

# ТЕОРИЯ ЛОКАЛИЗАЦИИ В НУЛЬ-МЕРНОМ ПРЕДЕЛЕ И СТРУКТУРА ДИФФУЗИОННЫХ ПОЛЮСОВ

И. М. Суслов\*

Институт физических проблем им. П. Л. Капицы Российской академии наук  
119334, Москва, Россия

Поступила в редакцию 9 июня 2007 г.

Диффузионный полюс  $1/(-i\omega + D(\omega, q)q^2)$  в локализованной фазе переходит в сингулярность  $1/\omega$  Березинского–Горькова, которая может изучаться инстантонным методом [5, 10]. При буквальном использовании этого подхода возникают противоречия, не исчезающие даже при предельном упрощении задачи и переходе к нуль-мерному случаю. Наоборот, в этом случае они предельно обостряются и принимают характер парадоксов. Основной парадокс следует из утверждений: а) сингулярность  $1/\omega$  определяется высокими порядками теории возмущений, б) поведение высоких порядков имеет одинаковый вид для двух величин  $\Phi^{RA}$  и  $U^{RA}$ , в) величина  $\Phi^{RA}$  имеет сингулярность  $1/\omega$ , а  $U^{RA}$  не имеет. Разрешение парадокса показывает, что инстантонный метод позволяет получить лишь сингулярность типа  $1/(\omega + 2i\gamma)$ , где параметр  $\gamma$  остается неопределенным и должен определяться из дополнительных соображений. Это подтверждает на концептуальном уровне необходимость процедуры самосогласования для коэффициента диффузии, используемой в теориях типа Волхардта–Вольфле.

PACS: 03.65.-w, 11.10.Ni, 71.23.An

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Современная постановка проблемы перехода Андерсона представляется следующим образом [1]. Вводится величина

$$\Phi^{RA}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \langle G_{E+\omega}^R(x_1, x_2) G_E^A(x_3, x_4) \rangle, \quad (1)$$

содержащая всю информацию о кинетических свойствах ( $G^R$  и  $G^A$  — неусредненные запаздывающая и опережающая функции Грина для электрона в случайном потенциале). Фурье-образ  $\Phi^{RA}(q)$  этой величины при совпадающих аргументах  $x_1 = x_4, x_2 = x_3$  имеет диффузионный полюс (см., например, [2, 3]):

$$\Phi^{RA}(q) = \frac{2\pi\nu(E)}{-i\omega + D(\omega, q)q^2} + \Phi_{reg}(q), \quad (2)$$

где  $D(\omega, q)$  — наблюдаемый коэффициент диффузии,  $\nu(E)$  — плотность состояний вблизи энергии  $E$ . В локализованной фазе диффузионный полюс переходит в сингулярность  $1/\omega$  Березинского–Горькова [4–6]:

$$\Phi^{RA}(q) = \frac{2\pi\nu(E)}{-i\omega} A(q) + \Phi_{reg}(q). \quad (3)$$

Согласование формул (2) и (3) приводит к выводу, что в локализованной фазе  $D(\omega, q) = -i\omega d(q)$ , так что  $D(0, q) \equiv 0$ . Следовательно, переход Андерсона не сводится к исчезновению  $D(0, 0)$ , а имеет более глубокий характер [7] — в точке перехода обращается в нуль вся функция  $D(0, q)$  [1, 3]. Вопрос о сложной перестройке  $D(\omega, q)$  вблизи перехода и представляет основной интерес для теории.

Качественный сценарий перехода предложен Волхардтом и Вольфле [2] и соответствует следующей простой оценке. Неприводимая вершина  $U_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^{RA}(\mathbf{q})$ , входящая в уравнение Бете–Солпитера, имеет диффузионный полюс при  $\mathbf{k} + \mathbf{k}' \rightarrow 0$ :

$$U_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^{RA}(\mathbf{q}) = U_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^{reg}(\mathbf{q}) + \frac{F(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{q})}{-i\omega + D(\omega, \mathbf{k} + \mathbf{k}')(\mathbf{k} + \mathbf{k}')^2} \quad (4)$$

и играет роль «вероятности перехода» в квантовом кинетическом уравнении. Использование аппроксимации типа  $\tau$ -приближения,  $D \propto \tau \propto \langle U \rangle^{-1}$  ( $\langle \dots \rangle$  — усреднение по импульсам) приводит к уравнению

$$D \sim \text{const} \left( U_0 + F_0 \int \frac{d^d q}{-i\omega + D(\omega, q)q^2} \right)^{-1}, \quad (5)$$

которое (в пренебрежении пространственной дисперсией  $D(\omega, q)$ ) и описывает переход между режима-

\*E-mail: suslov@kapitza.ras.ru

ми  $D \sim i\omega$  и  $D = \text{const}(\omega)$  [2]. Более рафинированный вариант теории, учитывающий пространственную дисперсию<sup>1)</sup>  $D(\omega, q)$ , разработан автором [3]; он имеет хорошие перспективы оказаться точным, но в настоящее время не вполне согласуется с численным счетом [8] (см. обсуждение в работе [9]). Поэтому проверка предложенной в работе [3] феноменологической схемы непосредственно из микроскопических соображений является весьма актуальной.

Предметом настоящей работы является вопрос о структуре диффузионного полюса в области флуктуационного хвоста плотности состояний, т. е. в области энергий, соответствующих запрещенной зоне исходного материала. Согласно работам [5, 10], в этом случае диффузионный полюс имеет чисто непертурбативное происхождение и может быть найден инстантонным методом. В идейном плане правильность такого подхода не вызывает сомнений, однако возникает целый ряд вопросов в отношении как процедуры вычисления, так и полученных результатов.

1. Использованное в работах [5, 10] перевальное приближение позволяет получить зависимость  $\Phi^{RA} \sim 1/\omega$  в некоторой области параметров, но условия его применимости нарушаются в пределе  $\omega \rightarrow 0$ , представляющем наибольший интерес.

2. Фактически в работах [5, 10] получена сингулярность<sup>2)</sup>

$$\langle G_{E_1} G_{E_2} \rangle \sim \frac{1}{E_1 - E_2}, \quad (6)$$

которая для  $E_1 = E + \omega + i\delta$ ,  $E_2 = E - i\delta$  соответствует формуле (3). Однако такая сингулярность должна отсутствовать при наличии в  $E_1$  и  $E_2$  мнимых добавок одинакового знака (что соответствует средним  $\langle G^R G^R \rangle$  или  $\langle G^A G^A \rangle$ ). Из текста работ [5, 10] неясно, какой механизм обеспечивает исчезновение сингулярности в последнем случае.

3. Сингулярность (6) согласуется с формулой (3), если под  $E_1$  и  $E_2$  понимать затравочные энергии. Однако по существующим канонам (см., например, вычисление проводимости в книге [11]) в таких случаях должны использоваться перенормированные энер-

<sup>1)</sup> Учет пространственной дисперсии  $D(\omega, q)$  помимо общепризнанного интереса имеет принципиальное значение с точки зрения удовлетворения тождества Уорда [2],

$$\Delta \Sigma_k(\mathbf{q}) = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}_1} U_{k\mathbf{k}_1}^{RA}(\mathbf{q}) \Delta G_{\mathbf{k}_1}(\mathbf{q})$$

(где  $\Delta G_k(\mathbf{q}) \equiv G_{k+q/2}^R - G_{k-q/2}^A$ ,  $\Delta \Sigma_k(\mathbf{q}) \equiv \Sigma_{k+q/2}^R - \Sigma_{k-q/2}^A$  и  $\Sigma_k$  — собственная энергия), поскольку суммирование по  $\mathbf{k}_1$ , затрагивающее  $D(\omega, \mathbf{k} + \mathbf{k}_1)$ , должно обеспечить сокращение сингулярности  $1/\omega$  в правой части.

