$  на инерционном интервале вдали от границ ( $\tau \ll l \ll L$ ), т. е. на масштабах, на которых процесс носит существенно мультифрактальный характер. В данной области масштабов, как показывают приведенные ниже результаты численного счета, зависимость  $\zeta_q$  от  $l$  имеет единственный экстремум (минимум), причем величина этого минимума существенно зависит от параметров процесса  $\varphi$  и  $\sigma^2$ .

Мы будем называть эффективным масштабным показателем величину абсолютного минимума функции  $\zeta_q(l)$  на инерционном интервале  $\tau \ll l \ll L$ :

$$\tilde{\zeta}_q = \min_{\tau \ll y \ll L} \zeta_q(y).$$

### 5. ЧИСЛЕННЫЙ РАСЧЕТ КВАЗИМУЛЬТИФРАКТАЛЬНОГО СПЕКТРА

Как видно из предыдущих выкладок, определение квазимультифрактального спектра сводится к расчету функций (19). С увеличением порядка момента возрастает размерность пространства интегрирования и при порядках, больших 8-го ( $m > 4$ ), задача становится вычислительно сложной. Для уменьшения машинного времени, необходимого для

расчета указанных многомерных интегралов, применялось уменьшение области интегрирования за счет симметрии подынтегрального выражения. Как и раньше, начнем с анализа моментов низших порядков, а затем перейдем к общему выражению для нормированных моментов произвольного порядка.

Начнем с момента шестого порядка (17). Его ядро (18) представляет собой интеграл, подынтегральное выражение которого

$$G(u)G(x - u)$$

симметрично относительно точки  $x/2$ . В самом деле, замена переменных  $v = x - u$  не влияет на вид интеграла. Таким образом, вычисление ядра  $G_3(x)$  можно проводить по следующей «сокращенной» формуле:

$$G_3(x) = 2G(x) \int_0^{x/2} G(u)G(x - u) du.$$

Восьмой момент требует отыскания ядра вида

$$G_4(x) = G(x) \int_0^x dx_1 \int_0^x dx_2 F(x_1, x_2),$$

$$F(x_1, x_2) = G(x_1)G(x_2)G(x - x_1)G(x - x_2)G(x_1 - x_2).$$

Здесь уже подынтегральное выражение обладает симметрией четвертого порядка: относительно замены переменных интегрирования  $(x_1, x_2)$  на  $(x_2, x_1)$ ,  $(x - x_1, x - x_2)$  и  $(x - x_2, x - x_1)$ , что позволяет уменьшить область интегрирования в четыре раза, используя «сокращенную» формулу

$$G_4(x) = 4G(x) \int_0^{x/2} dx_1 \int_{x_1}^{x - x_1} dx_2 F(x_1, x_2).$$

Десятый момент требует вычисления тройного интеграла:

$$G_5(x) = G(x) \int_0^x dx_1 \int_0^x dx_2 \int_0^x dx_3 F(x_1, x_2, x_3),$$

$$F(x_1, x_2, x_3) = G(x_1)G(x_2)G(x_3)G(x - x_1) \times G(x - x_2)G(x - x_3)G(x_1 - x_2)G(x_1 - x_3)G(x_2 - x_3).$$

Симметрия, аналогичная описанной выше, позволяет применять «сокращенную» формулу

$$G_5(x) = 12G(x) \int_0^{x/2} dx_1 \int_{x_1}^{x - x_1} dx_2 \int_{x_1}^{x_2} dx_3 F(x_1, x_2, x_3).$$

Проводя аналогичные выкладки для высших моментов, можно вывести общую «сокращенную» формулу для вычисления  $G_m(x)$  при  $m > 5$ :

$$G_m(x) = NG(x) \int_0^{x/2} dx_1 \int_{x_1}^{x - x_1} dx_2 \int_{x_1}^{x_2} dx_3 \dots \int_{x_1}^{x_{m-3}} dx_{m-2} F(x_1, x_2, \dots, x_{m-2}), \quad (24)$$

