

ИОНИЗАЦИЯ В КВАНТОВАННОМ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

И. А. Гоносков, Г. А. Вугальтер, В. А. Миронов*

*Институт прикладной физики Российской академии наук
603950, Нижний Новгород, Россия*

Поступила в редакцию 2 мая 2007 г.

С помощью решения задачи о взаимодействии электрона с квантованным электромагнитным полем найдено аналитическое выражение для матричного элемента перехода из связанного состояния электрона в атоме в состояния непрерывного спектра. На основе этого выражения получены формулы для спектра фотоэлектронов и скорости ионизации простейшей модельной атомной системы при поглощении произвольного числа фотонов. Проведен анализ найденных выражений и сравнение с соответствующими результатами, полученными в рамках других подходов. Показаны отличия от случая классического поля, в частности, наличие провалов в спектре фотоэлектронов, возникающих из-за деструктивной интерференции амплитуд перехода в квантованном поле.

PACS: 32.80.-t, 32.80.Fb, 32.80.Rm, 42.50.Ct

1. ВВЕДЕНИЕ

Явление ионизации атомов в электромагнитных полях играет важную роль во многих областях современной физики. Будучи по существу квантовым пороговым эффектом, процесс фотоотрыва электрона часто довольно хорошо описывается в рамках полуклассического подхода, когда квантовомеханически рассматривается лишь атомная система [1, 2]. Развитие полностью квантовой теории ионизации атома представляет самостоятельный фундаментальный интерес. В значительной мере оно стимулировалось созданием теории неклассических состояний электромагнитного поля [3, 4], а позднее — их экспериментальным наблюдением (см. в [3, 4]). С одной стороны, такие квантовые состояния могут содержать сколь угодно большое число фотонов. С другой стороны, в отличие от классического поля присутствие квантовых шумов является принципиально важным, и такое поле нельзя описывать в рамках одних лишь классических уравнений Максвелла. Так, например, в случае ионизации, когда скорость ионизации является сильно нелинейной функцией интенсивности, результат определяется не средним полем $\bar{\varepsilon}$, а полным состоянием поля

$\varepsilon = \bar{\varepsilon} + \Delta\varepsilon$ ($\Delta\varepsilon$ — квантовая дисперсия). Отличия особенно заметны для состояния сжатого вакуума ($\bar{\varepsilon} = 0$, $\Delta\varepsilon \neq 0$), в котором, несмотря на то что средняя амплитуда поля равна нулю, может содержаться сколь угодно большое среднее число фотонов [3]. При этом ионизация атомов электромагнитным полем в состоянии «сжатого» вакуума может идти существенно быстрее, чем в классических состояниях с тем же средним числом фотонов [5]. Другим стимулом к развитию полностью квантовой теории является необходимость создания квантовой теории фотодетектирования и развития теории взаимодействия высокочастотного излучения с веществом (когда происходят переходы с участием малого числа квантов поля). Естественно, что в последовательной квантовой теории, когда и атомная подсистема, и электромагнитное поле описываются квантовомеханически, можно ожидать появления нового круга эффектов, которых нет в рамках традиционного полуклассического подхода.

Настоящая работа посвящена построению полностью квантовой теории взаимодействия электромагнитного поля с веществом, в которой волновые функции стационарных состояний системы и матричные элементы перехода вычисляются без использования теории возмущений. При этом в рамках полностью квантового подхода удастся получить анали-

*E-mail: gonoskov@ufp.appl.sci-nnov.ru

тические решения и обнаружить ряд новых эффектов. В следующем разделе описывается постановка задачи. Далее проведена процедура диагонализации гамильтониана, описывающего электромагнитное поле и электрон в отсутствие атомного потенциала; найдены уровни энергии и волновые функции стационарных состояний. Определена и проанализирована энергия взаимодействия электрона и электромагнитного поля. В разд. 4 обсуждаются особенности оператора взаимодействия электрона с квантованным полем и соответствующий ему матричный элемент перехода. Показано существенное различие полностью квантового и полуклассического подходов. В следующем разделе полученные ранее результаты применены для расчета общего выражения для матричного элемента перехода электрона из связанного состояния в состояние непрерывного спектра. В разд. 6 эти матричные элементы использованы для расчета скорости ионизации электрона квантованным полем из ямы с одним уровнем при поглощении произвольного числа фотонов. При этом подробно рассмотрены как однофотонный, так и многофотонный процессы ионизации. Значительное внимание также уделено выводу и анализу выражения, описывающего спектр фотоэлектронов в различных случаях. В Заключении проанализированы основные особенности квантового описания электромагнитного поля при рассмотрении его взаимодействия с электроном и атомными системами.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Будем считать, что на атом действует непрерывное излучение лазерного импульса, что соответствует достаточно длинному импульсу одной главной моды электромагнитного поля на частоте ω_d с волновым вектором \mathbf{k}_{fd} . Индекс d означает, что речь идет о размерных величинах. Рассмотрим нерелятивистское взаимодействие этого поля с электроном, локализованным в потенциале $U(\mathbf{r}_d)$, в рамках нестационарного уравнения Шредингера:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t_d} = \frac{1}{2m_e} \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_d} + \frac{e}{c} \hat{\mathbf{A}} \right)^2 + \hat{H}_f - eU(\mathbf{r}_d). \quad (1)$$

Здесь

$$\hat{\mathbf{A}} = \sqrt{\frac{2\pi c^2 \hbar}{\omega_d V_d}} \{ \mathbf{s} \exp(i\omega_d t_d - i\mathbf{k}_{fd} \cdot \mathbf{r}_d) \hat{a} + \mathbf{s}^* \exp(-i\omega_d t_d + i\mathbf{k}_{fd} \cdot \mathbf{r}_d) \hat{a}^\dagger \}$$

— векторный потенциал электромагнитного поля,

$$\hat{H}_f = \hbar\omega_d \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right)$$

— гамильтониан электромагнитного поля, \mathbf{s} — единичный вектор поляризации, V_d — объем квантования (объем, в котором мы накладываем периодические условия Борна–Кармана для электромагнитного поля), \hat{a}^\dagger , \hat{a} — операторы рождения и уничтожения фотонов.

Переход к полуклассическому описанию в такой системе возможен, если мы примем, как минимум, следующие условия. Во-первых, общая энергия поля много больше других энергетических масштабов задачи, т. е. гамильтониан поля при взаимодействии практически не меняется: $\hat{H}_f \rightarrow \text{const}$. Во-вторых, при ионизации величина энергии перехода электрона из связанного состояния в состояние непрерывного спектра должна быть много больше энергии фотона поля, для того чтобы была возможность использовать полуклассическое описание для данного оператора перехода ([6], сноска на с. 353). В-третьих, среднее число фотонов поля должно быть велико, а состояния, отвечающие определенному числу фотонов, подчиняться пуассоновской статистике. При этом в случае $\langle A \rangle \gg \Delta A$ (ΔA — квантовая дисперсия) электронная и полевая части в гамильтониане (1) разделяются и в дальнейшем можно перейти к классическому описанию электромагнитного поля как отдельной независимой системы.

Все эти условия накладывают достаточно существенные ограничения на задачи, которые можно рассматривать в рамках полуклассического подхода. Однако, как будет показано в настоящей работе, в ряде случаев даже эти условия не являются достаточными. Задача данной работы состоит не только в том, чтобы получить выражения для скорости ионизации атома и спектра фотоэлектронов при полностью квантовом подходе, но и сравнить данные результаты с результатами, полученными на основе полуклассического подхода, и в рамках конкретной задачи проанализировать условия перехода к полуклассическому описанию в смешанных электронно-полевых системах.

