

СТОЛКНОВЕНИЕ СТРУКТУРНО-СЛОЖНОЙ ЧАСТИЦЫ С БАРЬЕРОМ

В. В. Яновский^{a,}, А. В. Тур^b, Ю. Н. Масловский^a*

*^a Институт монокристаллов Национальной академии наук Украины,
НТК «Институт монокристаллов»
61001, Харьков, Украина*

*^b Center D'etude Spatiale Des Rayonnements, C.N.R.S.-U.P.S.
31028, Toulouse, France*

Поступила в редакцию 6 июля 2007 г.

В работе предлагается простая модель структурно-сложной частицы с внутренними степенями свободы и изучаются простейшие кинематические и динамические свойства такой частицы. Детально анализируется процесс столкновения структурно-сложной частицы с одной внутренней степенью свободы с барьером. Показано, что при отражении такой частицы могут наблюдаться как полное охлаждение внутренней степени свободы, так и ее «нагрев». Вычислены основные характеристики столкновения, такие как длительность столкновения, число столкновений за время взаимодействия и скорости оболочки и внутренней частицы после столкновения. Показано, что при столкновении структурно-сложной частицы с барьером появляются свойства, характерные для хаотического рассеяния.

PACS: 05.45.-a

1. ВВЕДЕНИЕ

При рассмотрении макроскопической частицы довольно часто используется представление о ней как о точечной частице. Такое представление остается достаточно надежным, если изучать ее свойства на масштабах, значительно превышающих ее размеры. Однако в ряде случаев вызывают интерес свойства частиц, которые зависят от их внутреннего устройства и размеров. Такие частицы уже нельзя рассматривать как точечные и влияние их устройства, т. е. внутренних степеней свободы может приводить к необычному поведению. Особый интерес представляет частица с небольшим числом внутренних степеней свободы, когда ее свойства зависят от их числа. Кроме этого сейчас интенсивно развивается изучение свойств разнообразных наносистем. Интересно отметить, что модель структурно-сложной частицы, предложенная в работе, реализуется экспериментально в виде нанотрубки с фуллереном внутри [1–3]. С этой точки зрения также интересно изучить общие свойства некоторых «сложных частиц»,

обладающих небольшим числом внутренних степеней свободы. К числу важных свойств, которые меняются при изменении числа внутренних степеней свободы, относятся даже такие простые и фундаментальные характеристики как типы свободного движения и характер взаимодействия таких частиц с другими объектами. Это означает необходимость изучения кинематики и динамики данных частиц.

Надо отметить, что изучение столкновений макроскопических частиц начато достаточно давно. Анализ таких столкновений позволил понять и установить основные законы взаимодействия (см., например, [4]) макроскопических частиц или масс. Для макроскопических частиц с гигантским числом внутренних степеней свободы столкновение с массивной стенкой (бесконечно большой массы), согласно гипотезе Ньютона, описывается соотношением $eV = -V'$, где V и V' — скорости макроскопического тела до и после столкновения со стенкой, а e — коэффициент восстановления. Гипотеза Ньютона хорошо согласуется с экспериментами [4]. Для абсолютно упругих столкновений $e = 1$, а для абсолютно неупругих $e = 0$. Для большинства реальных тел

*E-mail: yanovsky@isc.kharkov.ua

$0 < e < 1$. Другими словами, скорость макроскопической частицы после столкновения по абсолютной величине может только уменьшаться. Это совершенно естественное свойство оказывается может нарушаться для частиц с небольшим числом внутренних степеней свободы.

В работе предлагается простая модель структурно-сложной частицы с внутренними степенями свободы и изучаются простейшие кинематические и динамические свойства такой частицы. В разд. 2, 3 обсуждаются ее кинематические свойства и их зависимость от внутренних степеней свободы. В них основное внимание сосредоточено на методах, основанных на бильярдной идеологии, которая систематически используется в работе. В разд. 4 детально анализируется процесс столкновения структурно-сложной частицы с одной внутренней степенью свободы с барьером. Показано, что при отражении такой частицы могут наблюдаться как полное охлаждение внутренней степени свободы, так и ее «нагрев». Вычислены основные характеристики столкновения. Это длительность столкновения, число столкновений за время взаимодействия, а также скорости оболочки и внутренней частицы после столкновения. Показано, что столкновение структурно-сложной частицы с барьером в определенном смысле проявляет черты простейшего хаотического рассеяния.

2. ЧАСТИЦА С ОДНОЙ ВНУТРЕННЕЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ И ЕЕ КИНЕМАТИКА

Введем простую модель сложной частицы, имеющей внутренние степени свободы. Начнем с одномерной модели частицы с минимальным числом внутренних степеней свободы. Пусть оболочка частицы — это цилиндр длиной L с бортами, имеющий массу M . Внутри оболочки свободно движется внутренняя частица массы m (см. рис. 1). Такую

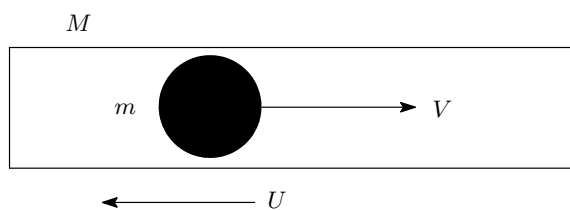


Рис. 1. Одномерная модель сложной частицы с внутренними степенями свободы

систему будем рассматривать как одномерную модель сложной частицы, обладающей внутренними степенями свободы. Специфика этой модели в том, что при столкновении внутренней частицы с оболочкой она меняет свой импульс в соответствии с законом сохранения суммарного импульса системы частица–оболочка. Столкновения оболочки с внутренней частицей будем предполагать абсолютно упругими.