где

$$F(x_1, x_2, \dots, x_{m-2}) = \prod_{i=1}^{m-2} G(x_i)G(x - x_i) \prod_{j=i+1}^{m-2} G(x_i - x_j),$$

а

$$N = x^{m-2} \times \left( \int_0^{x/2} dx_1 \int_{x_1}^{x - x_1} dx_2 \int_{x_1}^{x_2} dx_3 \dots \int_{x_1}^{x_{m-3}} dx_{m-2} \right)^{-1}. \quad (25)$$

Прямые вычисления последнего интеграла показывают, что применяя «сокращенную» формулу для вычисления  $G_m(x)$ , можно уменьшить область интегрирования, а значит, и время вычислений, в  $N = 2(m - 2)!$  раз. Кроме того, использование «сокращенных» формул позволяет избежать интегрирования на диагоналях многомерного параллелепипеда, где производная функции  $F(x_1, x_2, \dots, x_{m-2})$  терпит разрыв, что позволяет применять облегченные квадратурные формулы.

Таким образом, после вычисления ядра  $G_m(x)$  по формуле (24) и подстановки его в выражения (22), по формуле (21) можно найти вид локального показателя. Кроме того, для ускорения вычислений можно заранее вычислить значения функции  $G(x)$  (15) на исследуемом интервале.

На рис. 2–6 представлены результаты численных расчетов локальных масштабных показателей  $\zeta_q(l)$  рассматриваемого процесса  $X(t)$  для следующих значений параметров:  $\varphi = 0.03$ ,  $\sigma^2 = 1; 2; 3; 4; 5$ .

Зная эффективные показатели  $\zeta_q$  для  $q = 0; 2; 4; 6; 8; 10; 12$ , можно получить вид мультифрактального спектра (рис. 7).

Здесь кружками показаны результаты численного счета, а сплошной линией — аппроксимация данного спектра выражением (4) по методу наименьших квадратов. Как видно, теоретический спектр