<sup>2)</sup> Используем обозначение  $G_E$  для функции Грина в случаях, когда знак мнимой добавки к энергии не имеет значения.

гии, содержащие вместо бесконечно малых мнимых добавок  $\pm i\delta$  члены с конечным затуханием  $\pm i\Gamma$ . Перехода к перенормированной энергии требует и корректная процедура инстантонных вычислений [12] (см. подробнее [1, 13]), так как в противном случае инстантонный вклад расходится. Замена  $i\delta$  на  $i\Gamma$  привела бы к исчезновению диффузионного полюса в локализованной фазе<sup>3)</sup>, что имело бы тяжелые последствия для теории, так как фактически под сомнение ставится исходный критерий локализации Андерсона [16, 17] (см. обсуждение в работах [5, 6, 10]).

4. Импульсная зависимость результатов [5, 10] не согласуется с той, которая получается при прямом анализе уравнения Бете–Солпитера [3].

5. Вычисления [5, 10] носят детерминированный характер и не дают никаких указаний на происхождение процедуры самосогласования для коэффициента диффузии, необходимость которой кажется правдоподобной из физических соображений (см. выше).

Ниже показано (разд. 5), что вопросы 1, 2 носят технический характер и могут быть сняты в результате модификации вычислительной процедуры. Так, математически более корректно применять инстантонный метод для вычисления высоких порядков теории возмущений, а сингулярный вклад получать в результате их суммирования: это дает четкую интерпретацию получаемых выражений и снимает вопрос о мнимых добавках. Проблему же неприменимости перевального приближения можно преодолеть путем корректного интегрирования по мягкой моде.

Вопросы 3–5 носят более глубокий характер — они не снимаются даже при предельном упрощении задачи и переходе к нуль-мерному случаю (который соответствует пределу сильного беспорядка в произвольной размерности). Наоборот, в этом случае они предельно обостряются и принимают характер парадоксов. Основной парадокс определяется следующими утверждениями:

- а) сингулярность  $1/\omega$  определяется высокими порядками теории возмущений;
- б) высокие порядки для величин  $\Phi^{RA}$  и  $U^{RA}$  имеют одинаковый вид;
- в) сингулярность  $1/\omega$  имеется в величине  $\Phi^{RA}$ , но отсутствует в величине<sup>4)</sup>  $U^{RA}$ .

<sup>3)</sup> Такое утверждение делалось в недавних работах [14], но, на наш взгляд, оно является некорректным [15].

<sup>4)</sup> Последнее утверждение специфично для нуль-мерного случая и связано с отсутствием интегрирования по импульсу в тождестве Уорда (см. Примечание 1).

Исследование этого парадокса является основной целью настоящей работы. Его разрешение приводит к следующим выводам. Инстантонный подход определяет лишь общую структуру диффузионного полюса, позволяя получить сингулярность типа  $1/(\omega + 2i\gamma)$ , тогда как параметр  $\gamma$  остается неопределенным и должен определяться с учетом информации из низших порядков теории возмущений. Он зависит от изучаемой величины и в общем случае является функцией импульсов. Из физических соображений следует ожидать, что для величины  $\Phi^{RA}$  в локализованной фазе  $\gamma$  оказывается порядка  $\omega$ , что восстанавливает сингулярный вклад  $1/\omega$ , но изменяет его импульсную зависимость. В металлической же фазе параметр  $\gamma$  конечен в соответствии с конечностью коэффициента диффузии и должен фиксироваться в результате некоторой процедуры самосогласования, что подтверждает на принципиальном уровне сценарий Волхардта–Вольфле.

Существование парадокса делает актуальной перекрестную проверку всех утверждений. Кроме того, исследование нуль-мерного случая полезно с точки зрения комбинаторики диаграмм [18, 19], построения разложений по размерности пространства [20] и использования в интерполяционных схемах [21]. Поэтому мы систематически изложим подходы, основанные на функциональном интегрировании (разд. 2) и точных диаграммных разложениях (разд. 3), дадим физическую интерпретацию (разд. 4), рассмотрим процедуру вычисления высоких порядков (разд. 5) и их суммирование (разд. 6). Разрешение сформулированного парадокса дается в разд. 7. Наконец, в разд. 8 приводится модификация инстантонных вычислений работ [5, 10], вытекающая из проведенного анализа.

## 2. НУЛЬ-МЕРНЫЙ ПРЕДЕЛ В ФУНКЦИОНАЛЬНОМ ИНТЕГРАЛЕ

Средняя функция Грина неупорядоченной системы и величина  $\Phi^{RA}$  допускают представление в виде функциональных интегралов [22]:

$$\langle G(x, x') \rangle = - \int D\varphi \varphi_\alpha(x) \varphi_\alpha(x') \times \exp \left\{ - \int d^d x \left[ \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 + \frac{1}{2} \kappa^2 \varphi^2 + \frac{1}{4} g \varphi^4 \right] \right\}, \quad (7)$$

где  $\kappa^2 = -E \pm i\delta$  и

$$\Phi^{RA}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \int D\varphi D\phi \varphi_\alpha(x_1) \varphi_\alpha(x_2) \times \phi_\beta(x_3) \phi_\beta(x_4) \exp(-S\{\varphi, \phi\}), \quad (8)$$

$$S\{\varphi, \phi\} = \int d^d x \left\{ \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + \frac{1}{2} \kappa_1^2 \varphi^2 + \frac{1}{2} \kappa_2^2 \phi^2 + \frac{1}{4} g (\varphi^2 + \phi^2)^2 \right\},$$

где

$$g = -W^2/2, \quad \kappa_1^2 = -(E + \omega + i\delta) \equiv \kappa^2 - i\Delta, \quad (9) \\ \kappa_2^2 = -(E - i\delta) \equiv \kappa^2 + i\Delta.$$

Здесь  $\varphi$  и  $\phi$  — соответственно  $m$ - и  $n$ -компонентные векторы, причем  $m, n \rightarrow 0$  в конце вычислений<sup>5)</sup>. Формулы (7), (8) соответствуют обычной модели Андерсона с гауссовским распределением энергий узлов

$$P(V) = \frac{1}{\sqrt{2\pi W^2}} \exp \left\{ -\frac{V^2}{2W^2} \right\}, \quad (10)$$

рассматриваемой вблизи нижнего края зоны, а в континуальном пределе эквивалентной уравнению Шредингера с  $\delta$ -коррелированным случайным потенциалом.

Будем интерпретировать функциональный интеграл как многократный интеграл на решетке. Для перехода к нуль-мерному пределу рассмотрим систему, пространственно-ограниченную во всех направлениях на достаточно малом масштабе, что позволяет пренебречь координатной зависимостью  $\varphi(x)$  и  $\phi(x)$  и опустить в формулах (7), (8) члены с градиентами; выбирая решетку достаточно редкой, можно считать, что внутри системы находится только один ее узел; тогда

$$\langle G \rangle = - \int_0^\infty \varphi d\varphi \exp \left\{ -\frac{1}{2} \kappa^2 \varphi^2 - \frac{1}{4} g \varphi^4 \right\}, \quad (11)$$

где учтено, что при  $n \rightarrow 0$

$$\int d^n \varphi \varphi_\alpha \varphi_\alpha = S_n \int_0^\infty \varphi^{n-1} d\varphi \frac{\varphi^2}{n} \rightarrow \int_0^\infty \varphi d\varphi \quad (12)$$

<sup>5)</sup> В формулах (7), (8) не предполагается суммирование по повторяющимся индексам  $\alpha$  и  $\beta$ .