Для дальнейшего анализа воспользуемся дипольным приближением, т. е. будем интересоваться процессами, для которых $\mathbf{k}_{fd} \cdot \mathbf{r}_d \ll 1$, тогда уравнение (1) примет вид

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t_d} = \frac{1}{2m_e} \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_d} + \sqrt{\frac{2\pi e^2 \hbar}{\omega_d V_d}} \times \left(\mathbf{s} e^{i\omega_d t_d} \hat{a} + \mathbf{s}^* e^{-i\omega_d t_d} \hat{a}^\dagger \right) \right)^2 + \hat{H}_f - eU(\mathbf{r}_d). \quad (2)$$

Отметим, что при такой постановке задачи мы мо-

жем рассматривать как взаимодействие атома с достаточно длинным лазерным импульсом (соответствует «резонатору бегущей волны»), так и его взаимодействие с электромагнитным полем в некотором физическом резонаторе (например, микрополости [7, 8]).

Для анализа взаимодействия лазерного излучения с веществом в данной работе мы используем запись уравнения Шредингера в калибровке скорости. Вопрос выбора калибровки подробно обсуждался в литературе (см., например, [4]), мы же заметим, что в дипольном приближении рассматриваемое нами уравнение Шредингера, является калибровочно инвариантным с точностью до члена порядка V_d^{-1} , который не зависит от полевой переменной. При этом переход от одной калибровки к другой осуществляется в данном уравнении преобразованием вида $\exp[i\frac{e}{c\hbar}\hat{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{r}_d]$. В данной работе мы в основном интересуемся случаем сильного электромагнитного поля, когда число фотонов поля велико и $V_d \rightarrow \infty$ (их отношение пропорционально интенсивности), поэтому калибровку скорости мы выбрали из соображений удобства получения и интерпретации результатов.

Для изучения процесса ионизации атома воспользуемся известным выражением для расчета скорости ионизации (аналог приближения Келдыша для ионизации атома сильным классическим электромагнитным полем [1]):

$$w = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |T_{fi}|^2 \delta(E_f - E_i) dk, \quad (3)$$

где T_{fi} — матричный элемент перехода системы из начального состояния с энергией E_i в конечное состояние с энергией E_f . При этом в начальном состоянии мы будем пренебрегать влиянием электромагнитного поля на волновую функцию электрона в связанном состоянии атома, а в конечном состоянии будем точно учитывать взаимодействие электрона с электромагнитным полем в континууме, пренебрегая взаимодействием с атомным потенциалом. Особенностью нашего подхода будет являться то, что для вычисления матричного элемента перехода мы будем использовать волновые функции и оператор взаимодействия, полученные в рамках квантового описания электромагнитного поля.

Сначала найдем волновые функции, отвечающие стационарным состояниям системы, содержащей электрон и квантованное электромагнитное поле. Далее вычислим матричный элемент перехода из связанного состояния электрона в атоме и сво-

бодного электромагнитного поля в возможные стационарные состояния такой взаимодействующей системы. И наконец, используя найденный матричный элемент и выражение (3) для вероятности перехода в единицу времени, вычислим спектр фотоэлектронов и скорость ионизации атома. При этом во всех случаях будем использовать квантовое описание электромагнитного поля. В заключение проведем сравнение полученных результатов с данными других подходов.

3. ДИАГНОАЛИЗАЦИЯ ГАМИЛЬТониАНА

Исследуем сначала взаимодействие электрона с одной модой квантованного электромагнитного поля на частоте ω_d . Для этого рассмотрим стационарное уравнение Шредингера

$$\hat{H}_d \psi = E_d \psi. \quad (4)$$

Полный гамильтониан задачи \hat{H}_d имеет вид (рассмотрим случай линейной поляризации поля, будем считать, что векторный потенциал поля $\hat{\mathbf{A}}$ направлен вдоль оси x)

$$\hat{H}_d = \frac{1}{2m_e} \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x_d} + \frac{e}{c} \hat{A} \right)^2 + \frac{1}{2m_e} \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial y_d} \right)^2 + \frac{1}{2m_e} \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial z_d} \right)^2 + \frac{\hbar\omega_d}{2} \left[q^2 + \left(-i \frac{\partial}{\partial q} \right)^2 \right], \quad (5)$$

где последнее слагаемое отвечает гамильтониану электромагнитного поля. Векторный потенциал \hat{A} в дипольном приближении связан с безразмерной переменной квантованного электромагнитного поля q следующим образом:

$$\hat{A} = \sqrt{\frac{2\pi c^2 \hbar}{\omega_d V_d}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) = \sqrt{\frac{4\pi c^2 \hbar}{\omega_d V_d}} q. \quad (6)$$

Здесь мы выбираем «координатное» представление для операторов рождения и уничтожения фотонов [3]:

$$\hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(q - \frac{\partial}{\partial q} \right), \quad \hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(q + \frac{\partial}{\partial q} \right).$$

Отметим, что аналогичная задача для уравнения Дирака была решена впервые в работе Берсона [9], а позднее в работе [10]. В этих работах были найдены волновые функции электрона в квантованном поле монохроматической электромагнитной волны и показаны отличия от случая классического поля. Однако общие выражения для этих функций оказались довольно громоздкими и неудобными

для дальнейшего их применения. В нерелятивистском пределе аналогичные волновые функции были найдены в работе [11] с использованием операторов Столера [3, 12], что также привело к существенному усложнению теории. В настоящей работе мы, используя уравнение Шредингера, будем изначально изучать нерелятивистский предел и попытаемся аналитически получить полную систему собственных функций исходного гамильтониана в простом и удобном для дальнейшего применения виде.

Поскольку кинетическая энергия электрона, отвечающая y - и z -компонентам импульса, в выражение для гамильтониана (5) входит аддитивно, будем для простоты далее рассматривать только первое и последнее слагаемые исходного гамильтониана, считая, что волновой вектор электрона \mathbf{k}_d направлен вдоль оси x . Имея в виду в дальнейшем задачу об ионизации, приведем величины к безразмерному виду:

$$k_d \kappa^{-1} \rightarrow k, \quad \kappa x_d \rightarrow x, \quad \frac{m_e \hat{H}_d}{\hbar^2 \kappa^2} \rightarrow \hat{H},$$

$$\frac{m_e E_d}{\hbar^2 \kappa^2} \rightarrow E, \quad \frac{m_e \hbar \omega_d}{\hbar^2 \kappa^2} \rightarrow \omega,$$

где

$$\kappa = \frac{1}{r_b} = \frac{m_e e^2}{\hbar^2}.$$

В итоге приходим к следующему гамильтониану:

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \left(-i \frac{\partial}{\partial x} + \beta q \right)^2 + \frac{\omega}{2} \left(q^2 - \frac{\partial^2}{\partial q^2} \right), \quad (7)$$

где

$$\beta = \frac{\hbar}{m_e e} \sqrt{\frac{4\pi\hbar}{\omega_d V}}$$

— константа взаимодействия,

$$\omega = \omega_d \frac{\hbar^3}{m_e e^4}$$

— безразмерная частота, x, q — соответственно безразмерные электронная и полевая координаты.

