ЖЭТФ, 2008, том 133, вып. 1, стр. 171–182

ЛИНЕЙНЫЙ МЕХАНИЗМ ГЕНЕРАЦИИ ПОВЕРХНОСТНЫХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН В ТЕЧЕНИИ С ГОРИЗОНТАЛЬНЫМ СДВИГОМ

М. В. Калашник [*]

Научно-производственное объединение «Тайфун»
249038, Обнинск, Калужская обл., Россия

Поступила в редакцию 14 июня 2007 г.

Исследован линейный механизм генерации поверхностных гравитационных волн, связанный с наличием течения с постоянным горизонтальным сдвигом скорости в слое жидкости со свободной поверхностью. Установлено, что в присутствии свободной поверхности такое течение гидродинамически неустойчиво, причем неустойчивость носит алгебраический характер. Развитие неустойчивости приводит к образованию на поверхности жидкости гравитационных волн, амплитуда которых нарастает по степенному закону. Для изучения неустойчивости использован немодальный подход, основанный на рассмотрении поведения отдельной пространственной фурье-гармоники возмущения в полулагранжевой (движущейся вместе с потоком) системе координат. Проведено разделение возмущений в сдвиговом потоке на два класса (волновые и вихревые) по значению потенциальной завихренности. Показано, что при слабых сдвигах с течением времени вихревые возмущения затухают, а энергия волновых возмущений неограниченно растет. Описан эффект трансформации вихревых возмущений в волновые при сильных сдвигах.

PACS: 47.35.-i, 47.20.Ft, 42.15.-i

1. ВВЕДЕНИЕ

Вопрос о механизмах генерации поверхностных гравитационных волн, в частности морского волнения на поверхности раздела вода–воздух, является классической проблемой гидродинамики. Исторически первый механизм — механизм неустойчивости Кельвина–Гельмгольца — предложен в работе Кельвина [1]. Тот факт, что неустойчивость не может развиваться при скоростях ветра меньших 6.5 м/с, стимулировал изучение других механизмов, среди которых можно отметить механизмы Джеффриса [2] и Эккарта [3] (обзор ранних теорий дан в книге [4]). К настоящему времени наиболее полно изучены резонансный механизм Филлипса [5] и механизм неустойчивости квазиламинарного воздушного потока над взволнованной поверхностью, предложенный Майлсом [6]. Подробное изложение этих механизмов содержится, например, в книгах [4, 7, 8].

В основе всех упомянутых механизмов лежит представление о передаче энергии от ветра к волнам. В настоящей работе рассмотрен механизм, не требующий энергообмена между ветром и волнами и связанный с наличием в слое жидкости со свободной поверхностью течения с постоянным горизонтальным сдвигом скорости. Показано, что в присутствии свободной поверхности такое течение гидродинамически неустойчиво, причем неустойчивость носит алгебраический характер. Развитие неустойчивости приводит к образованию на поверхности жидкости гравитационных волн, амплитуда которых нарастает по степенному закону. Важно подчеркнуть принципиальную роль ориентации сдвига в развитии неустойчивости. Вертикальный сдвиг скорости течения, как показано в недавней работе [9], приводит лишь к модификации (хотя и нетривиальной) дисперсионных характеристик гравитационных волн.

Для изучения неустойчивости в работе использован восходящий к Кельвину подход [10], основанный на рассмотрении поведения отдельной пространственной фурье-гармоники возмущения в полулагранжевой (движущейся вместе с потоком) системе координат. В последние годы этот подход ши-

[*] E-mail: lingel@obninsk.com

роко применялся в задачах гидродинамики и физики плазмы [11–16] и получил специальное название — немодальный анализ. Как показано в работе, при немодальном описании динамики важную роль играет лагранжев закон сохранения потенциальной завихренности для возмущений. По значению потенциальной завихренности возмущения в сдвиговом потоке разделяются на два класса: быстроосциллирующие волновые возмущения с нулевой потенциальной завихренностью и медленные вихревые возмущения с потенциальной завихренностью, отличной от нуля. Динамика волновых и вихревых возмущений исследована аналитически (метод ВКБ) и численно. Показано, что с течением времени вихревые возмущения затухают, а энергия волновых возмущений неограниченно растет.

Следующий раздел является вводным и содержит описание общего механизма усиления гидродинамических возмущений в сдвиговых течениях в рамках лучевой теории волн.

2. МЕХАНИЗМ УСИЛЕНИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ В СДВИГОВЫХ ТЕЧЕНИЯХ (ЛУЧЕВАЯ ТЕОРИЯ)

Возможность усиления гидродинамических возмущений в сдвиговых течениях следует из простого анализа основных уравнений лучевой теории волн (геометрической оптики) [4, 7, 17]. Напомним, что в этой теории рассматривают поведение быстроосциллирующих волновых пакетов вида $a(\mathbf{x},t)\exp[is(\mathbf{x},t)]$, где $s(\mathbf{x},t)$ — фаза, $a(\mathbf{x},t)$ — амплитуда пакета. В неподвижной среде волновой вектор $\mathbf{k} = \nabla s$ и частота $\omega = -\partial s/\partial t$ связаны дисперсионным соотношением $\omega = W(\mathbf{k})$, групповая скорость пакета определена выражением $\mathbf{c}_g = \partial W/\partial \mathbf{k}$. Если пакет распространяется в течении с медленно меняющейся скоростью $\mathbf{U}(\mathbf{x},t)$ (в движущейся среде), то частота, воспринимаемая неподвижным наблюдателем, равна

$$\omega = \mathbf{k}\cdot\mathbf{U} + W(\mathbf{k}).$$

Из кинематического уравнения сохранения плотности волновых гребней, $\partial\mathbf{k}/\partial t + \nabla\omega = 0$, при этом следует уравнение, описывающее изменение волнового вектора $\mathbf{k}(\mathbf{x},t)$ вдоль луча [4, 7]:

$$\frac{\partial\mathbf{k}}{\partial t} + (\mathbf{U}+\mathbf{c}_g)\cdot\nabla\mathbf{k} = -\mathbf{k}\cdot\nabla\mathbf{U}, \qquad (1)$$

где $\nabla\mathbf{U}$ — тензор градиентов скоростей с компонентами $\partial U_j/\partial x_i$. Для описания изменения амплитуды в лучевой теории используют уравнение сохранения волнового действия [4, 7, 17]

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\overline{E}}{\omega_0}\right) + \nabla\left[(\mathbf{U}+\mathbf{c}_g)\frac{\overline{E}}{\omega_0}\right] = 0. \qquad (2)$$

Здесь $\overline{E}$ — усредненная по фазе энергия пакета, пропорциональная квадрату амплитуды $a(\mathbf{x},t)$, $\omega_0 = W(\mathbf{k}(\mathbf{x},t))$ — собственная частота пакета.

В общем случае решения уравнений (1), (2) находятся численно методом характеристик. Простые аналитические решения, зависящие только от времени, могут быть получены в ситуации, когда стационарное течение со скоростью $\mathbf{U}(\mathbf{x})$ имеет постоянные градиенты (сдвиги) и в начальный момент времени $t = 0$ имеется немодулированный пакет с постоянными волновым вектором и амплитудой (монохроматическая волна). Рассмотрим для простоты заполняющую плоскость xy двумерную среду с течением со скоростью $\mathbf{U} = (Ay, 0)$, где $A = \mathrm{const}$ — величина сдвига скорости. Для компонент двумерного волнового вектора $\mathbf{k} = (k, l)$ из уравнения (1) следуют уравнения

$$\frac{dk}{dt} = 0, \quad \frac{dl}{dt} = -Ak,$$

откуда

$$k = k(0) = \mathrm{const}, \quad l = l(t) = l(0) - Akt.$$

Таким образом, волновое число в направлении, перпендикулярном потоку, линейно зависит от времени. Это приводит к линейному росту модуля волнового вектора на больших временах,

$$|\mathbf{k}(t)| = \sqrt{k^2 + (l - Akt)^2}\,, \qquad (3)$$

и, что наиболее важно, к зависимости от времени собственной частоты $\omega_0(t) \equiv W(\mathbf{k}(t))$.