( $S_n$  — площадь единичной сферы в  $n$ -мерном пространстве) и аналогично

$$\Phi^{RA} = \int_0^\infty \varphi d\varphi \int_0^\infty \phi d\phi \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \kappa_1^2 \varphi^2 - \frac{1}{2} \kappa_2^2 \phi^2 - \frac{1}{4} g (\varphi^2 + \phi^2)^2 \right\}. \quad (13)$$

Разложение по степеням  $g$  дает ряды

$$\langle G \rangle = -\frac{1}{\sqrt{\pi} \kappa^2} \sum_{N=0}^\infty \left( -\frac{4}{\kappa^4} \right)^N \Gamma \left( N + \frac{1}{2} \right) g^N, \quad (14)$$

$$\Phi^{RA} = \frac{1}{\sqrt{\pi} (\kappa_1^2 - \kappa_2^2)} \sum_{N=0}^\infty (-4)^N \Gamma \left( N + \frac{1}{2} \right) \times \left[ (\kappa_2^2)^{-(2N+1)} - (\kappa_1^2)^{-(2N+1)} \right] g^N, \quad (15)$$

где использованы формула бинорма и теорема умножения для гамма-функции [23].

### 3. ДИАГРАММНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ В НУЛЬ-МЕРНОМ СЛУЧАЕ

В нуль-мерном случае функции Грина не зависят от координат или (в импульсном представлении) соответствуют нулевому импульсу. Диаграммные разложения (рис. 1) имеют обычный вид, но не содержат интегрирований по координатам или импульсам. При  $\kappa_1^2 = \kappa_2^2$  все диаграммы одного порядка равны друг другу и ряды теории возмущений можно строить, исходя из комбинаторики диаграмм. С другой стороны, можно изучать комбинаторику диаграмм с помощью «функциональных интегралов» (11), (13) [18, 19]. Актуальные диаграммы показаны на рис. 1; штриховой линии приводится в соответствие множитель  $W^2$ , тонкой сплошной линии — затравочная функция Грина

$$G^0(E) = \frac{1}{E} = -\frac{1}{\kappa^2}, \quad (16)$$

жирной линии — полная функция Грина

$$G(E) \equiv \langle G_E \rangle = \frac{1}{\tilde{E}} = \frac{1}{E - \Sigma} = -\frac{1}{\tilde{\kappa}^2}, \quad (17)$$

где  $\Sigma \equiv \Sigma_R = -\Delta E + i\Gamma$  для  $G^R$  (и аналогично для  $G^A$ ). Так, ряд на рис. 1а имеет вид

$$G(E) = \frac{1}{E} \sum_{N=0}^\infty G_N \left( \frac{W^2}{E^2} \right)^N, \quad (18)$$

$$G_N = (2N - 1)!! = 2^N \frac{\Gamma(N + 1/2)}{\sqrt{\pi}},$$

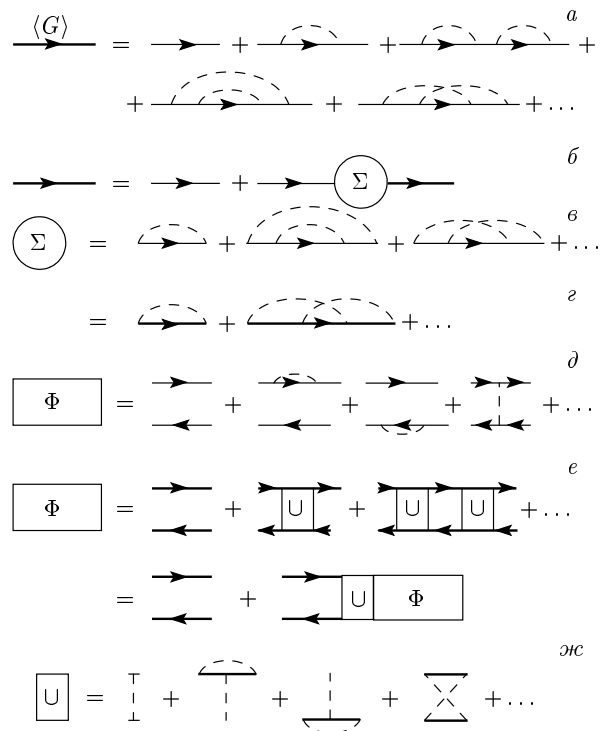


Рис. 1. Диаграммные разложения для электрона в случайном потенциале

поскольку в  $N$ -м порядке имеется  $(2N - 1)!!$  диаграмм (первая из  $2N$  вершин соединяется с одной из  $(2N - 1)$  оставшихся, первая свободная — с одной из  $(2N - 3)$  оставшихся и т. д.). Собственная энергия  $\Sigma$  (рис. 1б) может быть разложена как по затравочным (рис. 1в), так и по перенормированным (рис. 1г) функциям Грина:

$$\Sigma(E) = E \sum_{N=1}^\infty L_N \left( \frac{W^2}{E^2} \right)^N = \tilde{E} \sum_{N=1}^\infty K_N \left( \frac{W^2}{\tilde{E}^2} \right)^N, \quad (19)$$

где последовательности  $L_N$  и  $K_N$  определяются рекуррентными соотношениями

$$L_N = \sum_{K=0}^{N-1} G_{N-K} L_K, \quad L_0 = 1, \quad (20)$$

$$K_{N+1} = N \sum_{M=0}^{N-1} K_{M+1} K_{N-M}, \quad K_0 = 1.$$

Первое следует из равенства  $G(E - \Sigma) = 1$  в результате перемножения рядов, второе получено в работе [19]. Любопытно, что последовательность  $K_N$

определяет также разложения для величин  $\Phi$  и  $U$  (аналогов  $\Phi^{RA}$  и  $U^{RA}$  при  $\kappa_1^2 = \kappa_2^2$ ) по перенормированным функциям Грина [19]:

$$\Phi = \frac{1}{\tilde{E}^2} \sum_{N=0}^{\infty} K_{N+1} \left( \frac{W^2}{\tilde{E}^2} \right)^N, \quad (21)$$

$$U = \tilde{E}^2 \sum_{N=1}^{\infty} (2N-1) K_N \left( \frac{W^2}{\tilde{E}^2} \right)^N. \quad (22)$$

Первое соотношение следует из тождества Уорда, связывающего  $\Sigma$  и  $\Phi$  [19], второе — из того, что все диаграммы для  $U$  (рис. 1жс) могут быть получены из диаграмм для  $\Sigma$  (рис. 1з) путем последовательного разрезания по одной из  $(2N-1)$  внутренних  $G$ -линий. Аналогично, разложение  $\Phi$  по затравочным функциям Грина,

$$\Phi = \frac{1}{E^2} \sum_{N=0}^{\infty} (2N+1)!! \left( \frac{W^2}{E^2} \right)^N, \quad (23)$$

следует из того, что диаграммы для  $\Phi$  (рис. 1д) получаются из диаграмм для  $G$  (рис. 1а) путем разрезания по одной из  $(2N+1)$  электронных линий. Из способа построения разложений (22), (23) ясно, как они обобщаются на случай  $\kappa_1^2 \neq \kappa_2^2$ :

$$\Phi^{RA} = \sum_{N=0}^{\infty} (2N-1)!! W^{2N} \times \sum_{K=0}^{2N+1} (G_0^R)^K (G_0^A)^{2N+2-K}, \quad (24)$$

$$U^{RA} = \sum_{N=1}^{\infty} K_N W^{2N} \times \sum_{K=1}^{2N-1} (G^R)^{K-1} (G^A)^{2N-1-K}. \quad (25)$$

Нетрудно проверить, что выражения (18), (24) эквивалентны выражениям (14), (15) предыдущего раздела.