Возникает очевидный вопрос о свойствах свободного движения такой частицы. Для частицы без внутренних степеней свободы ответ на него тривиален — свободная частица сохраняет начальную скорость. Другими словами, она движется прямолинейно с постоянной скоростью. Ясно, что для структурно-сложной частицы это уже не всегда так. Поэтому интересно выяснить, какие состояния свободного движения реализуются для такой частицы и как они зависят от числа ее внутренних степеней свободы. Такую зависимость легко обнаружить в рамках этой же модели структурно-сложной частицы. Ясно, что увеличивая число внутренних степеней свободы можно увеличивать число внутренних степеней свободы такой частицы. Следует подчеркнуть, что вводимые таким образом степени свободы взаимодействуют друг с другом и с оболочкой частицы. С физической точки зрения это особенно интересный случай. Изучая все состояния свободного движения такой структурно-сложной частицы, можно выяснить зависимость их от числа внутренних степеней свободы. С увеличением числа внутренних степеней свободы следует ожидать перехода к макроскопической частице и обоснованию гипотезы Ньютона о закономерностях столкновений таких макроскопических тел. Такая модель структурно сложной частицы при $M \rightarrow \infty$, переходит в известную модель одномерного газа частиц на отрезке [5, 6].

Перейдем к обсуждению состояний свободного движения простой структурно-сложной частицы. Основные принципы, которые нужно использовать, это законы сохранения импульса и энергии композитной частицы. Обозначим скорость внутренней частицы до n -го столкновения с оболочкой V_n , а скорость оболочки U_n . Очевидно, что между столкновениями эти скорости сохраняются. Поэтому смену состояний можно изучать в дискретном времени n столкновений между оболочкой и внутренней частицей.

Прежде всего легко установить среднюю скорость движения композитной частицы. Очевидно, что средняя скорость композитной частицы совпадает со скоростью движения центра инерции

$$\bar{V} = \frac{MU_0 + mV_0}{M + m}, \quad (1)$$

которая сохраняется для замкнутых систем (см., например, [7]). Разумеется, средняя скорость движения и для более сложных частиц с любым числом внутренних степеней свободы также совпадает со скоростью движения ее центра инерции. Это важный инвариант свободных движений замкнутых систем.

Теперь перейдем к более детальному анализу свободного движения. Из закона сохранения импульса

$$mV_{n+1} + MU_{n+1} = mV_n + MU_n \quad (2)$$

и закона сохранения энергии при столкновениях

$$mV_{n+1}^2 + MU_{n+1}^2 = mV_n^2 + MU_n^2 \quad (3)$$

легко получить обычную связь между скоростями до и после столкновения внутренней частицы с оболочкой:

$$V_{n+1} - U_n = U_{n+1} - V_n. \quad (4)$$

Следовательно, в такой системе сохраняется $|U_n - V_n|$. Окончательно получим отображение, определяющее эволюцию скоростей внутренней частицы и оболочки в дискретном времени столкновений:

$$\begin{aligned} V_{n+1} &= \frac{m - M}{m + M}V_n + \frac{2M}{m + M}U_n \equiv f(V_n, U_n), \\ U_{n+1} &= \frac{2m}{m + M}V_n + \frac{M - m}{m + M}U_n \equiv g(V_n, U_n). \end{aligned} \quad (5)$$

Таким образом, скорости оболочки и внутренней частицы определяются линейным отображением после каждого столкновения оболочки с внутренней частицей. Следует отметить, что свойство линейности может нарушаться при более сложном взаимодействии оболочки и внутренней частицы. Замечательным свойством отображения (5) является его инволютивность. Легко проверить, что

$$V_{n+2} = f(f(V_n, U_n), g(V_n, U_n)) \equiv V_n,$$

$$U_{n+2} = g(g(V_n, U_n), f(V_n, U_n)) \equiv U_n.$$

Это означает, что скорости оболочки и внутренней частицы при свободном движении могут находиться только в двух состояниях, определяемых начальными скоростями и массами частицы и оболочки. Таким образом, в общем случае скорость структурно-сложной частицы или ее оболочки при свободном

движении может принимать только два значения — U_0 и $U_1 = g(V_0, U_0)$, которые зависят от начальной скорости внутренней степени свободы V_0 . Аналогично состояния внутренней степени свободы также могут принимать только два значения скорости — V_0 и $V_1 = f(V_0, U_0)$. Кроме того, возможен естественно и вырожденный случай, когда $V_0 = U_0$ и частица движется с постоянной скоростью как точечная частица. В этом предельном случае внутренняя частица не сталкивается с оболочкой.

Полученные «спектры» скорости структурно-сложной частицы не исчерпывают все кинематические характеристики ее свободного движения. Для полного описания нужно установить времена смены этих состояний. Хотя период колебаний частицы легко получить из предыдущих соотношений, здесь удобно использовать другой подход к описанию поведения структурно-сложной частицы, который понадобится и при изучении ее динамики. Роль этого подхода возрастает и с увеличением числа внутренних степеней свободы. Причина этого в том, что двух законов сохранения уже недостаточно для детального анализа кинематических состояний таких частиц.