Нетрудно видеть, что для немодулированной волны уравнение (2) дает $\overline{E}/\omega_0 = C = \mathrm{const}$, откуда

$$\overline{E} = C\omega_0(t), \quad \omega_0(t) = W(\mathbf{k}(t)). \qquad (4)$$

Энергия $\overline{E}$, таким образом, изменяется пропорционально частоте, т. е. является адиабатическим инвариантом. Если в дисперсионном соотношении $W(\mathbf{k})$ является возрастающей функцией $|\mathbf{k}|$, то в соответствии с выражениями (3), (4) на больших временах будет происходить неограниченный рост $\overline{E}$, т. е. усиление начального немодулированного волнового возмущения.

В качестве простого и важного примера отметим, что из дисперсионного соотношения для акустических волн, $W(\mathbf{k}) = c|\mathbf{k}|$ (c — скорость звука), и соотношений (3), (4) немедленно следует линейный рост энергии на больших временах: $\overline{E} \propto t$ при $t \to \infty$. В сдвиговых течениях сжимаемого газа, таким образом, происходит алгебраическое усиление акустических возмущений. В серии работ [14–16] этот эффект подробно исследован в рамках полных гидродинамических уравнений и положен в основу нового механизма генерации звука.

Из дисперсионного соотношения для поверхностных гравитационных волн на глубокой воде, $W(\mathbf{k}) = \sqrt{g|\mathbf{k}|}$ (g — ускорение свободного падения), и соотношений (3), (4) также следует неограниченный рост энергии, однако теперь уже по корневому закону: $\overline{E} \propto \sqrt{t}$ при $t \to \infty$. В силу известных ограничений лучевой теории [4, 17], полученный результат, разумеется, нельзя считать строго обоснованным. Ниже он будет получен на основе точных решений линеаризованных уравнений гидродинамики.

3. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим горизонтальный слой несжимаемой жидкости со свободной поверхностью, помещенный в однородное поле силы тяжести, направленное вдоль вертикальной оси z. Движения жидкости описываются системой уравнений

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}, \nabla)\mathbf{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - g\mathbf{e}_z, \quad \operatorname{div}\mathbf{u} = 0, \tag{5}$$

где $\mathbf{u}$ — вектор скорости с компонентами u, v, w соответственно вдоль осей x, y, z, p — давление, ρ — плотность, $\mathbf{e}_z$ — вертикальный орт. В качестве граничного условия полагаем $w = 0$ на твердой нижней границе слоя $z = -H$. На свободной поверхности $z = \eta(x, y, t)$ ставится кинематическое условие

$$w = \frac{\partial \eta}{\partial t} + (\mathbf{u}, \nabla\eta),$$

а также условие непрерывности давления $p = p_a$, где $p_a = \mathrm{const}$ — атмосферное давление. В задаче о свободных волнах можно считать $p_a \equiv 0$.

Предположим, что в жидкости имеется плоскопараллельное течение с постоянным горизонтальным сдвигом со скоростью $\mathbf{U} = (Ay, 0, 0)$ и гидростатическое распределение давления $p_0(z)$. Такое состояние описывается точным решением (5). Для исследования устойчивости этого состояния положим в (5)

$$\mathbf{u} = \mathbf{U} + \mathbf{u}', \quad p = p_0(z) + p'.$$

Опуская штрихи, линеаризованную систему уравнений для возмущений запишем в покомпонентной форме:

$$\begin{gathered} \frac{Du}{Dt} + Av = -\frac{\partial P}{\partial x}, \quad \frac{Dv}{Dt} = -\frac{\partial P}{\partial y}, \\ \frac{Dw}{Dt} = -\frac{\partial P}{\partial z}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \\ \frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + Ay\frac{\partial}{\partial x}. \end{gathered} \tag{6}$$

Здесь через P обозначено возмущение давления, нормированное на плотность ρ. Система (6) рассматривается в области

$$-\infty < x, \quad y < \infty, \quad -H < z < 0$$

с условием $w = 0$ при $z = -H$. Линеаризация граничных условий на свободной поверхности при $z = 0$ дает

$$w = \frac{D\eta}{Dt}, \quad P = g\eta,$$

откуда

$$\frac{DP}{Dt} = gw, \quad z = 0. \tag{7}$$

Исключив w из (7) с использованием третьего уравнения (6), это граничное условие можно записать в терминах давления:

$$\frac{D^2 P}{Dt^2} + g\frac{\partial P}{\partial z} = 0, \quad z = 0. \tag{8}$$

В отсутствие сдвигового течения ($A = 0$) система (6), (8) описывает гравитационные волны на поверхности покоящейся жидкости [4].

Рассмотрим некоторые общие соотношения, вытекающие из системы (6), (8). Взяв дивергенцию от первых трех уравнений (6), получим соотношение для давления

$$\Delta P = -2A\frac{\partial v}{\partial x}, \tag{9}$$

где Δ — оператор Лапласа. Исключая P из второго уравнения (6) с помощью соотношения (9), для поперечной к потоку компоненты скорости получаем уравнение

$$\frac{D}{Dt}(\Delta v) = 0, \tag{10}$$

откуда, в частности, следует, что если $\Delta v = 0$ в начальный момент времени $t = 0$, то $\Delta v = 0$ для любого $t > 0$.

Следующие соотношения носят интегральный характер. Для вертикальной компоненты вихря из системы (6) следует уравнение

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) + A\frac{\partial w}{\partial z} = 0, \tag{11}$$

интегрируя которое по толщине слоя с учетом того, что $w = D\eta/Dt$, $z = 0$ получаем

$$\frac{Dq}{Dt} = 0, \quad q = \frac{\partial \langle v \rangle}{\partial x} - \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial y} + A\eta, \tag{12}$$

где здесь и далее угловыми скобками обозначается интеграл

$$\langle v \rangle = \int_{-H}^{0} v\, dz.$$

Как и (10), уравнение (12) носит характер лагранжева закона сохранения. По аналогии с теорией вихревых течений мелкой воды [18], величину q будем называть потенциальной завихренностью возмущения. Сохранение q при перемещениях жидких частиц в нашем рассмотрении играет важную роль.

Рассмотрим также вытекающее из системы (6) уравнение баланса кинетической энергии

$$\frac{D}{Dt}\frac{|\mathbf{u}^2|}{2} + \operatorname{div}(P\mathbf{u}) = -Auv. \tag{13}$$

Интегрируя (13) по толщине слоя, с учетом соотношения

$$Pw = g\eta \frac{D\eta}{Dt} = 0.5g\frac{D\eta^2}{Dt}, \quad z = 0$$

получаем

$$\frac{DE_*}{Dt} + \operatorname{div}\langle P\mathbf{u}_1 \rangle = -A\langle uv \rangle, \tag{14}$$

где

$$E_* = \frac{1}{2}\left(\langle |\mathbf{u}^2| \rangle + g\eta^2\right),$$

$\mathbf{u}_1 = (u, v)$, E_* — полная (кинетическая плюс потенциальная) энергия цилиндрического столба жидкости с единичным основанием. Как видно, изменение полной энергии связано с работой напряжений Рейнольдса на сдвиге (правая часть уравнения (14)). Этот факт впервые указывает на возможность усиления возмущений в сдвиговом течении.

4. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ДЛЯ АМПЛИТУД ФУРЬЕ-ГАРМОНИКИ ВОЗМУЩЕНИЯ

Для построения точных решений системы (6), следуя основной схеме немодального подхода [11–15], перейдем из лабораторной системы в движущуюся с потоком систему координат

$$t_1 = t, \quad x_1 = x - Ayt, \quad y_1 = y, \quad z_1 = z.$$

С учетом формул для преобразования производных,

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y_1} - At_1\frac{\partial}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z_1},$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad \frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t_1},$$

в новых переменных получим систему

$$\begin{gathered}\frac{\partial u}{\partial t_1} + Av = -\frac{\partial P}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial v}{\partial t_1} = \\ = -\left(\frac{\partial}{\partial y_1} - At_1\frac{\partial}{\partial x_1}\right)P, \\ \frac{\partial w}{\partial t_1} = -\frac{\partial P}{\partial z_1}, \quad \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial w}{\partial z_1} + \\ + \left(\frac{\partial}{\partial y_1} - At_1\frac{\partial}{\partial x_1}\right)v = 0\end{gathered} \tag{15}$$

с граничным условием

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t_1^2} + g\frac{\partial P}{\partial z_1} = 0, \quad z_1 = 0. \tag{16}$$

В отличие от исходной системы, коэффициенты в системе (15) зависят только от времени. Этот факт позволяет искать гармонические по горизонтальным координатам решения системы (15):

$$\begin{gathered}(u, v) = (\tilde{u}, \tilde{v})\sin(kx_1 + ly_1), \\ (P, w) = (\tilde{P}, \tilde{w})\cos(kx_1 + ly_1),\end{gathered} \tag{17}$$

где волной обозначены амплитуды, зависящие только от z_1 и t_1. Подставляя (17) в (15), получаем систему уравнений для амплитуд:

$$\begin{gathered}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + A\tilde{v} = k\tilde{P}, \quad \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} = (l - Akt)\tilde{P}, \\ \frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} = -\frac{\partial \tilde{P}}{\partial z}, \quad k\tilde{u} + (l - Akt)\tilde{v} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} = 0,\end{gathered} \tag{18}$$

где для краткости записи индексы у z_1, t_1 опущены.

Отметим, что решению (17) для P отвечает отклонение уровня

$$\eta = \hat{\eta}(t)\cos(kx_1 + ly_1), \quad \hat{\eta}(t) = g^{-1}\tilde{P}|_{z=0}.$$

В физических переменных имеем гармоническое возмущение

$$\eta = \hat{\eta}(t)\cos\left[kx + (l - Akt)y\right]$$

с волновым числом $l(t) = l - Akt$ и волновым вектором (3). Как показано ранее, линейная зависимость от времени волнового числа вдоль оси y следует также из лучевой теории.

В системе (18) удобно перейти к безразмерным переменным, принимая в качестве масштаба амплитуд скорости $\sqrt{gk}\,\eta_0$, а в качестве масштабов t, z, $\tilde{P}$ соответственно A^{-1}, k^{-1}, $g\eta_0$, где η_0 — некоторое характерное значение амплитуды $\hat{\eta}(t)$. В безразмерных переменных система (18) запишется в виде

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \tilde{v} = R\tilde{P}, \quad \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} = R\beta(t)\tilde{P},$$
$$\frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} = -R\frac{\partial \tilde{P}}{\partial z}, \quad \tilde{u} + \beta(t)\tilde{v} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} = 0, \tag{19}$$
$$R = \frac{\sqrt{gk}}{A}.$$

Здесь введен безразмерный параметр R, характеризующий влияние сдвига, и обозначено $\beta(t) = t_* - t$, $t_* = l/k$. Отметим, что $\beta(t)$ есть волновое число $l(t)$, нормированное на k. Безразмерный модуль волнового вектора

$$\kappa(t) = \frac{|\mathbf{k}(t)|}{k} = \sqrt{1 + (t_* - t)^2}\,. \tag{20}$$

Система (19) рассматривается в области $-\hat{H} < z < 0$ с условием $\tilde{w} = 0$ при $z = -\hat{H} \equiv -Hk$. Условие (16) на свободной поверхности записывается в виде

$$\frac{\partial^2 \tilde{P}}{\partial t^2} + R^2\frac{\partial \tilde{P}}{\partial z} = 0, \quad z = 0. \tag{21}$$

Безразмерная амплитуда отклонения уровня $\hat{\eta}$ связана с амплитудами $\tilde{w}$, $\tilde{P}$ соотношениями

$$\hat{\eta}(t) = \tilde{P}, \quad \tilde{w} = R^{-1}\frac{\partial \hat{\eta}}{\partial t}, \quad z = 0.$$

Из системы уравнений (19) для амплитуд следуют соотношения, аналогичные (9), (10), (12). В новых переменных для амплитуды давления соотношение (9) принимает вид

$$\frac{\partial^2 \tilde{P}}{\partial z^2} - \kappa^2(t)\tilde{P} = -2R^{-1}\tilde{v}. \tag{22}$$

С учетом (22), из системы (19) вытекает уравнение для $\tilde{v}$:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial z^2} - \kappa^2(t)\tilde{v}\right] = 0, \tag{23}$$

откуда следует, что

$$\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial z^2} - \kappa^2(t)\tilde{v} = F(z),$$

где $F(z)$ — некоторая произвольная функция. Далее будем рассматривать случай отсутствия внутренних источников движения, полагая $F(z) \equiv 0$. При этом для любого $t > 0$ величина $\tilde{v}$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial z^2} - \kappa^2(t)\tilde{v} = 0, \tag{24}$$

которое не содержит производных по времени. Этот факт существенно упрощает задачу.

Исключая $\tilde{P}$ из проинтегрированных по толщине слоя уравнений (19) для $\tilde{u}$, $\tilde{v}$, получаем закон сохранения потенциальной завихренности (в новых переменных он принимает локальную форму)

$$\frac{\partial q}{\partial t} = 0, \quad q = \langle \tilde{v} \rangle - \beta(t)\langle \tilde{u} \rangle + R^{-1}\hat{\eta}(t). \tag{25}$$

Выражение для q можно преобразовать, рассматривая проинтегрированную по вертикали форму уравнения неразрывности в (19):

$$R^{-1}\frac{d\hat{\eta}}{dt} + \langle \tilde{u} \rangle + \beta(t)\langle \tilde{v} \rangle = 0.$$

Выражая отсюда $\langle \tilde{u} \rangle$ и подставляя в (25), находим

$$q = \kappa^2(t)\langle \tilde{v} \rangle + R^{-1}\left[\hat{\eta}(t) + \beta(t)\frac{d\hat{\eta}}{dt}\right]. \tag{26}$$

Приведем также следующее из системы (19) уравнение баланса полной энергии для амплитуд:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -\langle \tilde{u}\tilde{v} \rangle, \quad E = \frac{1}{2}\left[\langle \tilde{u}^2 + \tilde{v}^2 + \tilde{w}^2 \rangle + \hat{\eta}^2\right]. \tag{27}$$

Далее отдельно рассмотрим динамику возмущений в бесконечно глубоком слое ($H = \infty$) и в слое конечной глубины.