#### 4. ФИЗИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ И ТОЧНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Физически нуль-мерный случай соответствует модели Андерсона на одном узле решетки. Точная функция Грина

$$G^R(E) = \frac{1}{E - V + i0} \quad (26)$$

после тривиального усреднения имеет вид

$$\langle G^R(E) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(V) dV}{E - V + i0} \equiv \frac{1}{E + \Delta E + i\Gamma}. \quad (27)$$

Плотность состояний очевидно равна

$$\nu(E) = -\frac{1}{\pi} \text{Im} \langle G^R(E) \rangle = P(E), \quad (28)$$

а перенормированная энергия и затухание определяются выражениями

$$E + \Delta E = \frac{f(E)}{[\pi\nu(E)]^2 + [f(E)]^2}, \quad (29)$$

$$\Gamma = \frac{\pi\nu(E)}{[\pi\nu(E)]^2 + [f(E)]^2},$$

$$f(E) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(V) dV}{E - V}. \quad (30)$$

Величина  $\Phi^{RA}$  определяется выражением

$$\begin{aligned} \Phi^{RA} &= \langle G^R(E + \omega) G^A(E) \rangle = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{E - V + \omega + i0} \frac{1}{E - V - i0} P(V) dV \end{aligned} \quad (31)$$

и при  $\omega \rightarrow 0$  имеет сингулярность

$$\Phi^{RA} = \frac{2\pi P(E)}{-i\omega}, \quad (32)$$

очевидно совпадающую с (3). Из уравнения Бете–Солпитера (рис. 1е),

$$\Phi^{RA} = G^R G^A [1 + U^{RA} \Phi^{RA}], \quad (33)$$

имеем для вершины  $U^{RA}$

$$U^{RA} = \frac{1}{G^R G^A} + O(\omega). \quad (34)$$

Тот же результат можно получить из тождества Уорда (см. Примечание 1)

$$\Delta \Sigma = U^{RA} \Delta G. \quad (35)$$

Для гауссовского распределения (10) выражения (27), (31) эквивалентны (11), (13). Действительно, заменяя гамма-функцию в (14) и (15) на определяющий ее интеграл и суммируя возникающую геометрическую прогрессию (что соответствует суммированию по Борелю в теории расходящихся рядов [24]), получаем

$$\langle G \rangle = \frac{1}{\kappa^2 \sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} dx x^{-1/2} e^{-x} \left[ 1 - \frac{4|g|x}{\kappa^4} \right]^{-1}, \quad (36)$$

$$\Phi^{RA} = \frac{1}{\sqrt{\pi}(\kappa_1^2 - \kappa_2^2)} \int_0^\infty dx x^{-1/2} \times e^{-x} \left[ \frac{\kappa_2^2}{\kappa_2^4 - 4|g|x} - \frac{\kappa_1^2}{\kappa_1^4 - 4|g|x} \right]^{-1}, \quad (37)$$

что после замены  $x = V^2/4|g|$  приводится к (27) и (31).

### 5. ВЫСОКИЕ ПОРЯДКИ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

Возможность построения точных диаграммных разложений специфична для нуль-мерного случая. Более интересен вопрос о роли высоких порядков, которые могут быть исследованы в произвольной размерности. Для разложений разд. 3 асимптотики высоких порядков определяются двумя результатами:

$$L_N \approx (2N - 1)!!, \quad K_N \approx \frac{1}{e}(2N - 1)!! \quad (38)$$

Первый из них следует из того, что разложения (18) и (19) по затравочным энергиям связаны друг с другом ввиду соотношения  $G(E) = 1/(E - \Sigma)$ ; используя алгебру факториальных рядов [1, 13] для возведения в степень  $-1$ ,

$$(A_0 + A_1g + \dots + A_Ng^N + \dots)^{-1} = A_0^{-1} - A_0^{-2}A_1g - \dots - A_0^{-2}A_Ng^N - \dots, \quad (39)$$

легко показать, что в высоких порядках  $L_N \approx G_N$ . Результат для  $K_N$  получен Кучинским и Садовским [19]: из рекуррентных соотношений (20) следует, что  $K_N = \text{const}(2N - 1)!!$ , а совпадение константы с  $1/e$  было установлено численно.

Общим методом исследования высоких порядков является метод Липатова [25] (см. обзор [24]), основанный на том, что коэффициенты разложения  $F_N$  функции  $F(g)$  по степеням  $g$  выражаются через  $F(g)$  в виде контурного интеграла. Так, для (11) имеем

$$G_N = - \oint_C \frac{dg}{2\pi g} \int_0^\infty \varphi d\varphi \times \exp \left\{ -\frac{1}{2}\kappa^2\varphi^2 - \frac{1}{4}g\varphi^4 - N \ln g \right\} \quad (40)$$

( $C$  — контур, охватывающий точку  $g = 0$ ), где интеграл при больших  $N$  определяется вкладом перевальной конфигурации

$$\varphi_c^2 = \frac{4N}{\kappa^2}, \quad g_c = -\frac{\kappa^4}{4N}, \quad (41)$$

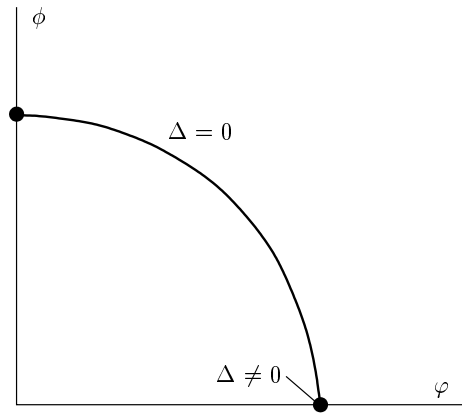


Рис. 2. Перевальные точки для интеграла (44)

приводя к результату

$$G_N = -\frac{1}{\sqrt{\pi}\kappa^2} \left(-\frac{4}{\kappa^4}\right)^N \Gamma\left(N + \frac{1}{2}\right), \quad N \gg 1, \quad (42)$$

который в данном случае совпадает с точным (см. (14)).