Гамильтониан (7) легко диагонализировать в импульсном представлении [11]. Однако для дальнейшего удобно воспользоваться следующим унитарным преобразованием: $\psi(x, q) = \hat{D}\phi(x, q)$, где

$$\hat{D} = \exp \left(-\frac{i\beta}{\omega + \beta^2} \frac{\partial}{\partial q} \frac{\partial}{\partial x} \right). \quad (8)$$

При этом гамильтониан преобразуется к виду (см. Приложение А)

$$\hat{H}'(x, q) = \hat{D}^{-1} \hat{H} \hat{D} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\omega}{\omega + \beta^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \left[(\omega + \beta^2) q^2 - \omega \frac{\partial^2}{\partial q^2} \right]. \quad (9)$$

Введем новую координату Q и частоту Ω :

$$Q = q \sqrt{1 + \frac{\beta^2}{\omega}}, \quad \Omega = \omega \sqrt{1 + \frac{\beta^2}{\omega}},$$

тогда гамильтониан (9) будет иметь вид

$$\hat{H}'(x, Q) = -\frac{1}{2} \frac{1}{1 + \beta^2/\omega} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\Omega}{2} \left[Q^2 - \frac{\partial^2}{\partial Q^2} \right]. \quad (10)$$

Его собственные значения представляют собой сумму собственных значений гамильтонианов «одетого» электрона и «одетого» электромагнитного поля:

$$E(k, n, \omega, \beta) = \frac{1}{1 + \beta^2/\omega} \frac{k^2}{2} + \omega \sqrt{1 + \frac{\beta^2}{\omega}} \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad (11)$$

где k — волновое число электрона, $n = 0, 1, 2, \dots$ — число «одетых» фотонов. Как показывает выражение (11), взаимодействие между подсистемами ($\beta \neq 0$) приводит к увеличению массы «электрона» и возрастанию частоты «кванта» электромагнитного поля резонатора. Из (11) следует также, что в присутствии электромагнитного поля масса взаимодействующего с ним электрона становится анизотропной. Так, в случае линейной поляризации поля (векторный потенциал направлен вдоль оси x) кинетическая энергия электрона равна

$$K = \frac{1}{1 + \beta^2/\omega} \frac{k_x^2}{2} + \frac{k_y^2}{2} + \frac{k_z^2}{2}. \quad (12)$$

Данная анизотропия связана с появлением электромагнитной составляющей массы электрона, взаимодействующего с полем.

Используя формулу (11), запишем теперь собственные значения гамильтониана (7) в следующем виде:

$$E(k, n, \omega, \beta) = \frac{k^2}{2} + \omega \left(n + \frac{1}{2} \right) + W_{int}(k, n, \omega, \beta), \quad (13)$$

где определим величину

$$W_{int}(k, n, \omega, \beta) = E(k, n, \omega, \beta) - E(k, n, \omega, 0).$$

Ее можно рассматривать как энергию взаимодействия электрона с одной модой электромагнитного поля. Общее выражение для энергии взаимодействия можно записать в следующем виде:

$$W_{int}(k, n, \omega, \beta) = -\frac{k^2}{2} \frac{\beta^2}{\omega} \frac{1}{1 + \beta^2/\omega} + \omega \left(n + \frac{1}{2} \right) \left[\sqrt{1 + \frac{\beta^2}{\omega}} - 1 \right]. \quad (14)$$

Из этого соотношения видно, что энергия взаимодействия электрона и электромагнитного поля в общем случае определяется всеми параметрами задачи и не является положительно определенной. Первое слагаемое в (14) описывает вклад поля в электромагнитную часть массы электрона, второе слагаемое в (14) описывает изменение частоты электромагнитного поля в резонаторе в присутствии заряженной частицы.

Найдем теперь собственные функции гамильтониана (7). Поскольку собственные функции гамильтониана (10) имеют вид

$$\phi_{k,n}(x, q) = \frac{C \exp(ikx)}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} \left(1 + \frac{\beta^2}{\omega}\right)^{-7/8} \times \exp\left(-\frac{q^2}{2} \sqrt{1 + \frac{\beta^2}{\omega}}\right) H_n\left(q \sqrt{1 + \frac{\beta^2}{\omega}}\right), \quad (15)$$

где H_n — полином Эрмита, C — нормировочная константа волновой функции электрона, окончательно находим

$$\begin{aligned} \psi_{k,n}(x, q) &= \hat{D}^{-1} \phi_{k,n}(x, q) = \\ &= \frac{C e^{ikx}}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} \left(1 + \frac{\beta^2}{\omega}\right)^{-7/8} \times \\ &\times \exp\left\{-\frac{1}{2} \left(q \sqrt{1 + \frac{\beta^2}{\omega}} + \frac{k\beta}{\omega} \left(1 + \frac{\beta^2}{\omega}\right)^{-3/4}\right)^2\right\} \times \\ &\times H_n\left(q \sqrt{1 + \frac{\beta^2}{\omega}} + \frac{k\beta}{\omega} \left(1 + \frac{\beta^2}{\omega}\right)^{-3/4}\right). \quad (16) \end{aligned}$$

Отсюда видно, что состояния системы, описываемой гамильтонианом (7), не могут быть выражены через состояния с заданным числом «чистых» фотонов. Иными словами, волновые функции (16) можно представить только в виде бесконечного ряда по волновым функциям гармонического осциллятора, соответствующим состояниям поля с заданным числом «чистых» фотонов:

$$\psi_{k,n}(x, q) = C e^{ikx} \sum_{j=0}^{\infty} C_j f_j(q), \quad (17)$$

где

$$f_j(q) = \frac{1}{\sqrt{2^j j! \sqrt{\pi}}} e^{-q^2/2} H_j(q)$$

— волновая функция гармонического осциллятора, отвечающая состоянию с j фотонами, C_j — соответствующие коэффициенты разложения.

Остановимся подробнее на таких параметрах задачи, как β^2/ω и $k\beta/\omega$.

Первый из них можно записать двумя способами. Во-первых,

$$\frac{\beta^2}{\omega} = \frac{\omega_p^2}{\omega^2}, \quad (18)$$

где

$$\omega_p = \sqrt{\frac{4\pi e^2}{m_e V_d}} \frac{\hbar^3}{m_e e^4}$$

— безразмерная «плазменная» частота «плазмы» в резонаторе с концентрацией электронов, равной $1/V_d$ (соответствует одному электрону во всем объеме резонатора). Во-вторых, если обозначить через ε_d^2 среднее значение (в квантовомеханическом смысле) квадрата модуля амплитуды электрического поля, определяемое соотношением

$$\hbar\omega_d \left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{\varepsilon_d^2}{8\pi} V_d, \quad (19)$$

то можно написать:

$$\frac{\beta^2}{\omega} = 2 \frac{m_e v^2 / 2}{n\omega}, \quad (20)$$

где

$$\frac{m_e v^2}{2} = \frac{e^2 \varepsilon_d^2}{4m_e \omega_d^2} \frac{\omega}{\hbar\omega_d}$$

— безразмерная средняя осцилляторная энергия электрона в электромагнитном поле (v — средняя осцилляторная скорость электрона в периодически меняющемся (синусоидальном) поле). При этом стоит заметить, что параметр $m_e v^2 / 2\omega$, который в литературе часто называют квантовым пондеромоторным параметром, играет важную роль в описании многих уже изученных квантовых эффектов взаимодействия заряженных частиц и электромагнитного поля [4].

Второй параметр нашей задачи можно выразить через первый следующим образом:

$$\frac{k\beta}{\omega} = \sqrt{\frac{k^2}{\omega}} \sqrt{\frac{\beta^2}{\omega}}. \quad (21)$$

Согласно (20), в большинстве задач взаимодействия сильного электромагнитного излучения с веществом параметр β^2/ω мал за счет огромного числа фотонов. Интересное исключение может составлять случай, когда заряженная частица помещена в микрополость [7, 8]. Другое исключение составляет случай низкой частоты электромагнитного поля, когда $\omega \rightarrow 0$. В этих случаях энергия электромагнитного поля в резонаторе, $n\hbar\omega_d$, может быть сравнима или даже меньше, чем другие характерные для задачи энергии (осцилляторная, кинетическая и т. п.).