Для анализа геометрического и физического смысла реализации двухуровневого свободного движения перейдем к другому подходу, используемому при сведении некоторых механических задач к математическим бильярдам (см. [5, 6, 8]). Рассмотрим конфигурационное пространство композитной частицы. Для этого введем координату x_1 — положения внутренней частицы и координату x_2 — положения центра ее оболочки. Тогда все возможные состояния такой системы определяются неравенствами

$$|x_1 - x_2| \leq L/2.$$

Легко понять, что конфигурационное пространство состояний такой системы, это полоса шириной L , показанная на рис. 2.

Рассмотрим, как выглядит в конфигурационном пространстве движение внутренней частицы и оболочки частицы в зависимости от времени. Начальное положение внутренней частицы x_{01} и оболочки x_{02} находится в полосе. Обозначим их начальные скорости соответственно V_0 и U_0 . Тогда, координаты внутренней частицы и оболочки меняются со временем до момента столкновения как

$$\begin{aligned} x_1 &= tV_0 + x_{01}, \\ x_2 &= tU_0 + x_{02}. \end{aligned} \quad (6)$$

Эти уравнения параметрически определяют прямую линию в конфигурационном пространстве с углом

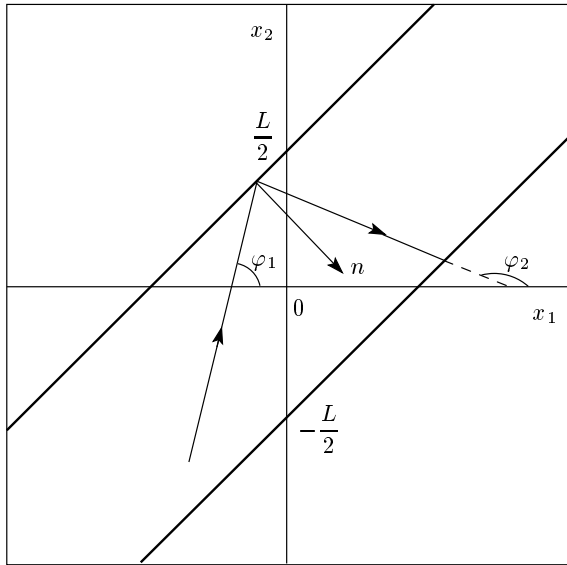


Рис. 2. Область между наклоненными под углом 45° к оси x_1 прямыми — конфигурационное пространство, обсуждаемого бильярда. Показаны также траектории системы до и после первого столкновения. Нормаль в точке столкновения обозначена n

наклона $\text{tg } \varphi = U_0/V_0$, проходящую через точку (x_{02}, x_{01}) (см. рис. 2). Точка столкновения внутренней частицы с оболочкой соответствует точке пересечения траектории с границей конфигурационной области. После столкновения траектория снова прямая линия, параметрически определяемая уравнениями

$$x_1 = (t - t_{cl})V_1 + x_{cl1},$$

$$x_2 = (t - t_{cl})U_1 + x_{cl2}.$$

Здесь для удобства введены координаты некоторой 1-ой точки пересечения (x_{cl2}, x_{cl1}) линии с границей конфигурационного пространства в момент времени t_{cl} , и соответствующих скоростей V_1 и U_1 после столкновения. На рис. 2 показаны характерные изменения траекторий после столкновения. Угол φ_1 определяется из уравнения $\text{tg } \varphi_1 = U_0/V_0$, а угол φ_2 — из $\text{tg } \varphi_2 = U_1/V_1$. Внешне эти изменения напоминают столкновение частицы со стенкой незамкнутого бильярда. Остается обсудить закон такого столкновения. Определим угол падения на «стенку» θ_1 и угол отражения θ_2 . Для этого надо найти углы наклона между прямой $x_2 = x_1 + L/2$ и прямыми

$$x_2 = \frac{U_0}{V_0}(x_1 - x_{01}) + x_{02},$$

$$x_2 = \frac{U_1}{V_1}(x_1 - x_{(1)1}) + x_{(1)2}.$$

В нашем случае легко заметить, что $\theta_1 = \varphi_1 - \pi/4$, а $\theta_2 = \pi + \pi/4 - \varphi_2$. Важным наблюдением из этого является, что угол падения не равен углу отражения. Следовательно, такое отражение нельзя трактовать как упругое отражение от границы бильярда некоторой эффективной «частицы». Перейдем теперь к новым бильiardным координатам конфигурационного пространства, выполняя замену

$$\tilde{x}_1 = \sqrt{m}x_1, \quad \tilde{x}_2 = \sqrt{M}x_2.$$

Фактически это соответствует масштабным преобразованиям координат. Первый вопрос, как изменится конфигурационное пространство при такой замене координат? Ясно, что в новых координатах область конфигурационного пространства удовлетворяет условию

$$\left| \frac{\tilde{x}_1}{\sqrt{m}} - \frac{\tilde{x}_2}{\sqrt{M}} \right| \leq \frac{L}{2}.$$

Это означает, что конфигурационное пространство системы останется полосой, но изменится угол наклона полосы, который будет зависеть от отношения масс. Теперь определим закон изменения траектории при столкновении. Сами траектории преобразуются очевидным образом. До столкновения

$$\tilde{x}_2 = \frac{\sqrt{M}}{\sqrt{m}} \frac{U_n}{V_n} (\tilde{x}_1 - \tilde{x}_{01}) + \tilde{x}_{02},$$

а после столкновения

$$\tilde{x}_2 = \frac{\sqrt{M}}{\sqrt{m}} \frac{U_{n+1}}{V_{n+1}} (\tilde{x}_1 - \tilde{x}_{n1}) + \tilde{x}_{n2}.$$