Аналогично для (13) имеем

$$[\Phi^{RA}]_N = \oint_C \frac{dg}{2\pi g} \int_0^\infty \varphi d\varphi \int_0^\infty \phi d\phi \times \exp \left\{ -\frac{1}{2}\kappa^2(\varphi^2 + \phi^2) - \frac{1}{2}i\Delta(\varphi^2 - \phi^2) - \frac{1}{4}g(\varphi^2 + \phi^2)^2 - N \ln g \right\}. \quad (43)$$

При  $\Delta = 0$  перевальные точки образуют непрерывное множество и лежат на окружности  $\varphi^2 + \phi^2 = 4N/\kappa^2$ ; при  $\Delta \neq 0$  они сводятся к дискретным точкам  $\varphi^2 = 0, \phi^2 = 4N/\kappa^2$  и  $\varphi^2 = 4N/\kappa^2, \phi^2 = 0$  (рис. 2). Вычисление вклада последних соответствует подходу работ [5, 10]: при этом применимость перевального приближения нарушается при  $\Delta \rightarrow 0$ . Причина в том, что при малых  $\Delta$  изменение действия вдоль окружности  $\varphi^2 + \phi^2 = 4N/\kappa^2$  является очень малым и мы имеем дело с типичной мягкой модой: интегрирование вдоль этой окружности должно проводиться точно, а не в перевальном приближении.

Общая идея обращения с мягкими модами [24, 26] состоит в том, что инстантон ищется как экстремум действия при дополнительном условии (констрейнте), фиксирующем степень свободы, соответствующую мягкой моде, после чего проводится инте-

грирование по этой степени свободы. В данном случае констрэйт удобно выбрать в виде

$$\varphi^2 - \phi^2 = \xi = \text{const}, \quad (44)$$

так что нужно искать экстремум функции

$$\frac{1}{2}\kappa^2(\varphi^2 + \phi^2) + \frac{1}{4}g(\varphi^2 + \phi^2)^2 - \frac{1}{2}i\Delta(\varphi^2 - \phi^2) - \mu(\varphi^2 - \phi^2 - \xi), \quad (45)$$

где  $\mu$  — множитель Лагранжа. Экстремум существует при  $\mu = -i\Delta/2$ , когда (45) соответствует действию симметричной задачи ( $\Delta = 0$ ).

Формальная процедура состоит во введении под интеграл (13) разложения единицы,

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \delta(\xi - \varphi^2 + \phi^2), \quad (46)$$

приводящего его к виду

$$\Phi^{RA} = \int_0^{\infty} \varphi d\varphi \int_0^{\infty} \phi d\phi \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \delta(\xi - \varphi^2 + \phi^2) \times \exp \left\{ -\frac{1}{2}\kappa^2(\varphi^2 + \phi^2) - \frac{1}{4}g(\varphi^2 + \phi^2)^2 + \frac{1}{2}i\Delta\xi \right\}. \quad (47)$$

Вводя полярные координаты  $\varphi = r \cos \theta$ ,  $\phi = r \sin \theta$ , получаем

$$\Phi^{RA} = \int_0^{\pi/2} d\theta \sin 2\theta \int_{-\infty}^{\infty} d\xi e^{\frac{1}{2}i\Delta\xi} \int_0^{\infty} r^3 dr \times \exp \left\{ -\frac{1}{2}\kappa^2 r^2 - \frac{1}{4}g r^4 \right\} \delta(\xi - r^2 \cos 2\theta), \quad (48)$$

где интеграл по  $r$  (без учета  $\delta$ -функции) аналогичен (11) и его далекие коэффициенты разложения определяются перевальной точкой  $r_c = \sqrt{4N/\kappa^2}$ . При малых  $\Delta$  отклонениями  $r$  от  $r_c$  в  $\delta$ -функции можно пренебречь, так как они несущественны по сравнению с изменением  $\theta$ ; это позволяет факторизовать зависимость от  $\Delta$ :

$$\Phi^{RA}(\Delta) = \Phi^{RA}(0) \int_0^{\pi/2} 2d\theta \sin 2\theta \times \exp \left\{ \frac{1}{2}i\Delta r_c^2 \cos 2\theta \right\}. \quad (49)$$

Вычисляя коэффициенты разложения для  $\Phi^{RA}(0)$ , получаем

$$[\Phi^{RA}(\Delta)]_N = \frac{2}{\sqrt{\pi}\kappa^4} \left( -\frac{4}{\kappa^4} \right)^N \times \Gamma \left( N + \frac{3}{2} \right) \frac{e^{i\Delta\lambda N} - e^{-i\Delta\lambda N}}{2i\Delta\lambda N}, \quad \lambda = \frac{2}{\kappa^2}, \quad (50)$$

что при малых  $\Delta$  совпадает с асимптотикой коэффициентов в формуле (15). Описанный метод может быть обобщен на произвольную размерность пространства (разд. 8).

### 6. ЧТО МОЖНО ИЗВЛЕЧЬ ИЗ ВЫСОКИХ ПОРЯДКОВ?

Вклад высоких порядков теории возмущений во многих случаях оказывается содержательным. Это связано с соотношением [1, 13]

$$\text{Im} \sum_{N=N_0}^{\infty} ca^N \Gamma(N+b) g^N e^{i\delta N} = \frac{\pi c}{(ag)^b} e^{-1/ag}, \quad ag > 0, \quad (51)$$

получаемым в результате суммирования по Борелю ряда в левой части. При  $\delta \rightarrow 0$  результат не зависит от  $N_0$ , в соответствии с тем, что мнимая часть каждого члена ряда (и сумма их конечного числа) является бесконечно малой. При конечных  $\delta$  результат (51) сохраняется при  $N_0 \ll 1/\delta$ , что не является обременительным, так как обычно величина  $\delta$  экспоненциально мала. Функциональная форма  $ca^N \Gamma(N+b)$  является типичной для асимптотики высоких порядков, получаемой методом Липатова [24]; поправки к ней имеют форму регулярного разложения по  $1/N$ , что при суммировании согласно формуле (51) превращается в регулярное разложение по  $g$ . Поэтому результат (51) конструктивен при  $g \ll 1$ ; при этом действительная часть ряда достаточно хорошо аппроксимируется несколькими первыми членами. Для разложений разд. 3 применимость подобных результатов ограничена областью  $|E| \gg W$ . Непертурбативные результаты типа  $\exp(-\text{const}/g)$  обычно получают инстантонным методом, но соотношение (51) позволяет их воспроизвести непосредственно из теории возмущений.

Суммирование высоких порядков для  $\langle G \rangle$

(см. (18)) позволяет получить флуктуационный хвост плотности состояний

$$\begin{aligned} \nu(E) &= -\frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \langle G^R(E) \rangle = -\frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \frac{1}{E + i\delta} \times \\ &\times \sum_{N=N_0}^{\infty} 2^N \frac{\Gamma(N + 1/2)}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{W}{E + i\delta} \right)^{2N} = \\ &= \frac{e^{-E^2/2W^2}}{\sqrt{2\pi W^2}} \end{aligned} \quad (52)$$

в согласии с формулой (28) для распределения (10). Суммирование ряда (19) для  $\Sigma$  позволяет получить затухание  $\Gamma$ :

$$\begin{aligned} \Gamma &= -\operatorname{Im} \Sigma^R = -\operatorname{Im}(E + i\delta) \times \\ &\times \sum_{N=N_0}^{\infty} 2^N \frac{\Gamma(N + 1/2)}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{W}{E + i\delta} \right)^{2N} = \\ &= \frac{\pi E^2 e^{-E^2/2W^2}}{\sqrt{2\pi W^2}}, \end{aligned} \quad (53)$$

что можно получить также из формулы (29) при  $|E| \gg W$ , когда  $f(E) \approx 1/E \gg \pi\nu(E)$ .