В дальнейшем для простоты будем считать, что $\beta^2/\omega \ll 1$, а также, что $n \gg 1$, $n\omega \gg k^2/2$ и соответственно $k\beta/\omega \ll 1$, но $k^2/\omega \gg \beta^2/\omega$ за счет большого числа фотонов. При этом запишем

$$1 \gg \frac{k\beta}{\omega} = \sqrt{\frac{k^2}{\omega}} \sqrt{\frac{\beta^2}{\omega}} \gg \frac{\beta^2}{\omega}. \quad (22)$$

При таких условиях из выражений (11) и (20) легко получить, что энергии уровней имеют вид

$$E(k, n) = \frac{k^2}{2} + n\omega + \frac{m_e v^2}{2}. \quad (23)$$

В дальнейшем, считая β^2/ω малым параметром задачи, попытаемся правильно учесть все члены порядка

$$n \frac{\beta^2}{\omega} = 2 \frac{m_e v^2}{2\omega}.$$

При этом в работе будем использовать интегралы от найденных волновых функций (16), что, ввиду свойств функций Эрмита, дает нам возможность ограничиться областью $|q| \leq \sqrt{n}$. При наложении условий (22) из формулы (16) можно получить следующие выражения для собственных функций (при $|q| \leq \sqrt{n}$):

$$\begin{aligned} \psi_{k,n}(x, q) &= \frac{C e^{ikx}}{\sqrt{2^n n!} \sqrt{\pi}} \times \\ &\times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(q + \frac{k\beta}{\omega} \right)^2 \right\} H_n \left(q + \frac{k\beta}{\omega} \right). \quad (24) \end{aligned}$$

Именно область изменения параметра $|q| \leq \sqrt{n}$ дает основной вклад в интегралы, определяющие матричные элементы переходов.

4. МАТРИЧНЫЙ ЭЛЕМЕНТ ПЕРЕХОДА ПОД ДЕЙСТВИЕМ КВАНТОВАННОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Результаты, полученные в предыдущем разделе, позволяют найти матричный элемент перехода T_{fi} из произвольного начального состояния ψ_i в одно из стационарных состояний ψ_f полного набора функций (16), описывающих систему «электрон + поле».

Итак, нам необходимо найти матричный элемент

$$T_{fi} = \langle \psi_f(x, q) | \hat{I}(x, q) | \psi_i(x, q) \rangle. \quad (25)$$

Оператор взаимодействия $\hat{I}(x, q)$ в выбранной нами калибровке имеет вид

$$\begin{aligned} \hat{I}(x, q) &= \frac{e}{m_e c} \mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{A}} + \frac{e^2}{2m_e c^2} \hat{\mathbf{A}}^2 = \\ &= -i\beta q \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\beta^2 q^2}{2}, \quad (26) \end{aligned}$$

где \mathbf{p} — оператор импульса электрона. Обратим внимание на принципиальную разницу между квантовым и классическим описаниями электромагнитного поля, взаимодействующего с электроном. Дело в том, что при классическом описании поля в дипольном приближении в операторе взаимодействия

$$\hat{I}_{d,cl}(\mathbf{p}, \mathbf{A}) = \frac{e}{m_e c} \mathbf{p} \cdot \mathbf{A} + \frac{e^2}{2m_e c^2} \mathbf{A}^2 \quad (27)$$

последний член (пропорциональный \mathbf{A}^2) часто не учитывают. При классическом описании поля от него действительно можно избавиться фазовым преобразованием. Совершенно иначе обстоит дело в случае квантованного поля. Очевидно, что не существует преобразования, позволяющего убрать аналогичный последний член в выражении (26), существенно не изменив при этом исходный гамильтониан. Более того, в сильном электромагнитном поле этот член часто может быть более существенным, чем первый. Даже в том случае, когда сам он мал по сравнению с первым членом, величина соответствующего матричного элемента может быть порядка или даже больше величины матричного элемента, соответствующего первому члену в операторе взаимодействия. В дальнейшем рассмотрим более подробно особенности взаимодействия, связанные с этим членом.

5. ИОНИЗАЦИЯ ПРОСТЕЙШЕГО МОДЕЛЬНОГО АТОМА В КВАНТОВАННОМ ПОЛЕ

Рассмотрим одномерную модель одноуровневого атома, находящегося в резонаторе в присутствии электромагнитного поля. Пусть сначала электрон находится в основном состоянии в потенциальной яме с одним дискретным уровнем (в дельта-потенциале), а невозмущенное квантованное электромагнитное поле содержит n фотонов на частоте ω_d . Обозначим энергию электрона, находящегося в яме, как $-E_{\delta d} < 0$. Тогда начальную волновую функцию системы можно записать в безразмерных координатах в следующем виде:

$$\psi_i(x, q) = \sqrt{\alpha} e^{-\alpha|x|} \frac{1}{\sqrt{2^n n!} \sqrt{\pi}} e^{-q^2/2} H_n(q), \quad (28)$$

где $\alpha = \sqrt{2E_{\delta d}}$ зависит от энергии электрона в основном состоянии,

$$E_{\delta} = \frac{m_e E_{\delta d}}{\hbar^2 \kappa^2}.$$

Далее будем считать, что после ионизации при поглощении $l = n - m$ фотонов волновая функция элек-

трона и взаимодействующего с ним электромагнитного поля согласно (24) будет иметь вид

$$\psi_f(x, q) = \frac{C \exp(ikx)}{\sqrt{2^m m!} \sqrt{\pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(q + \frac{k\beta}{\omega} \right)^2 \right\} \times H_m \left(q + \frac{k\beta}{\omega} \right). \quad (29)$$

Закон сохранения энергии для данного процесса будет выглядеть следующим образом:

$$-E_\delta + \omega \left(n + \frac{1}{2} \right) = \frac{k^2}{2} + \omega \left(m + \frac{1}{2} \right) + \frac{m_e v^2}{2}, \quad (30)$$

или

$$\frac{k^2}{2} = \omega(n - m) - E_\delta - \frac{m_e v^2}{2}. \quad (31)$$

При этом матричный элемент соответствующего перехода T_{fi} с учетом (26) можно вычислить, разделив интегрирование по электронной переменной x и фотонной переменной q (см. Приложение В). В итоге получим

$$T_{fi} = C \frac{\alpha^{3/2}}{\alpha^2 + k^2} \exp \left(-\frac{k^2 \beta^2}{4\omega^2} \right) \times \beta^l \sqrt{\frac{n!}{(n-l)!}} \frac{2^{l/2}}{l!} \left(-\frac{k}{2\omega} \right)^{l-2} \times \left[-\frac{k^2}{2\omega} l + \frac{k^2}{2\omega} \frac{m_e v^2}{2\omega} + \frac{1}{4} l(l-1) \right] \quad (32)$$

в случае, если $l \geq 2$, и

$$T_{fi} = C \frac{\alpha^{3/2}}{\alpha^2 + k^2} \exp \left(-\frac{k^2 \beta^2}{4\omega^2} \right) \times \beta \sqrt{\frac{n-1}{2}} k \left[1 - \frac{1}{2} \frac{m_e v^2}{2\omega} \right], \quad (33)$$

когда переход осуществляется в результате поглощения одного фотона.