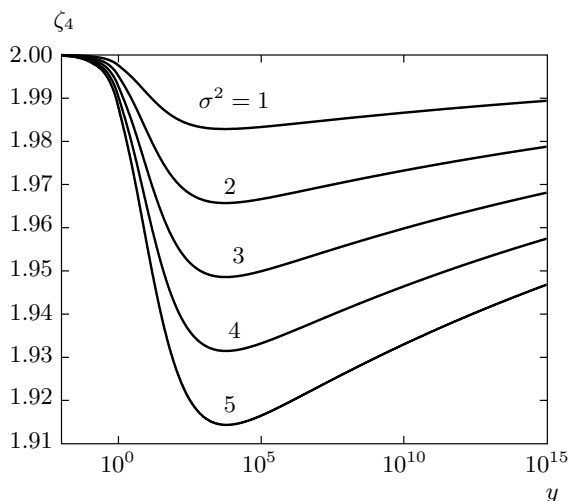


Рис. 2. График локального показателя  $\zeta_4(y)$

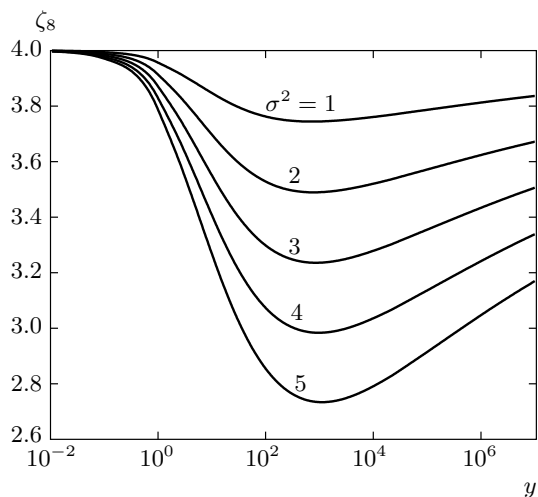


Рис. 4. График локального показателя  $\zeta_8(y)$

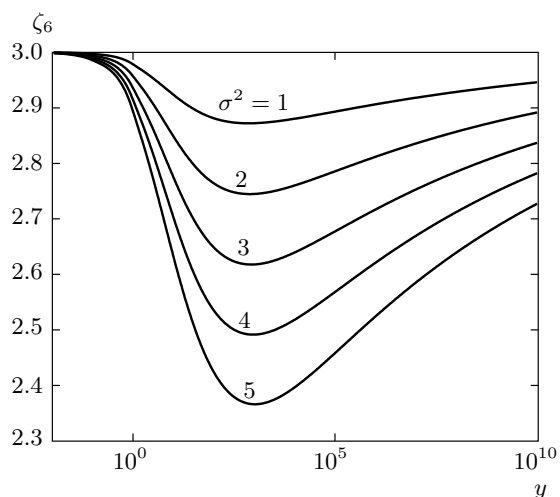


Рис. 3. График локального показателя  $\zeta_6(y)$

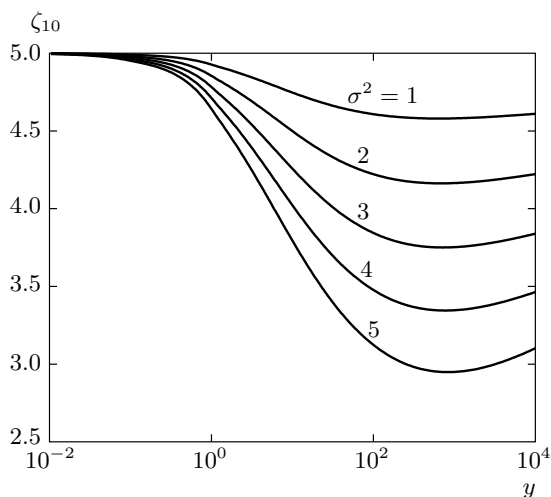


Рис. 5. График локального показателя  $\zeta_{10}(y)$

модели мультифрактальных случайных блужданий хорошо описывает спектр квазимультифрактальности для рассмотренных значений параметров. Более того, коэффициент  $\lambda^2$  в формуле (4) линейно зависит от параметра  $\sigma^2$  (рис. 8):

$$\lambda^2 = a\sigma^2, \quad a \approx 0.0102.$$

### 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье обсужден способ отыскания мультифрактального спектра процесса, описанного при помощи квазимультифрактальной модели. В рассмотренной области параметров вычисленный спектр хорошо согласуется со спектром, полученным при по-

моши модели мультифрактальных случайных блужданий, однако для того, чтобы определить дальнейшее поведение кривой  $\tilde{\zeta}_q(q)$ , необходимо знать высшие моменты. Приведенная в статье «сокращенная формула» позволяет существенно облегчить вычисления эффективных масштабных показателей. Тем не менее, вычислительная сложность данной задачи настолько высока, что определить высшие (старше 7-го) эффективные показатели в разумное время на данный момент не представляется возможным. Однако мы надеемся, что после совершенствования алгоритмов вычисления, необходимые показатели смогут быть найдены, что позволит дать ответ на вопрос о форме спектра квазимультифрактально-