Суммирование ряда с коэффициентами (50) позволяет получить сингулярность  $1/\omega$ :

$$\begin{aligned} [\Phi^{RA}]_{sing} &= \sum_{N=N_0}^{\infty} [\Phi^{RA}]_N g^N = \\ &= \frac{2\pi}{-i\omega} \frac{e^{-E^2/2W^2}}{\sqrt{2\pi W^2}} \end{aligned} \quad (54)$$

в согласии с формулой (32). Здесь чрезвычайно существенно, что экспоненты в числителе формулы (50) имеют мнимые аргументы разных знаков; поэтому действительные части рядов типа (51) сокращаются, тогда как мнимые — складываются, приводя к сингулярности  $1/\omega$ . Если бы мнимые добавки к энергии в формуле (9) имели одинаковые знаки (что соответствует средним типа  $\langle G^R G^R \rangle$  или  $\langle G^A G^A \rangle$ ), то аргументы экспонент в числителе (50) имели бы вид  $i\Delta_1 \lambda N$  и  $i\Delta_2 \lambda N$  с  $\operatorname{Re} \Delta_1 \cdot \operatorname{Re} \Delta_2 > 0$ , что привело бы к сокращению (в главном порядке по  $\Delta$ ) как действительных, так и мнимых частей двух рядов типа (51) и устранению сингулярности.

Вклад высоких порядков в сумму (25) для  $U^{RA}$  вычисляется аналогично: полагая  $\kappa_1^2 = -\bar{E}e^{-i\beta}$ ,  $\kappa_2^2 = -\bar{E}e^{i\beta}$ , получим

$$\begin{aligned} U^{RA} G^R G^A &= \sum_{N=N_0}^{\infty} 2^N \frac{\Gamma(N + 1/2)}{\sqrt{\pi}e} \left( \frac{W}{\bar{E}} \right)^{2N} \times \\ &\times \frac{e^{i\beta(2N-1)} - e^{i\beta(2N-1)}}{e^{i\beta} - e^{-i\beta}} \approx \frac{\pi \bar{E} P(\bar{E})}{e\beta}, \end{aligned} \quad (55)$$

что с учетом равенства  $\beta = \Gamma/\bar{E}$  и выражения (53) дает результат  $U^{RA} G^R G^A \approx 1$ , совпадающий с формулой (34).

Нетрудно видеть, что в области флуктуационного хвоста ( $|E| \gg W$ ) фактически все физические результаты (разд. 4) определяются высокими порядками. Вклад последних во всех случаях доминирует над вкладом первых членов ряда, понимаемых в асимптотическом смысле [24].

## 7. ПАРАДОКС И ЕГО РАЗРЕШЕНИЕ

К сожалению, результаты суммирования для  $\Phi^{RA}$  и  $U^{RA}$  (см. (54) и (55)) совпадают с точными (разд. 4) лишь по случайным причинам. Из уравнения Бете–Солпитера (34) ясно, что

$$U^{RA} = \frac{1}{G^R G^A} - \frac{1}{\Phi^{RA}}, \quad (56)$$

т. е. ряды для  $\Phi^{RA}$  и  $U^{RA}$  определяются взаимобратными функциями и их далекие коэффициенты разложения практически совпадают, различаясь лишь коэффициентом (см. (39)). Из формул (24) и (25) легко получить разложение  $U^{RA}$  по затравочным функциям Грина и разложение  $\Phi^{RA}$  по перенормированным функциям Грина, суммирование которых дает результаты

$$\Phi^{RA} = \frac{\pi P(\bar{E})}{e\beta \bar{E}}, \quad U^{RA} G^R G^A = \frac{2\pi E^2 P(E)}{-i\omega}, \quad (57)$$

находящиеся в резком противоречии с формулами (54), (55) и разд. 4.

Мы сталкиваемся с парадоксами, наиболее яркий из которых сформулирован в разд. 1. Сингулярность  $1/\omega$  определяется высокими порядками (разд. 6); поведение высоких порядков для  $\Phi^{RA}$  и  $U^{RA}$  одинаково в силу формул (56) и (39); при этом  $\Phi^{RA}$  имеет сингулярность, а  $U^{RA}$  не имеет (см. (32), (34)).

Анализ парадокса удобно начать с вывода второго результата (38), в котором множитель  $1/e$  был установлен в работе [19] лишь численно: как мы увидим, это дает ключ к проблеме. Как ясно из формулы (19),  $K_N$  есть число «скелетных» диаграмм  $N$ -го порядка для собственной энергии  $\Sigma$  (рис. 1*г*), тогда как  $L_N$  есть число диаграмм для  $\Sigma$  с неисключенными собственно-энергетическими вставками (рис. 1*е*). Как уже упоминалось, в высоких порядках  $L_N \approx (2N - 1)!!$  вследствие формулы (39) и  $K_N = \operatorname{const}(2N - 1)!!$  вследствие (20), а задача состоит в определении  $\operatorname{const}$ . Легко понять, что в число  $L_N$  входят



а) скелетные диаграммы, число которых  $K_N$ ;

б) диаграммы, получаемые из скелетных, на один порядок ниже: их число  $K_{N-1} \approx K_N/2N$ , но в них можно сделать примерно  $2N$  однопетлевых вставок во внутренние линии, поэтому их полное число по-прежнему  $K_N$ ;

в) диаграммы, получаемые из скелетных, на два порядка ниже: их число  $K_{N-2} \approx K_N/(2N)^2$ , но в них можно сделать около  $(2N)^2/2!$  однопетлевых вставок, что даст число  $K_N/2!$ ; кроме того, можно сделать еще примерно  $2N$  двухпетлевых вставок, но это даст число диаграмм порядка  $K_N/N$ , что несущественно при больших  $N$ ;

г) диаграммы, получаемые из скелетных, на три порядка ниже: их число  $K_{N-3} \approx K_N/(2N)^3$ , но в них можно сделать около  $(2N)^3/3!$  однопетлевых вставок, что даст число  $K_N/3!$ ; кроме того, можно сделать еще примерно  $2N$  трехпетлевых вставок или порядка  $(2N)^2$  комбинированных (двух + однопетлевых), но это дает вклад, несущественный при больших  $N$ , и т. д.

Мы видим, что различие  $L_N$  и  $K_N$  в главном порядке определяется однопетлевыми вставками; поэтому

$$L_N = K_N(1 + 1/1! + 1/2! + 1/3! + \dots) = eK_N, \quad (58)$$

что и требовалось доказать.

Обнаруженное здесь свойство является частным случаем более общего утверждения [12]: главная асимптотика Липатова «чувствует» перенормировку энергии (или «массы» в теоретико-полевых терминах) лишь на однопетлевом уровне, причем в виде лишь постоянного множителя. Более точно: пусть в терминах затравочной энергии  $E$  асимптотика Липатова имеет вид

$$c(E)a(E)^N \Gamma(N+b) \quad (59)$$

(параметр  $b$  определяется лишь числом внешних линий и нулевых мод и от энергии не зависит [24]); тогда при переходе к перенормированной энергии  $\tilde{E}$  она будет иметь вид

$$k(\tilde{E})c(\tilde{E})a(\tilde{E})^N \Gamma(N+b), \quad (60)$$

где  $k$  не зависит от  $N$ , а величины  $c(\tilde{E})$  и  $a(\tilde{E})$  являются такими же функциями  $\tilde{E}$ , какими они были в зависимости от  $E$ .