Здесь важно отметить, что в дальнейшем при анализе задачи с использованием T_{fi} статистика фотонов для состояния электромагнитного поля может быть выбрана произвольной [3].

6. ВЕРОЯТНОСТЬ ИОНИЗАЦИИ В ЕДИНИЦУ ВРЕМЕНИ. ОДНОКВАНТОВЫЙ И МНОГОКВАНТОВЫЙ ПРЕДЕЛЫ

Зная матричный элемент перехода T_{fi} (32)–(33) из начального состояния «связанный электрон + свободное электромагнитное поле» в конечное состояние «электрон, взаимодействующий

с полем + поле, взаимодействующее с электроном и потерявшее несколько фотонов» и используя (3), можно найти вероятность ионизации в единицу времени w для процесса, который определяется законом сохранения энергии:

$$E_f - E_i = \frac{k^2}{2} + \frac{m_e v^2}{2} + E_\delta - \omega(n - m) = 0. \quad (34)$$

Здесь $k^2/2$ — кинетическая энергия электрона после ионизации, $m_e v^2/2$ — средняя осцилляторная энергия электрона в поле с частотой ω , E_δ — энергия основного состояния, n — начальное число фотонов поля, m — число фотонов поля после ионизации (считаем, что $m, n \gg 1$).

Уместно сказать, что о поглощенном числе фотонов $l = n - m$ можно говорить весьма условно, так как в начальном состоянии мы имеем n «чистых» фотонов, а в конечном состоянии — m «одетых» фотонов. Однако значения $l = 0, 1, 2, \dots$ задают нам все возможные процессы, разрешенные законом сохранения энергии, и в дальнейшем при суммировании по l мы сможем получить выражение для полной скорости ионизации.

Далее рассмотрим два следующих случая.

1. При ионизации поглощается один фотон. Остановимся сначала на случае, когда для ионизации атома достаточно одного фотона. Закон сохранения энергии при этом имеет вид

$$E_f - E_i = \frac{k^2}{2} + \frac{m_e v^2}{2} + E_\delta - \omega = 0. \quad (35)$$

Отсюда видно, что для того, чтобы такой процесс был в принципе возможен, необходимо, чтобы энергии одного фотона хватило не только на выбивание электрона из ямы, но и для сообщения ему осцилляторной энергии. Используя формулы (33), (3) и (35), получим

$$w = \frac{1}{4} \frac{(2E_\delta)^{3/2}}{\omega^2 \left(1 - \frac{m_e v^2}{2\omega} \right)^2} \frac{m_e v^2}{2} \times \sqrt{2 \left(\omega - E_\delta - \frac{m_e v^2}{2} \right)} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{m_e v^2}{2\omega} \right]^2 \quad (36)$$

или в размерных переменных

$$w = \frac{e^2 \varepsilon^2 (2E_{\delta d})^{3/2}}{8m_e \hbar^3 \omega_d^4} \sqrt{2 \left(\hbar \omega_d - E_{\delta d} - \frac{e^2 \varepsilon^2}{4m_e \omega_d^2} \right)} \times \frac{\left[1 - \frac{1}{2} \frac{e^2 \varepsilon^2}{4m_e \hbar \omega_d^3} \right]^2}{\left[1 - \frac{e^2 \varepsilon^2}{4m_e \hbar \omega_d^3} \right]^2}. \quad (37)$$

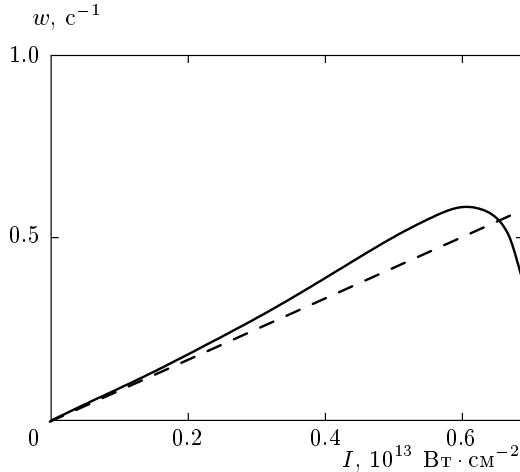


Рис. 1. Зависимости скорости ионизации при однофотонном фотоэффекте от интенсивности поля: штриховая линия — расчет в рамках элементарной теории (заданное поле), сплошная линия — расчет по формуле (37)

При достаточно большом числе фотонов поля ($n \gg 1$) из выражения (33) видно, что скорость однофотонной ионизации не зависит от объема квантования и определяется средней интенсивностью поля (см. Приложение В). Видно, что при достаточно слабом электромагнитном поле

$$\frac{e^2 \varepsilon^2}{4m_e \hbar \omega_d^3} \ll 1$$

формула (37) совпадает с известной формулой для скорости ионизации при однофотонном фотоэффекте [13]. Стоит отметить, что за появление дополнительного множителя (последняя дробь в (37)) ответствен член, пропорциональный \hat{A}^2 , в операторе взаимодействия электрона с полем (26). На рис. 1 приведены зависимости скорости ионизации при однофотонном фотоэффекте от интенсивности поля в случае когда $E_{\delta d} = 0.3 \hbar \omega_d$. Сплошная линия — результат, описываемый формулой (37), пунктирной линией показан известный результат для однофотонной ионизации в заданном поле. В результате, как видно из формулы (37), при отличном от нуля значении параметра $e^2 \varepsilon^2 / 4m_e \hbar \omega_d^3$ скорость ионизации будет сначала больше, а потом меньше, чем предсказано в известной формуле для однофотонного фотоэффекта. Такую зависимость (рис. 1) можно наблюдать в эксперименте, если измерять скорость однофотонной ионизации мелкой ямы в зависимости от интенсивности электромагнитного поля.

2. При ионизации поглощается два или бо-

лее фотонов. Закон сохранения энергии для этого процесса имеет вид

$$E_f - E_i = \frac{k^2}{2} + \frac{m_e v^2}{2} + E_\delta - l\omega = 0. \quad (38)$$

В этом случае скорость ионизации выражается следующим образом:

$$w_l = \frac{(2E_\delta)^{3/2}}{\omega^{l+2} \left(1 - \frac{m_e v^2}{2\omega}\right)^2} \left(\frac{m_e v^2}{2}\right)^l \frac{2^l}{(l!)^2} \times \\ \times \left[2 \left(l\omega - E_\delta - \frac{m_e v^2}{2}\right)\right]^{l-5/2} \times \\ \times \left[-l \left(l - \frac{m_e v^2}{2\omega} - \frac{E_\delta}{\omega}\right) + \frac{m_e v^2}{2\omega} \left(l - \frac{m_e v^2}{2\omega} - \frac{E_\delta}{\omega}\right) + \frac{1}{4}l(l-1)\right]^2. \quad (39)$$

Это выражение фактически определяет спектр фотоэлектронов N_l , поглотивших в результате ионизации l фотонов ($l \geq 2$). Данный спектр определяется двумя безразмерными параметрами E_δ/ω и $m_e v^2/2\omega$. При выводе формулы (39) мы считали, что $n \gg l$, где n — общее число фотонов поля, при этом условии результат не будет зависеть от объема квантования, а будет определяться средней интенсивностью поля (см. Приложение В).