5. ГЛУБОКАЯ ВОДА. КЛАССИФИКАЦИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ

Рассмотрим вначале модель глубокой воды, когда все возмущения затухают при $z \to -\infty$. Решение уравнения (24) при этом записывается в виде

$$\tilde{v} = \hat{v}(t)e^{\kappa(t)z}, \tag{28}$$

где $\hat{v}(t)$ — некоторая функция, подлежащая определению. С учетом (28) для нахождения $\tilde{P}$ из соотношения (22) имеем неоднородное уравнение

$$\frac{\partial^2 \tilde{P}}{\partial z^2} - \kappa^2(t)\tilde{P} = -2R^{-1}\hat{v}(t)e^{\kappa(t)z}$$

с общим решением

$$\tilde{P} = \hat{\eta}(t)e^{\kappa(t)z} - R^{-1}\frac{\hat{v}(t)}{\kappa(t)}\,ze^{\kappa(t)z}. \tag{29}$$

Здесь учтено условие $\tilde{P}|_{z=0} = \hat{\eta}(t)$. Входящие в решения (28), (29) функции $\hat{\eta}(t)$, $\hat{v}(t)$ удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Одно из уравнений получается подстановкой (28), (29) во второе уравнение (19):

$$\frac{d\hat{v}}{dt} = R\beta(t)\hat{\eta}. \tag{30}$$

Подставляя далее (29) в граничное условие (21), получаем еще одно уравнение

$$\frac{d^2\hat{\eta}}{dt^2} + R^2\kappa(t)\hat{\eta} - \frac{R}{\kappa(t)}\,\hat{v} = 0. \tag{31}$$

Таким образом, решение системы уравнений для амплитуд свелось к решению системы дифференциальных уравнений (30), (31). После нахождения $\hat{v}(t)$, $\hat{\eta}(t)$ и, следовательно, $\tilde{v}$, $\tilde{P}$, амплитуды компонент скорости $\tilde{u}$, $\tilde{w}$ находятся интегрированием по времени соответствующих уравнений (19). Обозначая $\hat{w} = R^{-1}d\hat{\eta}/dt$ ($\hat{w}$ — амплитуда $\tilde{w}$ при $z = 0$), систему (30), (31) можем записать в стандартной форме:

$$\begin{gathered} \frac{d\hat{v}}{dt} = R\beta(t)\hat{\eta}, \quad \frac{d\hat{\eta}}{dt} = R\hat{w}, \\ \frac{d\hat{w}}{dt} = -R\kappa(t)\hat{\eta} + \frac{1}{\kappa(t)}\,\hat{v}. \end{gathered} \tag{32}$$

Важная особенность системы (30), (31) состоит в том, что она имеет первый интеграл

$$\kappa(t)\hat{v}(t) + R^{-1}\left(\hat{\eta}(t) + \beta(t)\frac{d\hat{\eta}}{dt}\right) = q = \text{const}, \tag{33}$$

отражающий закон сохранения потенциальной завихренности для возмущений (эквивалентность выражений (33) и (26) следует из соотношения $\langle\tilde{v}\rangle = \kappa^{-1}(t)\hat{v}(t)$). Используя этот интеграл, систему можно свести к одному неоднородному (с правой частью) уравнению второго порядка относительно $\hat{\eta}$:

$$\frac{d^2\hat{\eta}}{dt^2} - \frac{1}{\kappa(t)}\frac{d\kappa}{dt}\frac{d\hat{\eta}}{dt} + \left[R^2\kappa(t) + \frac{1}{\kappa^2(t)}\right]\hat{\eta} = \frac{Rq}{\kappa^2(t)}, \tag{34}$$

откуда, в свою очередь, следует, что общее решение системы (30), (31) можно представить в виде суммы

$$(\hat{\eta}, \hat{v}) = (\hat{\eta}_w, \hat{v}_w) + (\hat{\eta}_v, \hat{v}_v),$$

где первое слагаемое в правой части (волновая компонента решения) отвечает общему решению однородного уравнения (34) с $q = 0$, а второе слагаемое (вихревая компонента) — частному решению неоднородного уравнения (аналогичное представление справедливо для $\tilde{u}$, $\tilde{w}$). Ниже будет показано, что при слабых сдвигах волновая компонента описывает быстроосциллирующие возмущения (модифицированные сдвигом гравитационные волны), а вихревая компонента — медленные апериодические возмущения. Закон сохранения потенциальной завихренности, таким образом, позволяет разделить возмущения в сдвиговом потоке на два класса, различающиеся принципиальными особенностями временной динамики. Для сдвиговых течений вращающейся жидкости аналогичная классификация возмущений предложена в недавних работах [11, 12].

Подчеркнем, что приведенная классификация отлична от классического разделения движений жидкости на потенциальные и вихревые [4]. В сдвиговых течениях и волновые, и вихревые возмущения обладают ненулевой завихренностью в классическом смысле. Это отличает их от потенциальных волн в неподвижной жидкости.

Завершая этот раздел, отметим еще один способ сведения системы уравнений для амплитуд к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Этот способ связан с рассмотрением проинтегрированных по вертикали уравнений (19):

$$\begin{gathered} \frac{d}{dt}\langle\tilde{u}\rangle + \langle\tilde{v}\rangle = R\langle\tilde{P}\rangle, \quad \frac{d}{dt}\langle\tilde{v}\rangle = R\beta(t)\langle\tilde{P}\rangle, \\ \frac{1}{R}\frac{d\hat{\eta}}{dt} + \langle\tilde{u}\rangle + \beta(t)\langle\tilde{v}\rangle = 0. \end{gathered} \tag{35}$$

Для замыкания системы (35) нужно связать $\langle\tilde{P}\rangle$ с $\hat{\eta}(t)$. Используя выражение (29), находим

$$\langle\tilde{P}\rangle = \frac{\hat{\eta}(t)}{\kappa(t)} + \frac{1}{R}\frac{\hat{v}(t)}{\kappa^3(t)} = \frac{\hat{\eta}(t)}{\kappa(t)} + \frac{1}{R}\frac{\langle\tilde{v}\rangle}{\kappa^2(t)}. \tag{36}$$

С учетом (36), уравнения (35) образуют замкнутую систему относительно $\langle\tilde{u}\rangle$, $\langle\tilde{v}\rangle$, $\hat{\eta}$. Исключая из этой системы $\langle\tilde{u}\rangle$, $\langle\tilde{v}\rangle$, с использованием первого интеграла (25) получим уравнение (34) для $\hat{\eta}$.

6. ДИНАМИКА ВОЗМУЩЕНИЙ ДЛЯ БОЛЬШИХ R

Исследуем динамику возмущений в случае $R = \sqrt{gk}/A \gg 1$, характерном для слабых сдвигов или коротких волн ($k \to \infty$). Замена $\hat{\eta} = \sqrt{\kappa(t)}\,\varphi$ приводит уравнение (34) к стандартной форме уравнения с большим параметром:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \left[R^2\kappa(t) + \lambda(t)\right]\varphi = \frac{Rq}{\kappa^2(t)\sqrt{\kappa(t)}}\,, \tag{37}$$

где

$$\lambda(t) = \frac{1}{\kappa^2(t)} - \frac{1}{4}\left(\frac{\dot\kappa}{\kappa}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot\kappa}{\kappa}\right)$$

(точкой здесь обозначены производные по времени). Для построения асимптотических решений используем метод ВКБ[1)]. В первом приближении общее решение однородного уравнения (37) записывается в виде [19, 20]

$$\varphi_w(t) = \frac{C}{\sqrt{\omega(t)}}\cos[R\alpha(t)], \quad \omega(t) = \sqrt{\kappa(t)},$$

$$\alpha(t) = \int_0^t \omega(t')\,dt' + \alpha_0,$$

где $C > 0$ и α_0 — начальные амплитуда и фаза (произвольные постоянные). С учетом (33) для волновой компоненты найдем

$$\begin{gathered}\hat\eta_w(t) = C\sqrt{\omega(t)}\cos[R\alpha(t)], \\ \hat v_w(t) = \frac{C\beta(t)}{\sqrt{\omega(t)}}\sin[R\alpha(t)],\end{gathered} \tag{38}$$