Действительно, переход в функциональных интегралах (7), (8) от затравочной энергии к перенормированной,  $\kappa^2 = \tilde{\kappa}^2 + \Sigma(0, \tilde{\kappa}^2)$ , сводится к замене переменных вида

$$\kappa^2 = \tilde{\kappa}^2 + a_1(\tilde{\kappa}^2)g + a_2(\tilde{\kappa}^2)g^2 + a_3(\tilde{\kappa}^2)g^3 + \dots \quad (61)$$

При вычислении высоких порядков в функциональном интеграле существенна перевальная конфигурация, для которой  $\varphi_c^2 \sim \phi_c^2 \sim N$ ,  $g_c \sim 1/N$  (ср. (41)), поэтому в формуле (7)

$$\exp(-S\{\varphi_c, \kappa^2\}) = \exp(-S\{\varphi_c, \tilde{\kappa}^2\} - A),$$

$$A = \frac{1}{2}a_1(\tilde{\kappa}^2)g_c \int d^d x \varphi_c^2(x) + O(1/N), \quad (62)$$

т. е. переход от  $\kappa^2$  к  $\tilde{\kappa}^2$  сохраняет функциональную форму перевального вклада и приводит лишь к появлению не зависящего от  $N$  множителя  $e^{-A}$ , который определяется коэффициентом  $a_1(\tilde{\kappa}^2)$ , т. е. однопетлевым вкладом<sup>6</sup>). Поэтому для асимптотики Липатова ничего не изменится, если коэффициенты  $a_2(\tilde{\kappa}^2)$ ,  $a_3(\tilde{\kappa}^2)$ , ... положить равными нулю. Между тем, полная перенормировка энергии качественно отличается от однопетлевой. В первом случае  $\tilde{\kappa}^2 = -E - \Delta E - i\Gamma$  содержит такое же затухание  $\Gamma$ , как и средняя функция Грина, которое конечно при всех  $E$  (см. (29))<sup>7</sup>; во втором случае мнимая часть  $\tilde{\kappa}^2$  является бесконечно малой во всей области флуктуационного хвоста. Более того, можно рассмотреть произвольную замену переменных типа (61), выбирая коэффициенты  $a_2(\tilde{\kappa}^2)$ ,  $a_3(\tilde{\kappa}^2)$ , ... по своему усмотрению, что позволяет произвольно изменять мнимую часть  $\tilde{\kappa}^2$  без изменения функционального вида асимптотики Липатова<sup>8</sup>).

Из приведенных соображений ясно, что инстантонный метод позволяет установить лишь общую структуру сингулярностей для  $\Phi^{RA}$  и  $U^{RA}$ ,

$$\Phi^{RA} \sim \frac{1}{\omega + 2i\gamma}, \quad U^{RA} \sim \frac{1}{\omega + 2i\tilde{\gamma}}, \quad (63)$$

тогда как параметры  $\gamma$  и  $\tilde{\gamma}$  остаются неопределенными и не могут быть установлены в рамках инстантонного метода — ни в главном перевальном приближении, ни при учете поправок конечного порядка к нему. Они должны фиксироваться на основе дополнительных соображений, учитывающих информацию из низших порядков теории возмущений. В нуль-мерном случае параметры  $\gamma$  и  $\tilde{\gamma}$  однозначно фиксируются с помощью тождества Уорда (35) и уравнения Бете–Солпитера (33):

<sup>6</sup> При учете последовательных поправок порядка  $1/N$ ,  $1/N^2$ , ... к асимптотике Липатова становятся существенными значения  $a_2(\tilde{\kappa}^2)$ ,  $a_3(\tilde{\kappa}^2)$  и т. д.

<sup>7</sup> Это так и для произвольной размерности пространства [1, 13, 27].

<sup>8</sup> Заметим, что при  $d \geq 2$  правильная перенормировка энергии на однопетлевом уровне (т. е. правильное значение  $a_1(\tilde{\kappa}^2)$ ) является принципиально необходимой, так как она устраняет ультрафиолетовую расходимость в параметре  $c$  асимптотики Липатова [1, 12, 13].

$$\gamma = 0, \quad \tilde{\gamma} = \Gamma, \quad (64)$$

откуда очевидно отсутствие общих принципов, делающих предпочтительным использование затравочной или перенормированной энергии. Таким образом, параметры  $\gamma$  и  $\tilde{\gamma}$  оказываются различными и в общем случае зависят от импульсов; вопрос о способе их фиксации для произвольной размерности пространства остается открытым. Поскольку сингулярности  $\Phi^{RA}$  и  $U^{RA}$  определяются одним и тем же коэффициентом диффузии (см. (2), (4)), на концептуальном уровне можно считать подтвержденной необходимость процедуры самосогласования при его вычислении, используемой в теориях типа Волхардта–Вольфле [1, 2].

### 8. ИНСТАНТОННЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ В ОБЩЕМ СЛУЧАЕ

Покажем, как должны быть модифицированы инстантонные вычисления работ [5, 10] с учетом проведенного анализа. Вводя под интеграл (8) разложение единицы, аналогичное (46),

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \delta \left( \xi - \int d^d x \varphi^2(x) + \int d^d x \phi^2(x) \right), \quad (65)$$

приведем его к виду

$$\begin{aligned} \Phi^{RA}(x_1, x_2, x_3, x_4) &= \\ &= \int D\Psi \varphi_\alpha(x_1) \varphi_\alpha(x_2) \phi_\beta(x_3) \phi_\beta(x_4) \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} d\xi e^{i\Delta\xi/2} \delta \left( \xi - \int d^d x (\varphi^2 - \phi^2) \right) \times \\ &\times \exp \left\{ - \int d^d x \left[ \frac{1}{2} (\nabla\Psi)^2 + \frac{1}{2} \kappa^2 \Psi^2 + \frac{1}{4} g \Psi^4 \right] \right\}, \quad (66) \end{aligned}$$

где мы ввели составной  $(m+n)$ -компонентный вектор

$$\vec{\Psi} = \left\{ \begin{array}{c} \varphi \\ \phi \end{array} \right\}. \quad (67)$$

В инстантонных вычислениях перевальная конфигурация ищется в виде

$$\begin{aligned} \varphi_c(x) &= \frac{\psi_c(x)}{\sqrt{-g}} \mathbf{u}, & \phi_c(x) &= \frac{\psi_c(x)}{\sqrt{-g}} \mathbf{v}, \\ \Psi_c(x) &= \frac{\psi_c(x)}{\sqrt{-g}} \mathbf{U}, \end{aligned} \quad (68)$$

где

$$\mathbf{U} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{array} \right\}, \quad U^2 = u^2 + v^2. \quad (69)$$

Известно, что коэффициенты разложения для коррелятора  $M$  полей в  $n$ -компонентной теории  $\varphi^4$  имеют вид [13, 27]

$$\begin{aligned} \langle \varphi_{\alpha_1}(x_1) \dots \varphi_{\alpha_M}(x_M) \rangle_N &= c\{x_i\} (-S_0)^{-N} \times \\ &\times \Gamma(N+b) \int d^n u \delta(u^2-1) u_{\alpha_1} \dots u_{\alpha_M}, \\ c\{x_i\} &= C_{Mn} \int d^d y \psi_c(x_1-y) \dots \psi_c(x_M-y), \quad (70) \\ S_0 &= \frac{I_4}{4}, \quad I_p = \int d^d x \psi_c^p(x), \\ b &= \begin{cases} (M+n+d-1)/2, & d < 4, \\ (M+n-1)/2, & d > 4. \end{cases} \end{aligned}$$