Из выражения (39) видно, что, во-первых, при достаточно малых интенсивностях I

$$w_l \propto I^l. \quad (40)$$

Это соответствует известному результату многофотонного предела теории Келдыша [1]. Во-вторых, мы получили, что при поглощении достаточно большого числа фотонов l число фотоэлектронов будет уменьшаться по закону

$$N_l \propto \frac{(Pl)^l}{(l!)^{2/4.5}}, \quad (41)$$

где

$$P = \frac{m_e v^2}{2\omega} = \frac{e^2 \varepsilon^2}{4m_e \hbar \omega_d^3}$$

— квантовый пондеромоторный параметр, безразмерный параметр, пропорциональный интенсивности поля. Для Nd-YAG-лазера с энергией фотона $\hbar \omega_d = 1.17$ эВ величина $P = 1$ при интенсивности 10^{13} Вт·см⁻². На рис. 2 приведены графики для характерных спектров фотоэлектронов. Эти графики качественно объясняют экспериментально полученные зависимости спектров надпороговых (АТИ)

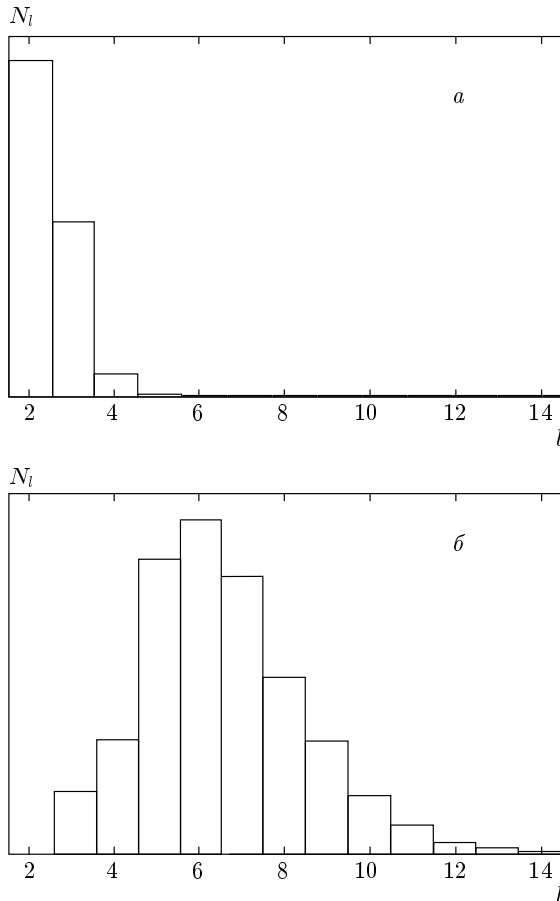


Рис. 2. Спектр фотоэлектронов (зависимость числа фотоэлектронов N_i от числа поглощенных фотонов l) для случая $E_{\delta d} = 1.47\hbar\omega_d$; $P = 0.1$ (а), 1 (б)

электронов от интенсивности поля [14]. Из них видно, что при достаточно слабой интенсивности поля ($P \ll 1$) число фотоэлектронов будет достаточно быстро уменьшаться с увеличением числа поглощенных фотонов. В случае, когда интенсивность поля достаточно велика, может наблюдаться достаточно широкий спектр фотоэлектронов с максимальным числом, соответствующим определенному числу надпороговых фотонов. В-третьих, при таких значениях параметров, что

$$-\frac{k^2}{2\omega}l + \frac{k^2}{2\omega} \frac{m_e v^2}{2\omega} + \frac{1}{4}l(l-1) = 0, \quad (42)$$

где, согласно закону сохранения энергии,

$$\frac{k^2}{2} = l\omega - E_{\delta} - \frac{m_e v^2}{2}, \quad (43)$$

выражение (39) обращается в нуль, т. е. при определенных условиях может существовать такое число поглощенных фотонов l , что соответствующее

ему число фотоэлектронов N_i обращается в нуль. Это означает, что при таком числе поглощенных фотонов можно ожидать существенного уменьшения скорости ионизации, что соответствует провалу в спектре фотоэлектронов. В выражении (42) (соответствует части (39) в последних квадратных скобках) первый член отвечает линейной по полю части оператора взаимодействия (26), а два последних члена — квадратичной по полю части оператора взаимодействия. Таким образом, при данном числе поглощенных фотонов, мы получили деструктивную интерференцию данных амплитуд перехода атома из основного состояния в состояния непрерывного спектра. Отметим, что этот эффект можно предсказать только при полностью квантовом рассмотрении задачи. На рис. 3 приведены соответствующие графики зависимостей числа фотоэлектронов N_i от числа поглощенных при ионизации фотонов l . Следует отметить, что наличие провалов в спектрах фотоэлектронов очень чувствительно к изменению параметров системы. Так, изменение интенсивности поля всего на несколько процентов может привести к существенному изменению спектра фотоэлектронов и к исчезновению данных провалов. С одной стороны, с этим может быть связана трудность экспериментального обнаружения данного эффекта, с другой — его сильная чувствительность к внешним параметрам может быть полезна для различных диагностических приложений.

Полная скорость ионизации при произвольной статистике фотонов $|C_n|^2$ (см. в [3, 4]) описывается выражением

$$w = \sum_{n=0}^{\infty} |C_n|^2 w(n), \quad (44)$$

где $w(n)$ — полная скорость ионизации для заданного числа фотонов n . Она определяется суммой по всем возможным числам поглощенных фотонов:

$$w(n) = \sum_{l=l_{min}}^n w_l. \quad (45)$$

Минимально возможное число поглощенных фотонов

$$l_{min} = \left[\frac{E_{\delta}}{\omega} + \frac{m_e v^2}{2\omega} \right] + 1$$

(квадратные скобки обозначают целую часть числа) определяется из закона сохранения энергии для процесса ионизации (34).

В случае интенсивного классического света (ему отвечает пуассоновская статистика фотонов [3, 6]),

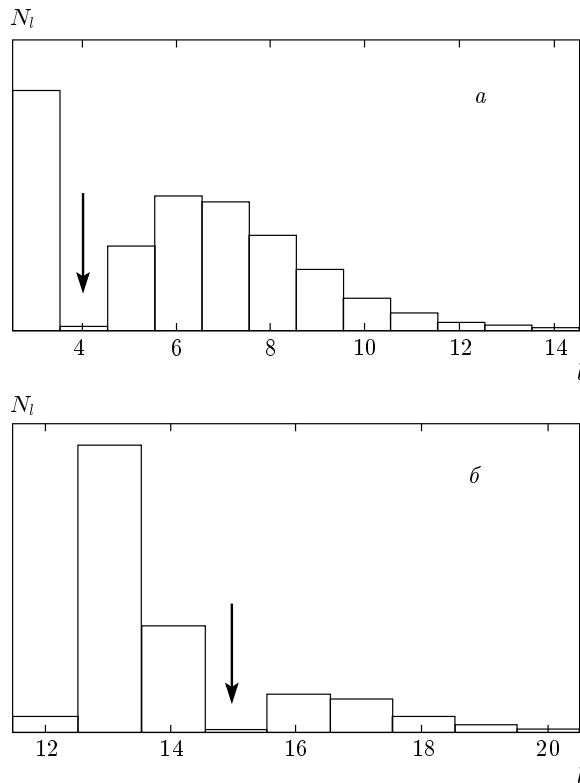


Рис. 3. Спектр фотоэлектронов (зависимости числа фотоэлектронов N_i от числа поглощенных фотонов l). а) $E_{\delta d} = 1.9\hbar\omega_d$, $P = 1$, б) $E_{\delta d} = 10.8\hbar\omega_d$, $P = 0.5$. Стрелками показаны положения провалов, возникающих из-за деструктивной интерференции амплитуд перехода