соответствующие амплитуды $\tilde P_w$, $\tilde v_w$ даются выражениями (28), (29). Для нахождения амплитуд $\tilde u_w$, $\tilde w_w$ используем первое и третье уравнения (19). С точностью до $O(R^{-1})$ получим

$$\begin{gathered}\tilde u_w = \hat u_w(t)e^{\kappa(t)z}, \quad \tilde w_w = \hat w_w(t)e^{\kappa(t)z}, \\ \hat u_w(t) = \frac{C}{\sqrt{\omega(t)}}\sin[R\alpha(t)], \\ \hat w_w(t) = -C(\omega(t))^{3/2}\sin[R\alpha(t)].\end{gathered} \tag{39}$$

Обсудим особенности поведения волновой компоненты на больших временах, когда $\kappa(t) \propto t$, соответственно, $\omega(t) \propto \sqrt{t}$. На свободной поверхности $z = 0$ решения (38), (39) являются быстроосциллирующими функциями с мгновенной частотой $R\omega(t) = R\sqrt{\kappa(t)}$, нарастающей степенным образом. Мгновенная частота, очевидно, есть модифицированная сдвигом частота гравитационных волн $\sqrt{g|\mathbf{k}(t)}$, записанная в безразмерных переменных. Неограниченный рост частоты представляет важную особенность динамики: в отсутствие сдвига имеем обычные гравитационные волны с постоянной частотой. Далее, при $t \to \infty$ амплитуда временных осцилляций уровня $\hat\eta_w(t)$ нарастает как $t^{1/4}$, амплитуды $\hat v_w$, $\hat w_w$ растут как $t^{3/4}$, амплитуда $\hat u_w$ убывает. Неограниченный рост амплитуд свидетельствует об алгебраической неустойчивости сдвигового потока, приводящей к генерации поверхностных гравитационных волн. Еще один важный эффект сдвига связан с характерным вертикальным масштабом $h(t) = \kappa^{-1}(t)$ затухания возмущения, причем $h \to 0$ при $t \to \infty$, т. е. возмущение оказывается сосредоточенным вблизи свободной поверхности.

[1)] Другой метод построения асимптотических решений указан в Приложении.

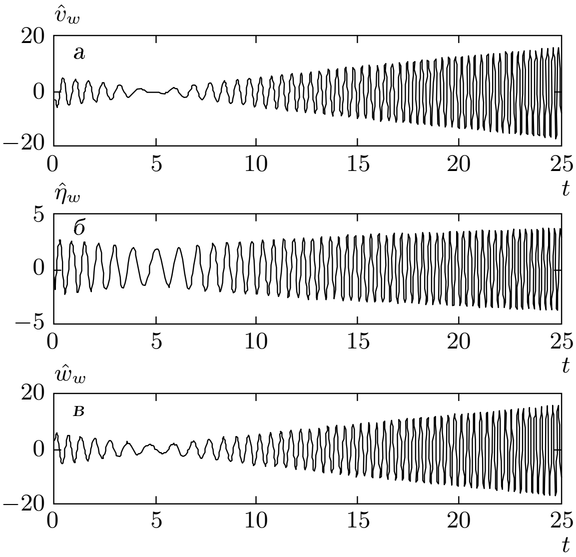

Рис. 1. Зависимость от времени волновых компонент $\hat v_w$ (*а*), $\hat\eta_w$ (*б*), $\hat w_w$ (*в*) при $R = 5$ и $t_* = 5$

Типичные примеры временных зависимостей $\hat\eta_w(t)$, $\hat v_w(t)$, $\hat w_w(t)$, полученных прямым численным интегрированием системы (32), представлены на рис. 1. При больших R численные решения хорошо согласуются с асимптотическими решениями (38).

Исследуем зависимость от времени полной энергии (27) волновой компоненты. Поскольку решение содержит быстроосциллирующие функции, наибольший интерес представляет не сама энергия E, а ее усредненное значение $\overline{E}$, где черта означает усреднение по периоду быстрых временных осцилляций. Используя соотношение (39), после усреднения находим

$$\langle\overline{\tilde u_w^2}\rangle = \frac{1}{2}\frac{C^2}{\omega(t)}\int_{-\infty}^0 e^{2\kappa(t)z}dz = \frac{1}{4}\frac{C^2}{\omega^3(t)}.$$

Проводя аналогичные вычисления для $\langle\overline{\tilde v_w^2}\rangle$, $\langle\overline{\tilde w_w^2}\rangle$, $\overline{\tilde\eta_w^2}$ и складывая, получаем

$$\overline{E}_w = C^2\omega(t) \equiv C^2\sqrt{\kappa(t)}\,.$$

Таким образом, при $R \gg 1$ полная энергия волновой компоненты изменяется пропорционально час-

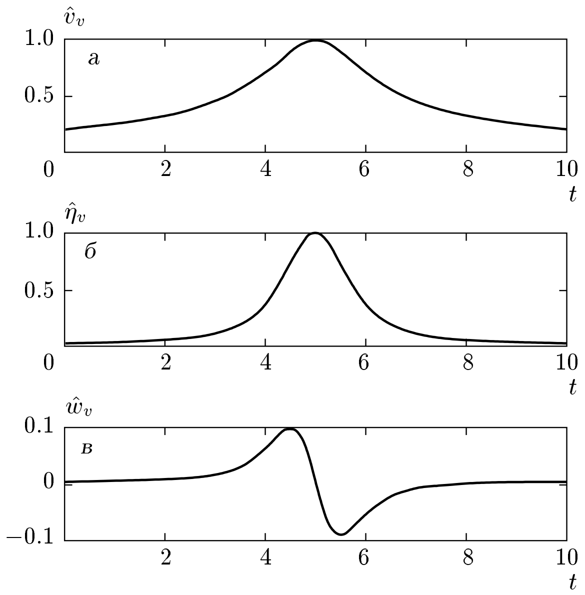

Рис. 2. Зависимость от времени вихревых компонент $\hat{v}_v$ (*а*), $\hat{\eta}_v$ (*б*), $\hat{w}_v$ (*в*) при $R = 5$ и $t_* = 5$

тоте. Отсюда $\overline{E}_w \propto \sqrt{t}$ при $t \to \infty$. Этот результат лучевой теории теперь получен на основе решений уравнений гидродинамики.