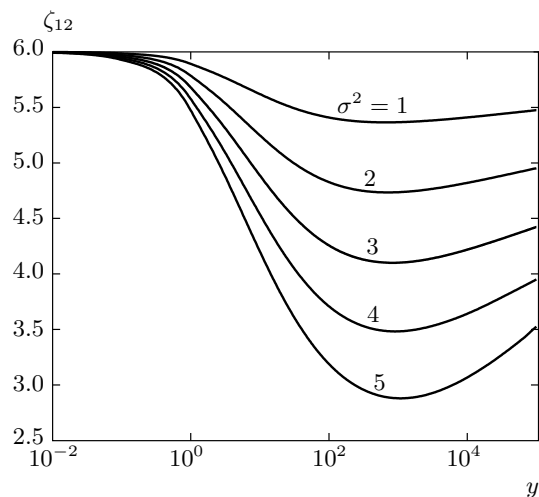


Рис. 6. График локального показателя  $\zeta_{12}(y)$

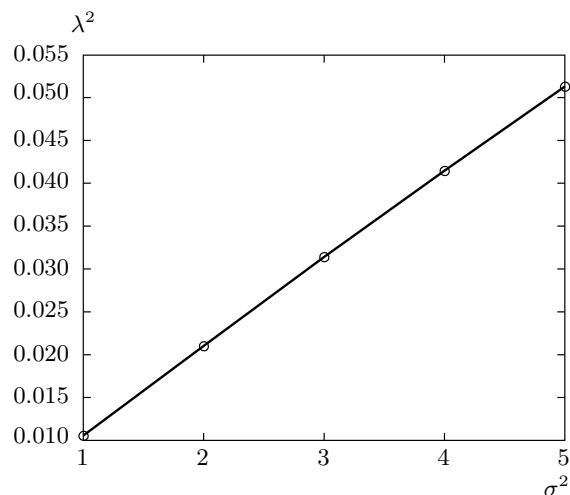


Рис. 8. Зависимость коэффициента  $\lambda^2$  от параметра  $\sigma^2$

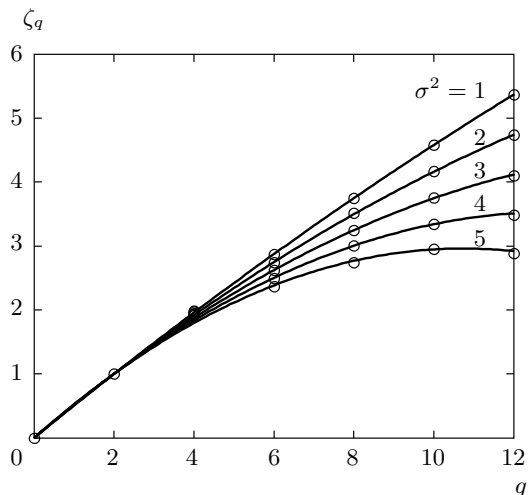


Рис. 7. Вид мультифрактального спектра  $\zeta_q$

го случайного процесса и характере отклонения его от известного параболического спектра мультифрактальности (4).

Большое внимание в статье было уделено проблеме выбора эффективных масштабных показателей, составляющих мультифрактальный спектр. Несмотря на то, что предложенное в статье решение, на наш взгляд, является наиболее естественным и логичным, возможность более аккуратного определения мультифрактального спектра требует дополнительных исследований. Дальнейшие работы, направленные на описание реальных физических процессов при помощи данной модели, позволят дать окончательный ответ на данный вопрос.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты №№ 06-02-16414а, 05-02-16517а), а также в рамках программы по поддержке Ведущих научных школ (грант НШ-5200.2006.2).

### ЛИТЕРАТУРА

1. А. Н. Колмогоров, ДАН СССР XXXI (1941), с. 99.
2. В. В. Mandelbrot, *On Intermittent Free Turbulence, Turbulence of Fluids and Plasmas*, New York Interscience (1969).
3. В. Pochart and J.-P. Bouchaud, *Quantitative Finance*, **2**, 303 (2002).
4. E. Bacry, J. Delour, and J.-F. Muzy, *Phys. Rev. E* **64**, 026103 (2001).
5. E. Bacry, J. Delour, and J.-F. Muzy, E-print archives, cond-mat/0009260.
6. E. Bacry and J.-F. Muzy, *Comm. Math. Phys.* **236**, 449 (2003).
7. A. Saichev and D. Sornette, *Phys. Rev. E* **74**, 011111-1 (2006).
8. E. A. Novikov, *Phys. Fluids, A* **2**, 814 (1990).
9. R. Friedrich and J. Peinke, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 863 (1997).
10. B. Castaing, Y. Gagne, and E. Hopfinger, *Physica D* **46**, 177 (1990).
11. D. Sornette, Y. Malevergne, and J.-F. Muzy, *Risk* **16**, 67 (2003).