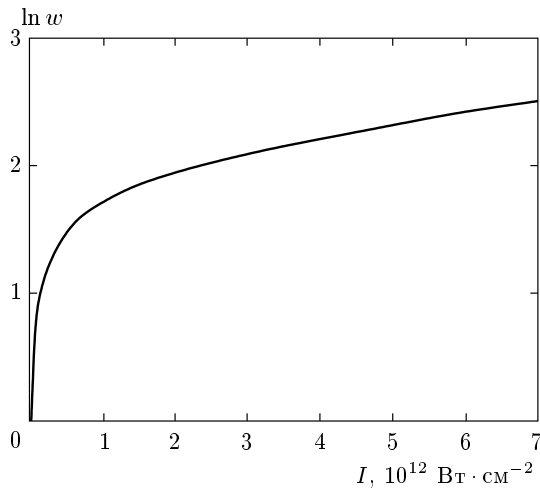


Рис. 4. Зависимость логарифма скорости ионизации атомной системы (уровень энергии связанного состояния $E_{\delta d} = 2.1\hbar\omega_d$, $\hbar\omega_d = 1.17$ эВ) от интенсивности поля

когда среднее число фотонов велико, $n_0 \gg 1$, полная скорость ионизации определяется средним числом фотонов: $w = w(n_0)$. На рис. 4 приведен график зависимости полной скорости ионизации от интенсивности поля. Из рис. 4 видно, что для данной атомной системы начиная с интенсивности $2 \cdot 10^{12}$ Вт·см⁻² скорость ионизации практически степенным образом зависит от интенсивности, что соответствует многофотонному пределу теории Келдыша [1]. При более слабых интенсивностях скорость ионизации существенно меньше.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе показано, что при полностью квантовом рассмотрении задачи взаимодействия электромагнитного поля с электроном удается получить аналитические решения и предсказать ряд новых эффектов без использования теории возмущений для вычисления волновых функций стационарных состояний системы и соответствующих матричных элементов переходов. Решение задачи на собственные значения и собственные функции основано на введении новых переменных, описывающих «одетый полем» электрон и «одетые электроном» фотоны. В рамках этого подхода введена энергия взаимодействия электрона и электромагнитного поля. Показано, что в общем случае эта энергия зависит от всех параметров исходной задачи и не является положительно определенной.

В качестве одного из приложений развитой теории аналитически исследуется процесс ионизации простейшей модельной атомной системы. Найдено аналитическое выражение для матричного элемента перехода из начального связанного состояния электрона в атоме в одно из конечных состояний системы «электрон + поле» при произвольном числе поглощенных фотонов. Получены аналитические выражения для скорости ионизации. Решение полностью квантовой задачи показало, что скорость ионизации и спектр фотоэлектронов определяются двумя безразмерными параметрами: во-первых, квантовым пондеромоторным параметром

$$P = \frac{m_e v^2}{2\omega} \propto \varepsilon^2$$

и, во-вторых, $|E_\delta|/\omega$, где E_δ — энергия уровня атома (связанного состояния). Приведены соотношения, обобщающие известные результаты для однофотонного фотоэффекта и многофотонного предела теории Келдыша, а также новые соотношения, обладающие особенностями, связанными с квантовым

описанием электромагнитного поля. Получено выражение для спектра фотоэлектронов при произвольном начальном и конечном состояниях поля. В рамках данной теории качественно объяснены экспериментальные результаты [14], касающиеся измерения спектра фотоэлектронов при надпороговой ионизации.

Обнаружен и исследован эффект деструктивной интерференции квантовых амплитуд перехода атома из основного состояния в состояния непрерывного спектра, связанных с членами взаимодействия $(e/c)\hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{A}}$ и $(e^2/c^2)\hat{\mathbf{A}}^2$, который приводит к существенному изменению спектра фотоэлектронов. Этот результат отсутствует в элементарной теории ионизации, его можно предсказать только при полностью квантовом рассмотрении задачи. Таким образом, полностью квантовое рассмотрение многофотонной ионизации одноуровневой системы в поле электромагнитного излучения показало, что существенные особенности связаны с учетом в гамильтониане взаимодействия слагаемого, пропорционального $\hat{\mathbf{A}}^2$.

И. А. Гоносков благодарит Л. В. Келдыша и М. Ю. Рябикина за ценные советы и замечания к работе.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 06-02-16739), CRDF (грант RUP 2-2844-NN-06), а также фонда Династия.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Диагонализация гамильтониана

Рассмотрим преобразование, описываемое унитарным оператором

$$\hat{D}(x, q) = \exp\left(-i\xi \frac{\partial}{\partial q} \frac{\partial}{\partial x}\right), \quad (\text{A.1})$$

где ξ — некоторая действительная константа. Этот оператор преобразует операторы координаты частицы и поля следующим образом:

$$\begin{aligned} \hat{D}^{-1}(x, q)x\hat{D}(x, q) &= x + i\xi \frac{\partial}{\partial q}, \\ \hat{D}^{-1}(x, q)q\hat{D}(x, q) &= q + i\xi \frac{\partial}{\partial x}. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

При этом гамильтониан (4) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \hat{D}^{-1}(x, q)\hat{H}(x, q)\hat{D}(x, q) &= \\ &= \frac{1}{2} \left((-i + i\beta\xi) \frac{\partial}{\partial x} + \beta q \right)^2 + \\ &+ \frac{\omega}{2} \left[\left(q + i\xi \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 - \frac{\partial^2}{\partial q^2} \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Чтобы переменные в задаче разделились, выберем константу ξ из условия, что коэффициент перед $q\partial/\partial x$ в формуле (A.3) обращается в нуль. В результате имеем

$$2 \cdot \frac{1}{2} \beta (-i + i\beta\xi) + 2 \cdot \frac{1}{2} i\omega\xi \equiv 0. \quad (\text{A.4})$$

Отсюда находим

$$\xi = \frac{\beta}{\omega + \beta^2}. \quad (\text{A.5})$$

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Вычисление матричного элемента перехода в случае одномерного одноуровневого атома

При нахождении матричного элемента (25) выполним сначала интегрирование по электронной переменной:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} \left(-i\beta \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\beta^2 q^2}{2} \right) e^{-\alpha|x|} dx &= \frac{2\alpha k\beta q}{\alpha^2 + k^2} + \\ &+ \frac{\alpha\beta^2 q^2}{\alpha^2 + k^2} = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + k^2} \left[k\beta q + \frac{\beta^2 q^2}{2} \right], \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

где $\alpha = \sqrt{2E_\delta}$ определяется энергией электрона в атоме. В результате остается интеграл по фотонной переменной:

$$\begin{aligned} T_{fi} &= \frac{C\sqrt{\alpha}}{\sqrt{2^n 2^m n! m! \pi}} \frac{2\alpha}{\alpha^2 + k^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[k\beta q + \frac{\beta^2 q^2}{2} \right] \times \\ &\times \exp\left\{ -\frac{\left(q + \frac{k\beta}{\omega} \right)^2}{2} - \frac{q^2}{2} \right\} \times \\ &\times H_m\left(q + \frac{k\beta}{\omega} \right) H_m(q) dq. \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Чтобы вычислить этот интеграл, перейдем к новой фотонной переменной $Q = q + \gamma$, где $\gamma = k\beta/2\omega$, и учтем, что

$$\exp \left\{ -\frac{\left(q + \frac{k\beta}{\omega}\right)^2}{2} - \frac{q^2}{2} \right\} = \exp(-Q^2) \exp(-\gamma^2). \quad (\text{B.3})$$

После этого интеграл для T_{fi} легко берется с учетом следующего соотношения (см. [15]):

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-Q^2} H_m(Q + \gamma) H_n(Q - \gamma) dQ = 2^n \sqrt{\pi} m! (-\gamma)^{n-m} L_m^{n-m}(2\gamma^2) \equiv F(m, n, \gamma), \quad (\text{B.4})$$

где

$$L_\rho^\lambda(z) = \sum_{k=0}^{\rho} \frac{(-1)^k}{k!} \binom{\rho + \lambda}{\rho - k} z^k$$

— обобщенный полином Лагерра, $m \leq n$ (для одно-квантового процесса $n = m + 1$, для многоквантовых процессов $n \geq m + 2$).