Рассмотрим теперь поведение вихревой компоненты. Отыскивая частное решение неоднородного уравнения (37) в виде ряда по обратным степеням R, в первом приближении находим

$$\varphi_v(t) = R^{-1}q/\kappa^{7.2}(t),$$

откуда

$$\hat{\eta}_v(t) = \frac{R^{-1}q}{\kappa^3(t)}, \quad \hat{v}_v(t) = \frac{q}{\kappa(t)}, \quad \hat{w}_v(t) = \frac{3R^{-2}\beta(t)q}{\kappa^5(t)}. \tag{40}$$

Соответствующие амплитуды имеют вид

$$\tilde{P}_v = R^{-1}q\kappa^{-3}(t)e^{\kappa(t)z}[1-\kappa(t)z], \quad \tilde{v}_v = q\kappa^{-1}(t)e^{\kappa(t)z}.$$

Амплитуда $\hat{\eta}_v(t)$ транзитивно растет — достигает максимума при $t = t_*$ (считаем $t_* > 0$) и далее затухает (рис. 2). Иначе ведут себя амплитуды компонент скорости на свободной поверхности $z = 0$: при $t \to \infty$ наряду с медленным затуханием $\hat{v}_v$, $\hat{w}_v$ имеет место неограниченный рост амплитуды $\tilde{u}_v$. Используя уравнение (19) для $\tilde{u}$ и выражение (40), получаем $\tilde{u}_v \propto \ln t$ при $t \to \infty$, $z = 0$. Интересно отметить, что, несмотря на этот рост, интегральная амплитуда $\langle \tilde{u}_v \rangle$ со временем затухает:

$$\langle \tilde{u}_v \rangle = -\beta(t)q/\kappa^2(t) \to 0, \quad t \to \infty.$$

Затухание $\langle \tilde{u}_v \rangle$ объясняется быстрым изменением вертикального масштаба возмущения $h = h(t)$, в результате которого оно концентрируется у свободной поверхности.

7. ДИНАМИКА ВОЗМУЩЕНИЙ ДЛЯ УМЕРЕННЫХ И МАЛЫХ R

Выше рассмотрен случай $R \gg 1$. В случае умеренных и малых значений параметра R (достаточно сильные сдвиги) в динамике возмущений появляется ряд новых особенностей. В этом случае приближение ВКБ уже не применимо и для построения решений нужно привлекать численные методы. Один из наиболее интересных эффектов обнаруживается при численном решении системы (32) с начальными условиями, определенными вихревой модой (40):

$$\hat{v}(0) = \hat{v}_v(0), \quad \hat{\eta}(0) = \hat{\eta}_v(0), \quad \hat{w}(0) = \hat{w}_v(0).$$

До момента времени t_* ($t_* > 0$) численное решение хорошо согласуется с вихревой модой, хотя вихревое решение уже не асимптотическое (рис. 3). В момент $t = t_*$, однако, происходит внезапное (скачкообразное) появление осцилляций (волн), так что дальнейшая эволюция определяется совместным присутствием медленной вихревой и быстрой волновой мод. Описанный эффект становится заметным при $R = 5$ и ярко выражен при $R < 3$. Для акустических возмущений в сдвиговых течениях аналогичный эффект впервые обнаружен в работе [16], где показано, что при $t = t_*$ имеет место эффект внезапной трансформации (конверсии) вихрей в волны, или эффект внезапного излучения волн.

Хотя математическое описание эффекта скачкообразного возникновения осцилляций достаточно сложно, можно привести нестрогие рассуждения, поясняющие его природу. В случае $R \ll 1$ удобно перейти в уравнении (37) к медленной переменной $\tau = Rt$. Обозначая $\tau_* = Rt_*$, вместо уравнения (37) получим

$$\frac{d^2\varphi}{d\tau^2} + [\kappa_1(\tau) + \lambda_1(\tau)]\,\varphi = \frac{R^{-1}q}{\kappa_1^{5/2}(\tau)}, \tag{41}$$

где

$$\kappa_1(\tau) = \sqrt{1 + R^{-2}(\tau_* - \tau)^2}, \quad \lambda_1(\tau) = R^{-2}\lambda(\tau/R).$$

Рассмотрим уравнение (41) с начальными данными, определяемыми вихревым решением φ_v, которое в новых переменных имеет вид

$$\varphi_v = R^{-1}q/\kappa_1^{7/2}(\tau).$$

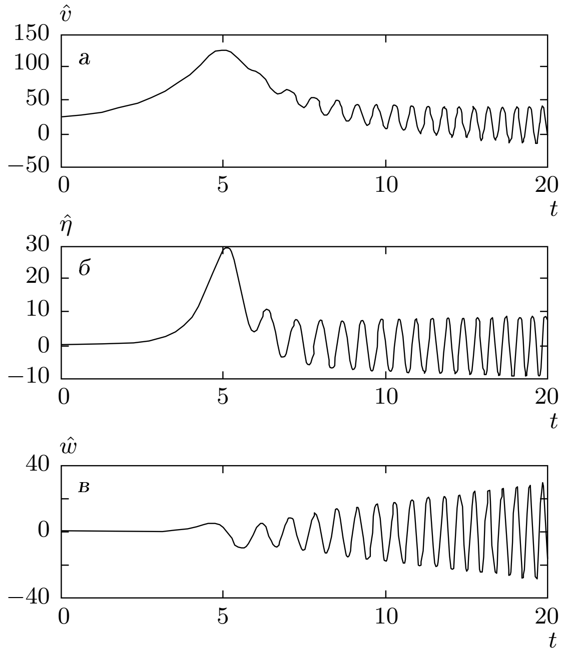

Рис. 3. Зависимость от времени решений $\hat{v}$ (*а*), $\hat{\eta}$ (*б*), $\hat{w}$ (*в*) в случае начальных данных, определяемых вихревой модой, и $R = 3$, $t_* = 5$

Представим решение этого уравнения в виде $\varphi = \varphi_v + \varphi_w$, где теперь φ_w — отклонение решения от вихревого. Для φ_w получим уравнение

$$\begin{gathered}\frac{d^2\varphi_w}{d\tau^2} + \left[\kappa_1(\tau) + \lambda_1(\tau)\right]\varphi_w = f_R(\tau)\\ f_R(\tau) = -\frac{d^2\varphi_v}{d\tau^2} - \lambda_1(\tau)\varphi_v\end{gathered} \qquad (42)$$

с начальными данными

$$\varphi_w(0) = \varphi'_w(0) = 0,$$

которое, очевидно, эквивалентно (41). Заметим далее, что в линейных системах можно ожидать скачкообразного возникновения осцилляций, если в правых частях уравнений стоят вынуждающие силы в виде дельта-функции $V\delta(\tau-\tau_*)$ или ее производных. В этих случаях система получает мгновенный толчок (удар), после чего возникают колебания. Так, если в правой части уравнения (42) стоит $V\delta(\tau-\tau_*)$, то в точке $\tau = \tau_*$ решение непрерывно, а производная терпит скачок:

$$\varphi'_w(\tau_* + 0) = \varphi'_w(\tau_* - 0) + V.$$

Используя явное выражение для $\varphi_v(\tau)$, легко показать, что в правой части уравнения (42) главные слагаемые имеют вид

$$\frac{R^{-1}q}{[1 + R^{-2}(\tau_* - \tau)^2]}, \quad m > 5.$$

Отсюда следует, что $f_R(\tau) \to 0$ при $R \to 0$ для любого $\tau \neq \tau_*$. В то же время $|f_R(\tau_*)| \to \infty$ при $R \to 0$. Таким образом, при $R \to 0$ решение уравнения (42) ведет себя подобно решению уравнения с правой частью в виде дельта-функции, т. е. до момента τ_* оно равно нулю, а далее скачком возникают осцилляции. Эти рассуждения, разумеется, носят лишь качественный характер.