Выражение для константы  $C_{Mn}$  несколько громоздко и может быть найдено в работах [13, 27]. Если ограничиться в  $\delta$ -функции (66) перевальным приближением, приведя ее к виду

$$\delta \left( \xi - \frac{I_2}{|g_c|(u^2-v^2)} \right), \quad g_c = -\frac{I_4}{4N}, \quad (71)$$

то интеграл по  $D\Psi$  в формуле (66) является обычным функциональным интегралом  $(n+m)$ -компонентной теории  $\varphi^4$  и его коэффициенты разложения следуют из формулы (70) при  $M=4$  в результате замены интегрирования  $d^n u$  на  $d^{n+m} U = d^n u d^m v$ :

$$\begin{aligned} [\Phi^{RA}\{x_i\}]_N &= c\{x_i\} (-S_0)^{-N} \Gamma(N+b) \times \\ &\times \int d^n u d^m v \delta(u^2+v^2-1) u_\alpha^2 v_\beta^2 e^{i\Delta\lambda N(u^2-v^2)}, \quad (72) \end{aligned}$$

где  $\lambda = 2I_2/I_4$ . Вычисление интеграла проводится в полярных координатах  $u = r \cos \theta$ ,  $v = r \sin \theta$  и при  $n, m \rightarrow 0$  дает

$$\begin{aligned} \frac{S_n}{n} \frac{S_m}{m} \int_0^\infty u^{n-1} du \int_0^\infty v^{m-1} dv \delta(u^2+v^2-1) u^2 v^2 \times \\ \times e^{i\Omega(u^2-v^2)} = \frac{e^{i\Omega} - e^{-i\Omega}}{8i\Omega}, \quad (73) \end{aligned}$$

где использовано выражение для  $S_n$  — площади единичной сферы в  $n$ -мерном пространстве,

$$\frac{S_n}{n} = \frac{2\pi^{n/2}}{n\Gamma(n/2)} \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow 0). \quad (74)$$

Таким образом, асимптотика высоких порядков для коэффициентов разложения  $\Phi^{RA}$ ,

$$\begin{aligned} [\Phi^{RA}\{x_i\}]_N &= \frac{1}{4} c\{x_i\} (-S_0)^{-N} \Gamma(N+b) \times \\ &\times \frac{e^{i\Delta\lambda N} - e^{-i\Delta\lambda N}}{2i\Delta\lambda N}, \quad (75) \end{aligned}$$

имеет такую же зависимость от  $\Delta$ , как в нуль-мерном случае (см. (50)). Поэтому остается справедливым все сказанное в разд. 6 о необходимости мнимых добавок разного знака в  $\kappa_1^2$  и  $\kappa_2^2$  для возникновения сингулярного вклада при суммировании высоких порядков:

$$[\Phi^{RA}\{x_i\}]_{sing} = \frac{I_4}{8I_2} c\{x_i\} \left(\frac{S_0}{|g|}\right)^b \times \exp\left\{-\frac{S_0}{|g|}\right\} \frac{4\pi}{-i\omega + 2\gamma}. \quad (76)$$

В соответствии с проведенным анализом мы заметили входящую в формулу (9) бесконечно малую мнимую добавку  $\delta$  на, вообще говоря, конечную величину  $\gamma$ , которая в рамках инстантонного анализа остается неопределенной.

Выше неявно предполагалось, что размерность пространства  $d < 4$  и инстантон  $\psi_c(x)$  определяется уравнением

$$-\Delta\psi_c + \kappa^2\psi_c - \psi_c^3 = 0. \quad (77)$$

При  $d > 4$  теория неперенормируема и должна рассматриваться на решетке: это требует модификации градиентного члена в действии и замены интегрирования по  $d^d y$  в формуле (70) на суммирование по узлам решетки; результаты (75), (76) остаются неизменными, но под  $\psi_c(x)$  нужно понимать решеточный инстантон [13]. При  $d = 4$  описанные вычисления требуют модификации: в безмассовой теории расходится интеграл  $I_2$ , а в массивной требуется аккуратное интегрирование по дополнительной мягкой моде, связанной с изменением радиуса инстантона [26].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 06-02-17541).

## ЛИТЕРАТУРА

1. И. М. Суслов, УФН **168**, 503 (1998).
2. D. Vollhardt and P. Wölfle, Phys. Rev. B **22**, 4666 (1980); Phys. Rev. Lett. **48**, 699 (1982); in *Modern Problems in Condensed Matter Sciences*, ed. by V. M. Agranovich and A. A. Maradudin, North-Holland, Amsterdam (1992), Vol. 32.
3. И. М. Суслов, ЖЭТФ **108**, 1686 (1995).
4. В. Л. Березинский, Л. П. Горьков, ЖЭТФ **77**, 2498 (1979).
5. М. В. Садовский, ЖЭТФ **83**, 1418 (1982).
6. M. V. Sadovskii, Sov. Sci. Rev. A — Physics Reviews, ed. by I. M. Khalatnikov, **7**, 1, Harwood Academic Press, NY (1986).
7. К. Б. Ефетов, ЖЭТФ **88**, 1032 (1985).
8. P. Markos, Acta Phys. Slovaca **56**, 561 (2006); E-print archives, cond-mat/0609580.
9. I. M. Suslov, E-print archives, cond-mat/0610744.
10. J. L. Cardy, J. Phys. C **11**, L321 (1978).
11. А. А. Абрикосов, Л. П. Горьков, И. Е. Дзялошинский, *Методы квантовой теории поля в статистической физике*, Физматгиз, Москва (1962).
12. E. Brezin and G. Parisi, J. Stat. Phys. **19**, 269 (1978).
13. И. М. Суслов, ЖЭТФ **106**, 560 (1994).
14. V. Janis and J. Kolorenc, Phys. Rev. B **71**, 033103 (2005); Phys. Rev. B **71**, 245106 (2005); Phys. Stat. Sol. B **241**, 2032 (2004).
15. I. M. Suslov, E-print archives, cond-mat/0612654.
16. P. W. Anderson, Phys. Rev. **109**, 1492 (1958).
17. E. N. Economou and M. H. Cohen, Phys. Rev. B **5**, 2931 (1972).
18. А. Г. Басуев, А. Н. Васильев, ТМФ **18**, 129 (1974); P. Cvitanovic, B. Lautrup, and R. B. Pearson, Phys. Rev. D **18**, 1939 (1978); L. G. Molinary and N. Manini, Eur. Phys. J. B **51**, 331 (2006).
19. Э. З. Кучинский, М. В. Садовский, ЖЭТФ **113**, 664 (1998).
20. C. M. Bender, S. Boettcher, and L. Lipatov, Phys. Rev. Lett. **68**, 3674 (1992); Phys. Rev. D **46**, 5557 (1992); C. M. Bender and S. Boettcher, Phys. Rev. D **48**, 4919 (1993); **51**, 1875 (1995).
21. A. Pelissetto and E. Vicari, Nucl. Phys. B **519**, 626 (1998).
22. A. Nitzan, K. F. Freed, and M. N. Cohen, Phys. Rev. B **15**, 4476 (1977); М. В. Садовский, УФН **133**, 223 (1981).
23. Г. Корн, Т. Корн, *Справочник по математике*, Наука, Москва (1977).
24. И. М. Суслов, ЖЭТФ **127**, 1350 (2005).
25. Л. Н. Липатов, ЖЭТФ **72**, 411 (1977).
26. И. М. Суслов, ЖЭТФ **111**, 220 (1997).
27. И. М. Суслов, ЖЭТФ **111**, 1896 (1997).