Используя полученные выражения, легко доказать, что в этих переменных угол падения траектории на границу равен углу отражения. Действительно, вектор, направленный по касательной к границе $\boldsymbol{\tau} = (\sqrt{M}, \sqrt{m})$, а вектор вдоль падающей траектории $\mathbf{v}_{in} = (\sqrt{M}U_n, \sqrt{m}V_n)$ и отраженной $\mathbf{v}_{out} = (\sqrt{M}U_{n+1}, \sqrt{m}V_{n+1})$. Угол между ними легко определить из скалярного произведения соответствующих векторов. Так,

$$\sin \theta_1 = \frac{\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}_{in}}{|\boldsymbol{\tau}| |\mathbf{v}_{in}|} \equiv \frac{MU_n + mV_n}{(\sqrt{m+M})(\sqrt{MU_n^2 + mV_n^2})},$$

$$\begin{aligned} \sin \theta_2 &= \frac{\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}_{out}}{|\boldsymbol{\tau}| |\mathbf{v}_{out}|} \equiv \\ &\equiv \frac{MU_{n+1} + mV_{n+1}}{(\sqrt{m+M})(\sqrt{MU_{n+1}^2 + mV_{n+1}^2})}. \end{aligned}$$

Легко заметить, что правая часть этих выражений определяется только сохраняющимися величинами: импульсом и энергией системы. Следовательно, угол падения равен углу отражения $\theta_1 = \theta_2$. Физическая причина, по которой эффективна такая замена, связана с преобразованием скоростей. Действительно, в бильярдных координатах скорости оболочки и внутренней частицы равны соответственно $U\sqrt{M}$ и $V\sqrt{m}$. Тогда величина скорости вдоль траектории $\mathbf{v} = (U\sqrt{M}, V\sqrt{m})$ совпадает с удвоенной энергией частицы и, следовательно, сохраняется после отражения от границ бильярда или при столкновении оболочки с внутренней частицей. Таким образом, задача о свободном движении структурно-сложной частицы сводится к обычному бильярду в полосе. Отличие заключается только в трактовке этого бильярда. Так, точка конфигурационного пространства соответствует состоянию как внутренней частицы, так и оболочки в исходных терминах. Сегмент траектории до пересечения с границей соответствует свободному движению оболочки и внутренней частицы. Отражение от границы бильярда — столкновению внутренней частицы с оболочкой. Естественный переход к такому простому бильярду позволяет наглядно представить и перечислить все типы свободных движений частицы.

1. Движение с постоянной скоростью. Инфинитные движения. Вырожденный случай $V_0 = U_0$. Соответствует траекториям бильярда, параллельным его границам.

2. Периодическая смена скоростей с нулевой скоростью центра масс. Финитные движения. Также вырожденный случай. Соответствует бильярдным траекториям, падающим ортогонально на границу бильярда. Далее под периодом траекторий удобно понимать число различных скоростей оболочки или внутренней частицы, после которых они повторяются. Тогда период таких движений равен 2.

3. Периодическая осцилляция скоростей с постоянным уходом на бесконечность. Инфинитные движения. Случай общего положения. Соответствует траекториям, падающим на границу под углами не равными $\pi/2$. Период осцилляций 2.

Теперь легко определить временной период смены скоростей простой композитной частицы при свободном движении. Действительно, используя параметрический вид траектории (6), легко вычислить время столкновений траекторий, начинающихся на одной границе бильярда и достигающей второй границы

$$t_{cl} = \frac{L}{|U_0 - V_0|}.$$

Учитывая симметрию траекторий и сохранение $|U_n - V_n| = \text{const}$ при отражениях (см. (4)), легко получить период смены состояний частицы в виде

$$T = \frac{2L}{|U_0 - V_0|}. \quad (7)$$

Полученные характеристики исчерпывают полное описание кинематических состояний свободной структурно-сложной частицы с одной внутренней степенью свободы. Обратим внимание, что с физической точки зрения все кинематические свойства частицы с одной внутренней степенью свободы определяются наличием двух инвариантов свободного движения, это скорость центра масс и относительная скорость оболочки и внутренней частицы $|U_n - V_n| = \text{const}$.

Представление структурно-сложной частицы с одной степенью свободы в терминах бильярда в полосе, позволяет легко установить отсутствие эргодичности при свободном движении, не говоря уже о перемешивании. Однако ситуация принципиально изменится при увеличении числа внутренних степеней свободы.

В заключение этого раздела обсудим интересный вопрос. Можно ли определить полное состояние частицы с одной внутренней степенью свободы по данным наблюдения? Для того чтобы ответить на этот вопрос, необходимо уточнить, какие данные можно получить из кинематических наблюдений. Будем считать, что можно установить основные характеристики оболочки. Другими словами, из эксперимента можно получить L, U_0, U_1, \bar{V}, T . Таким образом по этим данным требуется установить m, M, V_0, V_1 . На первый взгляд, ответ на этот вопрос положительный, так как для определения 4 неизвестных имеется система 4-х уравнений (1), (5), (7). Однако легко заметить, что в уравнения (5) и (1) входит только отношение масс, например m/M . Поэтому установить массы m и M из перечисленных выше наблюдаемых невозможно. Следовательно, даже для структурно-сложной частицы с одной внутренней степенью свободы по данным наблюдения нельзя определить полное состояние частицы. Для того чтобы это стало возможным, необходимо измерение массы оболочки или полной массы такой частицы.