8. СЛОЙ КОНЕЧНОЙ ГЛУБИНЫ

Несколько более громоздко выглядит уравнение для амплитуды $\hat{\eta}(t)$ отклонения уровня в слое конечной глубины. Его вывод состоит в следующем. При конечной безразмерной глубине $\hat{H}$ общее решение уравнения (24) можно записать в виде

$$\tilde{v} = \hat{v}_1(t)\,\mathrm{ch}\,[\kappa(t)z] + \hat{v}_2(t)\,\mathrm{sh}\,[\kappa(t)z]\,. \qquad (43)$$

С учетом соотношения (22) для амплитуды $\tilde{P}$ найдем

$$\begin{aligned}\tilde{P} = \hat{\eta}_1(t)\,\mathrm{ch}\,[\kappa(t)z] + \hat{\eta}_2(t)\,\mathrm{sh}\,[\kappa(t)z] - \\ - \frac{R^{-1}z}{\kappa(t)}\left\{\hat{v}_1(t)\,\mathrm{sh}\,[\kappa(t)z] + \hat{v}_2(t)\,\mathrm{ch}\,[\kappa(t)z]\right\}. \quad (44)\end{aligned}$$

Заметим, что $\tilde{P}|_{z=0} = \hat{\eta}_1(t)$, т. е. функция $\hat{\eta}_1(t)$ представляет собой амплитуду $\hat{\eta}(t)$ отклонения уровня.

Входящие в выражения (43), (44) функции $\hat{v}_i(t)$, $\hat{\eta}_i(t)$ связаны определенными алгебраическими соотношениями. Нетрудно видеть, что условие непротекания $\tilde{w} = 0$ при $z = -\hat{H}$ сводится к условию $\partial\tilde{P}/\partial z = 0$ при $z = -\hat{H}$. Подставляя (44) в это условие, получаем

$$\begin{aligned}\hat{\eta}_2 = \hat{\eta}_1\,\mathrm{th}(\kappa\hat{H}) + \frac{R^{-1}\hat{v}_2}{\kappa^2}\left[1 + \kappa\hat{H}\,\mathrm{th}(\kappa\hat{H})\right] - \\ - \frac{R^{-1}\hat{v}_1}{\kappa^2}\left[\kappa\hat{H} + \mathrm{th}(\kappa\hat{H})\right]. \quad (45)\end{aligned}$$

Далее подстановка (43), (44) в уравнение для $\tilde{v}$ системы (19) дает

$$\frac{d\hat{v}_1}{dt} = R\beta(t)\hat{\eta}_1, \quad \frac{d\hat{v}_2}{dt} = R\beta(t)\hat{\eta}_2. \qquad (46)$$

Исключая из этих уравнений $\hat{\eta}_1$, $\hat{\eta}_2$, с использованием соотношения (45) получаем уравнение

$$\begin{gathered}\frac{dm}{dt} = -\frac{\beta(t)m}{\kappa^2(t)},\\ m = \hat{v}_2(t)\,\mathrm{ch}[\kappa(t)\hat{H}] - \hat{v}_1(t)\,\mathrm{sh}[\kappa(t)\hat{H}],\end{gathered} \qquad (47)$$

интегрируя которое получаем соотношение, связывающее $\hat{v}_2$ и $\hat{v}_1$:

$$\hat{v}_2 = \hat{v}_1 \operatorname{th}\left[\kappa(t)\hat{H}\right] + \frac{r}{\kappa(t)\operatorname{ch}[\kappa(t)\hat{H}]}, \quad r = m(0)\kappa(0). \tag{48}$$

Подставляя затем выражение (44) в граничное условие (21) и учитывая соотношения (45), (48), приходим к замкнутой системе уравнений для нахождения $\hat{v}_1(t)$, $\hat{\eta}_1(t)$:

$$\begin{gathered}\frac{d\hat{v}_1}{dt} = R\beta(t)\hat{\eta}_1,\\ \frac{d^2\hat{\eta}_1}{dt^2} + R^2\kappa\operatorname{th}(\kappa\hat{H})\hat{\eta}_1 - \\ - \frac{R}{\kappa}\left[\frac{\kappa\hat{H}}{\operatorname{ch}^2\kappa\hat{H}} + \operatorname{th}(\kappa\hat{H})\right]\hat{v}_1 + \frac{\hat{H}r\operatorname{th}(\kappa\hat{H})}{\kappa\operatorname{ch}(\kappa\hat{H})} = 0.\end{gathered} \tag{49}$$

Как и ранее, систему (49) можно свести к одному уравнению второго порядка относительно $\hat{\eta}_1$, используя закон сохранения потенциальной завихренности — ее первый интеграл. Подставляя выражения (43), (44) в (26), с учетом (45), (48) получаем

$$\kappa(t)\operatorname{th}\left[\kappa(t)\hat{H}\right]\hat{v}_1 + \frac{r}{\operatorname{ch}[\kappa(t)\hat{H}]} + \\ + R^{-1}\left[\hat{\eta}_1 + \beta(t)\frac{d\eta_1}{dt}\right] = \hat{q} = \mathrm{const}, \tag{50}$$

где обозначено $\hat{q} = q + r$. Отметим, что непосредственная проверка выполнения соотношения (50) с использованием уравнений (49) достаточно громоздка.

Выражая $\hat{v}_1$ из (50) и подставляя во второе уравнение (49), для амплитуды отклонения уровня $\hat{\eta}(t) \equiv \hat{\eta}_1(t)$ окончательно получаем уравнение

$$\begin{gathered}\frac{d^2\hat{\eta}}{dt^2} - \frac{1}{\omega^2}\frac{d\omega^2}{dt}\frac{d\hat{\eta}}{dt} + \left[R^2\omega^2(t) + \frac{\mu(t)}{\kappa^2(t)}\right]\hat{\eta} = \\ = \frac{R\hat{q}\mu(t)}{\kappa^2(t)} - \frac{Rr}{\kappa^2(t)\operatorname{ch}[\kappa(t)H]},\\ \omega(t) = \sqrt{\kappa(t)\operatorname{th}[\kappa(t)\hat{H}]},\\ \mu(t) = 1 + \frac{2\hat{H}\kappa(t)}{\operatorname{sh}[2\hat{H}\kappa(t)]}.\end{gathered} \tag{51}$$

Сопоставим уравнения (51) и (34). Нетрудно видеть, что при $\hat{H} \to \infty$ уравнение (51) переходит в (34). Уравнение (34) также получается из (51) предельным переходом при $t \to \infty$. Последнее объясняется тем, что на больших временах возмущение концентрируется у поверхности и практически не испытывает влияния дна. Модель глубокой воды, таким образом, приводит к асимптотически точным результатам.

9. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе исследован линейный механизм генерации поверхностных гравитационных волн, связанный с наличием в слое жидкости со свободной поверхностью течения с постоянным горизонтальным сдвигом скорости. Установлено, что в присутствии свободной поверхности такое течение гидродинамически неустойчиво, причем неустойчивость носит алгебраический характер. Развитие неустойчивости приводит к образованию на поверхности жидкости гравитационных волн, амплитуда которых нарастает по степенному закону. Для изучения неустойчивости использован немодальный подход, основанный на рассмотрении поведения отдельной пространственной фурье-гармоники возмущения в полулагранжевой (движущейся вместе с потоком) системе координат. Проведено разделение возмущений в сдвиговом потоке на два класса (волновые и вихревые) по значению потенциальной завихренности. Показано, что при слабых сдвигах с течением времени вихревые возмущения затухают, а энергия волновых возмущений неограниченно растет. Описан эффект трансформации вихревых возмущений в волновые при сильных сдвигах.

Подчеркнем, что в изученном механизме реализуется алгебраическая скорость роста возмущений. В этом плане он менее эффективен, чем, например, механизм Майлса, предсказывающий экспоненциальное нарастание волн. Здесь нужно, однако, иметь в виду, что в данном механизме отсутствует передача энергии от ветра к волнам. Принципиальную роль играет также тот факт, что рассматривается течение с постоянным сдвигом, которое в отсутствие свободной поверхности является спектрально устойчивым [14–16]. Можно предположить, что в течениях с переменным горизонтальным сдвигом, в частности с точками перегиба на профиле скорости, будет реализовываться экспоненциальный рост возмущений. Этот вопрос, однако, требует специального изучения.