Остальные интегралы, входящие в выражение для матричного элемента T_{fi} , сводятся к формуле

(B.4) путем интегрирования по частям. Так, например,

$$\int_{-\infty}^{\infty} Q e^{-Q^2} H_m(Q + \gamma) H_n(Q - \gamma) dQ = mF(m - 1, n, \gamma) + nF(m, n - 1, \gamma) \quad (\text{B.5})$$

и

$$\int_{-\infty}^{\infty} Q^2 e^{-Q^2} H_m(Q + \gamma) H_n(Q - \gamma) dQ = \frac{1}{2} F(m, n, \gamma) + m^2 F(m - 2, n, \gamma) + \left\{ \begin{array}{l} n^2 F(m, n - 2, \gamma) \quad \text{при } n \geq m + 2 \\ n^2 F(n - 2, n - 1, -\gamma) \quad \text{при } n = m + 1 \end{array} \right\} + 2mnF(m - 1, n - 1, \gamma). \quad (\text{B.6})$$

Обозначим для краткости

$$B = C \sqrt{\alpha} \frac{2\alpha}{\alpha^2 + k^2} \frac{e^{-\gamma^2}}{\sqrt{2^n 2^m n! m! \pi}}. \quad (\text{B.7})$$

В итоге получим выражение для T_{fi} , являющееся суммой семи слагаемых:

$$T_{fi} = B \left(\frac{\beta^2 \gamma^2}{2} - \beta k \gamma \right) F(m, n, \gamma) + B(\beta k - \gamma \beta^2) [mF(m - 1, n, \gamma) + nF(m, n - 1, \gamma)] + B \frac{\beta^2}{2} \left[\frac{1}{2} F(m, n, \gamma) + m(m - 1)F(m - 2, n, \gamma) + 2mnF(m - 1, n - 1, \gamma) + \left\{ \begin{array}{l} n(n - 1)F(m, n - 2, \gamma) \quad \text{при } n \geq m + 2 \\ n(n - 1)F(n - 2, n - 1, -\gamma) \quad \text{при } n = m + 1 \end{array} \right\} \right]. \quad (\text{B.8})$$

Первое слагаемое соответствует не зависящей от Q части $\hat{I}(x, q)$, второе и третье — линейно зависящей, последние четыре — квадратично зависящей.

Далее приведем вид матричного элемента перехода в случае, когда выполняются условия

$$n \geq m + 1; \quad m, n \gg 1;$$

$$1 \gg \frac{k\beta}{\omega} = \sqrt{\frac{k^2}{\omega}} \sqrt{\frac{\beta^2}{\omega}} \gg \frac{\beta^2}{\omega}.$$

Легко видеть, что при этом существенную роль играют только третье, шестое и седьмое слагаемые в формуле (B.8). Учитывая лишь низшую степень соответствующих малых параметров и используя (B.4), получим

$$\begin{aligned}
T_{fi} = & B(\beta k - 0)n \cdot 2^{n-1} \sqrt{\pi} m! (-\gamma)^{n-m-1} \frac{(n-1)!}{m!(n-m-1)!} + \\
& + B \frac{\beta^2}{2} 2mn \cdot 2^{n-1} \sqrt{\pi} (m-1)! (-\gamma)^{n-m} \frac{(n-1)!}{(m-1)!(n-m)!} + \\
& + B \frac{\beta^2}{2} \left\{ \begin{array}{l} n(n-1) \cdot 2^{n-2} \sqrt{\pi} m! (-\gamma)^{n-m-2} \frac{(n-2)!}{m!(n-m-2)!} \quad \text{при } n \geq m+2 \\ n(n-1) \cdot 2^{n-1} \sqrt{\pi} (n-2)! \gamma \frac{(n-1)!}{(n-2)!} \quad \text{при } n = m+1 \end{array} \right\}. \quad (\text{B.9})
\end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned}
T_{fi} = & B \cdot 2^n \sqrt{\pi} m! \frac{n!}{m!(n-m)!} (-\gamma)^{n-m-2} \left[-\frac{1}{2} \beta k \gamma (n-m) + \frac{\beta^2}{2} \gamma^2 m + \frac{\beta^2}{2} \frac{1}{4} (n-m)(n-m-1) \right] = \\
= & B \cdot 2^n \sqrt{\pi} \frac{n!}{(n-m)!} \left(-\frac{k\beta}{2\omega} \right)^{n-m-2} \frac{\beta^2}{2} \left[-\frac{k^2}{2\omega} (n-m) + \frac{k^2}{2\omega} \frac{m_e v^2}{2\omega} + \frac{1}{4} (n-m)(n-m-1) \right], \quad (\text{B.10})
\end{aligned}$$

если число поглощенных фотонов $l = n - m \geq 2$, или

$$T_{fi} = B \cdot 2^n \sqrt{\pi} m! \frac{n!}{m!} \left[\frac{1}{2} \beta k - \frac{\beta^2}{2} \gamma (n-1) + \frac{\beta^2}{2} \frac{1}{2} \gamma (n-1) \right] = B \cdot 2^n \sqrt{\pi} n! \frac{k\beta}{2} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{m_e v^2}{2\omega} \right] \quad (\text{B.11})$$

для однофотонных процессов $l = n - m = 1$. Как и следовало ожидать, при условии $n \rightarrow \infty$ ($n \gg l$) матричные элементы перехода T_{fi} будут определяться отношением общего числа фотонов n к объему V_d , или средней интенсивности

$$I \propto \frac{n \hbar \omega_d}{V_d}. \quad (\text{B.12})$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. В. Келдыш, ЖЭТФ **47**, 1945 (1964).
2. H. R. Reiss, Phys. Rev. A **22**, 1786 (1980).
3. Л. Мандель, Э. Вольф, *Оптическая когерентность и квантовая оптика*, Наука, Москва (2000).
4. М. О. Скалли, М. С. Зубайри, *Квантовая оптика*, Физматлит, Москва (2003).
5. А. М. Попов, О. В. Тихонова, ЖЭТФ **122**, 978 (2002).
6. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика*, т. 3, Наука, Москва (1989).
7. M. Mershede and H. Walter, Phys. Rev. Lett. **54**, 551 (1985).
8. Г. Вальтер, УФН **166**, 777 (1996).
9. И. Берсон ЖЭТФ **56**, 1627 (1969).
10. D.-S. Guo and T. Aberg, J. Phys. A: Math. Gen. **21**, 4577 (1988).
11. D.-S. Guo and G. W. F. Drake, J. Phys. A: Math. Gen. **25**, 3383 (1992).
12. R. Loudon and P. L. Knight, J. Mod. Opt. **34**, 709 (1987).
13. А. С. Давыдов, *Квантовая механика*, Наука, Москва (1973).
14. G. Petite, P. Agostini, and H. G. Muller, J. Phys. B: Atom. Mol. Opt. Phys. **21**, 4097 (1988).
15. А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев, *Интегралы и ряды*, т. 2, Наука, Москва (1983).