3. ЧАСТИЦА С ДВУМЯ ВНУТРЕННИМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

Обсудим, как меняются кинематические свойства структурно-сложной частицы с увеличением

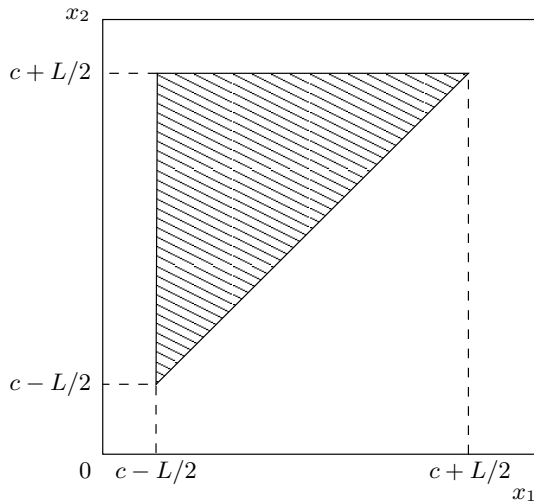


Рис. 3. Заштрихована область сечения конфигурационного пространства плоскостью $x_3 = c$

числа внутренних степеней свободы. Рассмотрим частицу с двумя внутренними степенями свободы. Поместим в оболочку две частицы. Снова начнем с конфигурационного пространства системы. В этом случае исходными координатами будут координаты двух внутренних частиц x_1, x_2 с массами m_1 и m_2 , и координата центра оболочки x_3 с массой M . Ниже приведены условия, ограничивающие допустимые состояния такой системы. Условие

$$x_1 \leq x_2$$

определяет порядок размещения частиц в оболочке и является следствием одномерности модели. Условия

$$|x_3 - x_1| \leq \frac{L}{2}, \quad |x_3 - x_2| \leq \frac{L}{2}$$

определяют некоторую область в пространстве \mathbb{R}^3 с координатами (x_1, x_2, x_3) . Легко понять, что это трубчатая область с треугольной границей. Сечение этой области, например, плоскостью $x_3 = \text{const}$ показано на рис. 3. Отметим, что достижение билиардной траекторией грани в сечении, образующей гипотенузу прямоугольного треугольника, соответствует столкновению внутренних частиц между собой, а достижение граней в сечении, образующих катеты — столкновению соответствующей внутренней частицы с оболочкой. Все характеристики этой области определяются размером оболочки L . Перейдем теперь к координатам

$$\tilde{x}_1 = \sqrt{m_1}x_1, \quad \tilde{x}_2 = \sqrt{m_2}x_2, \quad \tilde{x}_3 = \sqrt{M}x_3.$$

Легко доказать, что в этих координатах закон отражения траектории системы от границ нового конфигурационного пространства имеет в точности билиардный характер, угол падения равен углу отражения. Причина этого, как отмечалось ранее, в сохранении величины скорости вдоль билиардной траектории после отражения ее от границы билиарда. В результате получаем удобную и эффективную билиардную модель описания кинематики частицы с двумя внутренними степенями свободы. Таким образом, остается описать поведение лучей в трехмерном незамкнутом билиарде специального вида.

С физической точки зрения достаточно рассмотреть частицу с 2-мя внутренними степенями свободы в системе центра масс. Так как скорость центра масс сохраняется, то это наиболее подходящее сечение исходного открытого билиарда. Такое сечение определяется соотношением

$$m_1x_1 + m_2x_2 + Mx_3 = 0.$$

И в новых координатах

$$\sqrt{m_1}\tilde{x}_1 + \sqrt{m_2}\tilde{x}_2 + \sqrt{M}\tilde{x}_3 = 0.$$

Очевидно, что данное уравнение описывает плоскость с вектором нормали $\mathbf{n} = (\sqrt{m_1}, \sqrt{m_2}, \sqrt{M})$, проходящую через начало координат. Уравнения плоскостей, которые ограничивают треугольную призму и формируют билиард, определяются как

$$\sqrt{m_1}\tilde{x}_2 + \sqrt{m_2}\tilde{x}_1 = 0,$$

$$-\sqrt{M}\tilde{x}_1 + \sqrt{m_1}\tilde{x}_3 - \sqrt{Mm_1}\frac{L}{2} = 0,$$

$$-\sqrt{M}\tilde{x}_2 + \sqrt{m_2}\tilde{x}_3 - \sqrt{Mm_2}\frac{L}{2} = 0.$$

Отсюда легко найти направляющие вектора пересечений этих плоскостей с плоскостью, в которой происходит движение:

$$\mathbf{a}_1 = \left(-\sqrt{m_1M}, -\sqrt{m_2M}, m_1 + m_2 \right),$$

$$\mathbf{a}_2 = \left(-\sqrt{m_1m_2}, -M - m_1, \sqrt{m_2M} \right),$$

$$\mathbf{a}_3 = \left(M + m_2, -\sqrt{m_1m_2}, \sqrt{Mm_1} \right).$$

Теперь можно вычислить тангенсы углов между этими векторами:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\widehat{\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2}) &= \sqrt{\frac{m_1(m_1 + m_2 + M)}{m_2 M}}, \\ \operatorname{tg}(\widehat{\mathbf{a}_3 \mathbf{a}_2}) &= \sqrt{\frac{M(m_1 + m_2 + M)}{m_1 m_2}}, \\ \operatorname{tg}(\widehat{\mathbf{a}_3 \mathbf{a}_1}) &= \sqrt{\frac{m_2(m_1 + m_2 + M)}{m_1 M}}. \end{aligned} \quad (8)$$