Отметим также, что генерируемые данным механизмом волны («волны тихой погоды»), по-видимому, достаточно легко могут быть воспроизведены в эксперименте, хотя нам не известны специальные исследования на эту тему. В качестве примера можно привести недавнее описание спиральных вихрей в океане, которые формируются за счет сдвиговой неустойчивости крупномасштабных течений и наблюдаются на спутниковых фотографиях по характерным сликам, оставляемым цугами поверхностных гравитационных волн [21]. Как отмечено в работе [21], при анализе спутниковых фотографий, волны на поверхности океана являются индикатором событий, происходящих не только над ней (ветер), но и под ней (сдвиговые течения).

Данную работу уместно завершить замечанием Филлипса, который, характеризуя многообразие механизмов, участвующих в процессе генерации волн, писал о своеобразном «динамическом калейдоскопе» [5]. Изученный механизм является одним из фрагментов этого калейдоскопа.

Автор благодарит Г. Д. Чагелишвили и Д. Г. Ломинадзе за обсуждения ряда проблем теории устойчивости сдвиговых течений, Л. Х. Ингеля за помощь в работе, а также рецензента за полезные замечания. Работа выполнена при поддержке Международного научно-технического центра (проект G-1217).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Построение асимптотических решений для $R \gg 1$

Изложим еще один способ построения асимптотических решений системы (30), (31). Запишем эквивалентную ей систему (32) в матричной форме:

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = (RA + B)\mathbf{y}, \tag{П.1}$$

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} \hat{v} \\ \hat{\eta} \\ \hat{w} \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \beta(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\omega^2(t) & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \omega^{-2}(t) & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

обозначая $\omega^2(t) = \kappa(t)$. Следуя [19, 20], при $R \gg 1$ ищем частные решения системы (П.1) вида

$$\begin{gathered} \mathbf{y} = \mathbf{z} \exp\left[R \int\limits_0^t \lambda(\tau)\, d\tau\right], \\ \mathbf{z} = \mathbf{z}_0 + R^{-1}\mathbf{z}_1 + R^{-2}\mathbf{z}_2 + \ldots \end{gathered} \tag{П.2}$$

После подстановки (П.2) в (П.1) для главных членов разложения найдем

$$\begin{gathered} [A - \lambda(t)E]\,\mathbf{z}_0 = 0, \\ [A - \lambda(t)E]\,\mathbf{z}_1 = \frac{d\mathbf{z}_0}{dt} - B\mathbf{z}_0. \end{gathered} \tag{П.3}$$

Согласно первому уравнению (П.3), $\lambda(t)$ — собственные значения матрицы A, т. е. $\lambda_{1,2}(t) = \pm i\omega(t)$, $\lambda_3(t) = 0$. Отвечающие им собственные векторы $\mathbf{z}_0$ записываются в виде

$$\mathbf{z}_0^{(1)} = C(t)\left(-\frac{i\beta(t)}{\omega(t)}, 1, i\omega(t)\right)^T,$$

$$\mathbf{z}_0^{(2)} = \overline{\mathbf{z}_0^{(1)}}, \quad \mathbf{z}_0^{(3)} = C(t)\left(\omega^{-2}(t), 0, 0\right)^T,$$

где черта означает комплексное сопряжение, а $C(t)$ — неизвестные функции времени. Эти функции находятся из условия разрешимости второго уравнения (П.3) — ортогональности правой части решениям сопряженного однородного уравнения. Последнее условие приводит к дифференциальным уравнениям для $C(t)$. Решая эти уравнения, находим

$$C(t) = \begin{cases} C_{1,2}\sqrt{\omega(t)}, & \lambda = \pm i\omega(t), \\ C_3/\omega^2(t), & \lambda = 0, \end{cases}$$

где C_i — постоянные интегрирования. В первом приближении общее решение системы (П.1) есть сумма построенных частных решений. Записывая отвечающие $\lambda_{1,2}$ решения в тригонометрической форме, получаем

$$\begin{gathered} \hat{v}(t) = \frac{C\beta(t)}{\sqrt{\omega(t)}}\sin\left[R\alpha(t)\right] + \frac{C_3}{\omega^2(t)}, \\ \hat{\eta}(t) = C\sqrt{\omega(t)}\cos\left[R\alpha(t)\right], \\ \hat{w}(t) = -C\omega^{3/2}(t)\sin\left[R\alpha(t)\right], \end{gathered} \tag{П.4}$$

где

$$\alpha(t) = \int\limits_0^t \omega(\tau)\, d\tau + \alpha_0,$$

C, α_0 — связанные с C_1, C_2 постоянные. Осциллирующие слагаемые в (П.4), очевидно, совпадают с волновой компонентой решений (38), (39). В выражение для $\hat{v}$ входит также связанное с нулевым собственным значением апериодическое слагаемое, представляющее вихревую компоненту (40). Отсутствие аналогичных слагаемых в выражениях для $\hat{\eta}$ и $\hat{w}$ объясняется тем, что они появляются лишь в следующем порядке теории возмущений (см. соотношения (40)).

ЛИТЕРАТУРА

1. W. Kelvin, Proc. Roy. Soc. Edinburg **10**, 92 (1879).

2. H. Jeffreys, Proc. Roy. Soc. Lond. A **107**, 189 (1925).

3. C. Eckart, J. Appl. Phys. **24**, 1485 (1953).

4. П. Ле Блон, Л. Майсек, *Волны в океане*, Мир, Москва (1981).

5. O. M. Phillips, J. Fluid Mech. **2**, 417 (1957).

6. J. W. Miles, J. Fluid Mech. **3**, 185 (1957).

7. О. М. Филлипс, *Динамика верхнего слоя океана*, Гидрометеоиздат, Ленинград (1980).

8. P. Janssen, *The Interaction of Ocean Waves and Wind*, Cambridge University Press, Cambridge (2004).

9. G. Gogoberidze, L. Samushia, G. D. Chagelishvili, J. G. Lominadze, and W. Horton, ЖЭТФ **128**, 193 (2005).

10. W. Kelvin, Phil. Mag. **24**, 188 (1887).

11. М. В. Калашник, Д. Г. Ломинадзе, Г. Д. Чагелишвили, Изв. РАН, МЖГ вып. 6, 25 (2005).

12. М. В. Калашник, Г. Р. Мамацашвили, Г. Д. Чагелишвили, Д. Г. Ломинадзе, ДАН **399**, 687 (2004).

13. B. F. Farrel and P. J. Ioannou, J. Atmos. Sci. **50**, 2201 (1993).

14. G. D. Chagelishvili, G. R. Khujadze, J. G. Lominadze, and A. D. Rogava, Phys. Fluids **9**, 1955 (1997).

15. G. D. Chagelishvili, A. D. Rogava, and D. G. Tsiklauri, Phys. Plasmas **4**, 1182 (1997).

16. G. D. Chagelishvili, A. G. Tevzadze, G. Bodo, and S. S. Moiseev, Phys. Rev. Lett. **79**, 3178 (1997).

17. Л. А. Островский, А. И. Потапов, *Введение в теорию модулированных волн*, Физматлит, Москва (2003).

18. J. Pedlosky, *Geophysical Fluid Dynamics*, Springer-Verlag, Berlin (1987).

19. А. Найфэ, *Методы возмущений*, Мир, Москва (1976).

20. Н. Н. Моисеев, *Асимптотические методы нелинейной механики*, Наука, Москва (1987).

21. W. Munk, L. Armi, K. Fischer, and F. Zachariasen, Proc. Roy. Soc. Lond. A **456**, 1217 (2000).