Таким образом, для описания кинематики сложной частицы с двумя внутренними степенями свободы достаточно изучить траектории в треугольном билиарде, углы которого определяются соотношением масс (8). Легко проверить, что полученный треугольный билиард при любом соотношении масс — остроугольный. Интересно отметить, что в точности такой треугольный билиард появляется при изучении 3-х частиц, движущихся в трубчатом кольце [9]. Для описания кинематики структурно-сложной частицы используем замечательные результаты, полученные при изучении треугольных билиардов. Для них основную роль прежде всего играет соотношение углов треугольника. Хорошо известно, что билиард в треугольнике с рационально соизмеримыми углами не эргодичен [5]. В принципе доказана и более общая теорема. Для рационального полигона и любого направления, билиардный поток перемешиваемый [10]. На основании численных экспериментов утверждается, что если только один угол треугольника рационально соизмерим с π , то билиард в нем эргодичен и слабо перемешивающий [11]. В работе [9] численно показано, что в треугольнике с тремя углами рационально несоизмеримыми с π билиард является перемешивающим. Разумеется сильный хаос с экспоненциальным разбеганием траекторий в таких билиардах не возникает. Причина в строго доказанном равенстве нулю топологической энтропии для треугольных и даже полигональных билиардов [10]. Механизм хаотизации в таких билиардах более тонкий и связан с наличием разрывов в динамических законах эволюции лучей. Кроме этого достаточно много известно о периодических траекториях в треугольных билиардах. В книгах [6, 8] детально обсуждаются периодические траектории в треугольных билиардах и приводится частичная бифуркационная диаграмма периодических траекторий для них. Разумеется, все эти результаты очевидным образом переносятся на кинематические свойства сложной частицы с двумя степенями свободы. Опишем, основываясь на этих результатах, типы свободных движений частицы с двумя внутренними степенями свободы.

1. Инфинитное движение, аналогичное точечной

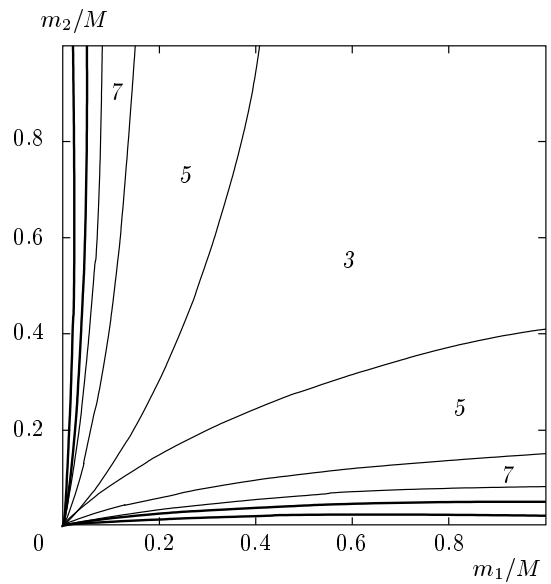


Рис. 4. В пространстве относительных масс показаны области различных периодических режимов. В области 3 реализуется режим с периодом 3. В области 5 возможны периодические режимы 3 и 5. В области 7 возможны периодические режимы 7, 5 и 3. Аналогично устроены и более узкие зоны с еще большими периодами 9, 11, ...

частице. Вырожденный случай при $U = V_1 = V_2$. Билиардная траектория не пересекается с границами билиарда.

2. При рационально соизмеримых углах (8) движение не эргодично. Это означает, что «спектр» скоростей конечен.

3. При одном несоизмеримом с π углом (8) большинство траекторий эргодично.

4. При несоизмеримых с π углами (8) возникает перемешивание и появляется слабый хаос, который проявляется в убывании корреляционной функции и забывании начальных условий.

5. При определенных начальных условиях и различных соотношениях масс возможны периодические режимы с периодами 3, 5, 7, 9, 11, ..., как с регулярным дрейфом со скоростью центра масс, так и без дрейфа. Режим с периодом 3 возможен при любых соотношениях масс. Области существования показаны на рис. 4 в пространстве относительных масс внутренних частиц к массе оболочки и соответствуют известной бифуркационной диаграмме [6, 8].

Важно заметить, что кинематические свойства сложной частицы с двумя степенями свободы существенно зависят от соотношения масс, входящих в нее. В определенном смысле появляется необычная

чувствительность к массам. При этом внутренние степени свободы могут приводить к регулярным периодическим режимам, к эргодическим и хаотическим режимам. Все эти режимы качественно отличаются от допустимых режимов сложной частицы с одной внутренней степенью свободы. Например, режимы с периодом 2 невозможны для частицы с двумя внутренними степенями свободы. С ростом числа внутренних степеней свободы кинематические свойства могут быть исследованы аналогично, но возникающие билиарды становятся «открытыми призмами» в пространствах высокой размерности и многие вопросы для них остаются невыясненными. Например, анализ режимов свободного движения частицы с тремя внутренними степенями свободы в системе центра масс сводится к анализу билиардных траекторий в трехмерном билиарде, граница которого обычная пирамида.

4. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ СТРУКТУРНО-СЛОЖНОЙ ЧАСТИЦЫ С БАРЬЕРОМ

Перейдем к рассмотрению взаимодействия частицы с одной внутренней степенью свободы с твердой стенкой или с барьером. Взаимодействие оболочки с барьером предполагается абсолютно упругим. Фактически это означает изучение закона отражения структурно-сложной частицы. Подход с использованием билиардной идеологии исключительно эффективен для этой задачи. Рассмотрим структурно-сложную частицу, падающую на плоскую твердую стенку. Наличие стенки меняет конфигурационное пространство такой частицы. В введенных ранее билиардных координатах конфигурационное пространство будет представлять собой наклонную полосу

$$\left| \frac{\tilde{x}_1}{\sqrt{m}} - \frac{\tilde{x}_2}{\sqrt{M}} \right| \leq \frac{L}{2},$$

ограниченную снизу прямой

$$\tilde{x}_2 = \frac{L}{2} \sqrt{M}.$$

Последнее ограничение связано с положением стенки в начале координат. Доступное положение оболочки

$$\tilde{x}_2 \geq \frac{L}{2} \sqrt{M}.$$

Угол наклона полосы α определяется отношением масс оболочки и внутренней частицы $\text{tg } \alpha = \sqrt{M}/\sqrt{m}$. Кроме того, обозначим для удобства расстояние между стенкой и внутренней частицей в

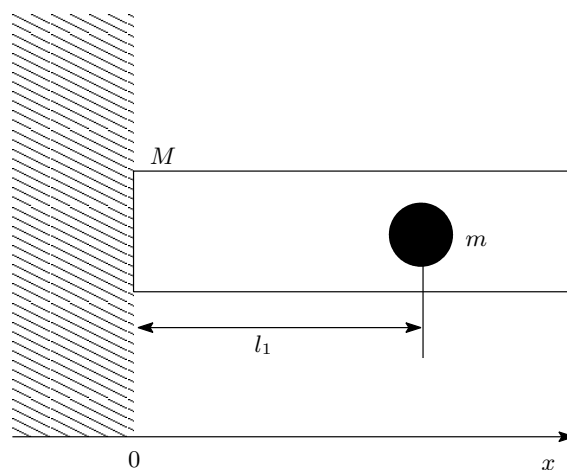


Рис. 5. Показан геометрический смысл расстояния l_1 . Это расстояние до барьера от внутренней частицы в момент столкновения оболочки с барьером. Положение барьера отмечено штриховкой. Направление движения до столкновения композитной частицы противоположно направлению координатной оси

момент первого столкновения оболочки со стенкой l_1 (см. рис. 5). В новых координатах $\tilde{l}_1 = l_1 \sqrt{m}$. Вид конфигурационного пространства и обозначения приведены на рис. 6. Легко доказать, что билиардная траектория отражается от стенок эффективного билиарда по обычному правилу — угол падения равен углу отражения.

Очевидно, что столкновениям оболочки с барьером в конфигурационном пространстве соответствуют отражения билиардной траектории от границы

$$\tilde{x}_2 = \frac{L}{2} \sqrt{M}.$$

Таким образом, характер столкновения частицы с барьером определяется билиардными траекториями в «угловом» билиарде (см. рис. 6). Траектории в билиарде в форме угла были детально изучены Синаем [12] даже в многомерном случае. В рассматриваемом нами случае, конфигурация билиарда несколько более сложная (см. рис. 6, 7). Однако вывод о выходе траектории из угла за конечное число столкновений сохраняется. Общий качественный вывод из этих соображений таков — композитная частица отразится от стенки только после некоторого конечного числа столкновений с ней. Ясно, что число столкновений частицы с барьером является исключительно важной характеристикой взаимодействия. Поэтому вычислим его, используя метод выпрямления билиардных траекторий, предложенный Шварцем (см., например, [6, 8]). Постро-

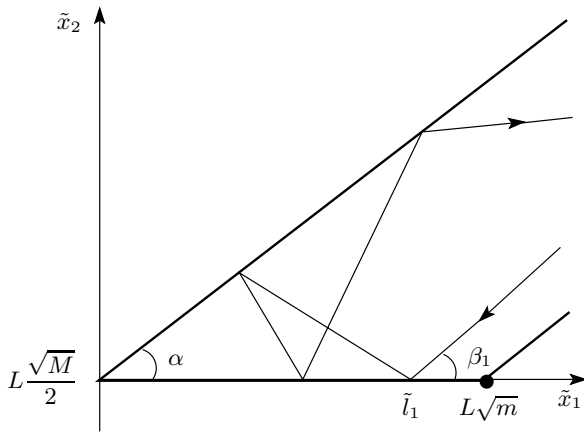


Рис. 6. Область внутри полосы, ограниченной жирными линиями, является конфигурационным пространством сталкивающейся с барьером композитной частицы. Показан пример траектории, соответствующей двум столкновениям оболочки с барьером до ее отражения; \tilde{l}_1 обозначено расстояние от вершины угла до точки первого столкновения оболочки с барьером

ение развертки бильярда для спрямления траектории при взаимодействии с барьером приведено на рис. 7. Из него ясно, что максимально возможное число столкновений оболочки с барьером N_{max} при $\pi = 2k\alpha$ (где k — целое положительное число) совпадает с $N_{max} = [\pi/2\alpha]$ и в остальных случаях с $N_{max} = 1 + [\pi/2\alpha]$. Таким образом, максимально возможное число столкновений возрастает с уменьшением α или отношения масс M/m . Разумеется, реальное число столкновений с барьером ($1 \leq N \leq N_{max}$) зависит от параметров композитной частицы и ее состояния до столкновения с барьером.

Определим эту зависимость, выбирая в качестве удобных начальных характеристик композитной частицы расстояние \tilde{l}_1 в момент первого столкновения с барьером и угол падения (см. рис. 7) бильiardной траектории β_1 , который определяется соотношением

$$\text{tg } \beta_1 = U_1 \sqrt{M} / V_1 \sqrt{m}.$$

Здесь U_1 и V_1 — скорости оболочки и внутренней частицы непосредственно перед столкновением с барьером. При фиксированном \tilde{l}_1 число столкновений с барьером зависит от угла β_1 . При углах падения, $\beta_{C(N-1)} \geq \beta_1 \geq \beta_{CN}$, композитная частица будет испытывать ровно N столкновений с барьером (см. рис. 7). Критические углы β_{CN} определяются геометрически соотношениями

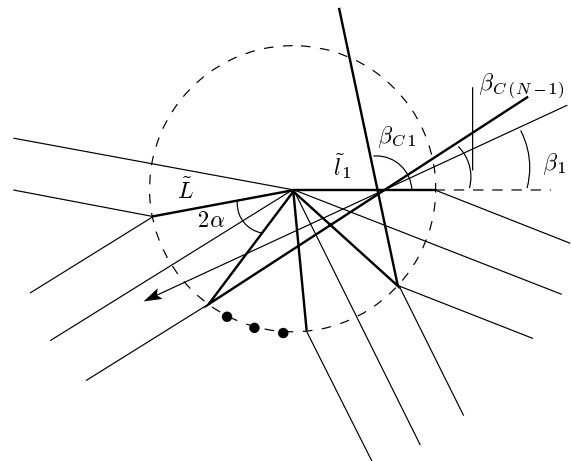


Рис. 7. Иллюстрирует способ спрямления траектории за счет укладки плоскости соответствующим «бильiardом». Точки символизируют все пропущенные сегменты бильiardа. Показана бильiardная траектория (прямая с направлением). Пересечение жирных отрезков соответствует столкновению с барьером. Радиус окружности равен $\tilde{L} = \sqrt{m}L$. Обозначение \tilde{l}_1 соответствует расстоянию от общей вершины углов α до первого пересечения бильiardной траектории, падающей под углом β_1 . Показаны также два критических угла β_{C1} и $\beta_{C(N-1)}$

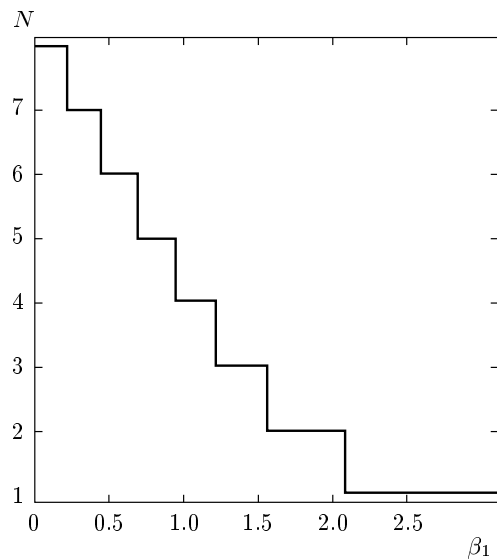


Рис. 8. Зависимость числа столкновений от угла β_1 при параметрах композитной частицы $\alpha = 0.2$, $L = 1$ и $l_1 = 0.7$

$$\operatorname{tg} \beta_{CN} = \frac{l_1 \sin(2N\alpha)}{L - l_1 \cos(2N\alpha)},$$

где $N = 1, 2, \dots, N_{max}$. Будем считать по определению $\beta_{C(0)} = \pi$, что распространяет критерий числа столкновений $\beta_{C(N-1)} \geq \beta_1 \geq \beta_{CN}$ и на одно столкновение ($N = 1$). Спектр критических углов зависит от начальных значений l_1 и характеристик композитной частицы L, α . Естественно, используя простые геометрические соображения, можно установить и явную зависимость числа столкновений с барьером от основных характеристик столкновения. Для этого используем число пересечений с радиальными линиями, углы между которыми 2α , с прямой линией, углом падения которой на первую радиальную линию β_1 , с расстоянием от центра l_1 (см. рис. 7). Условие, определяющее число пересечений, а следовательно, и число столкновений с барьером, состоит в том, что расстояние последнего пересечения от центра радиальных линий не превышает \tilde{L} . Используя теорему синусов, легко доказать, что

$$N = 1 + \left\lfloor \frac{\pi - \beta_1 - \arcsin\left(\frac{l_1}{L} \sin \beta_1\right)}{2\alpha} \right\rfloor. \quad (9)$$

Здесь [...] — целая часть числа. Важным следствием (9) является разрывность зависимости числа столкновений N от начальных характеристик столкновения и параметров композитной частицы (см. рис. 8). Такая зависимость определяет чувствительность характеристик рассеяния композитной частицы на барьере к неопределенности состояния до столкновения.

Зависимость \tilde{l}_1 и β_1 от первичных начальных условий композитной частицы (\mathbf{x}_0, V_0, U_0) также легко установить (см. Приложение В).

Рассмотрим теперь, как меняются скорости композитной частицы в результате отражения от барьера. Для этого удобно использовать алгебраический подход. Матрица столкновений внутренней частицы с оболочкой определяется соотношением (5). Используем для нее обозначение

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} V_{n+1} \\ U_{n+1} \end{pmatrix} &= \hat{S}_c \begin{pmatrix} V_n \\ U_n \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{m-M}{m+M} & \frac{2M}{m+M} \\ \frac{2m}{m+M} & \frac{M-m}{m+M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_n \\ U_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Матрица, определяющая изменение скоростей композитной частицы при столкновении оболочки с барьером, имеет простой вид:

$$\begin{pmatrix} V_{n+1} \\ U_{n+1} \end{pmatrix} = \hat{S}_b \begin{pmatrix} V_n \\ U_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_n \\ U_n \end{pmatrix},$$

который определяется изменением скорости оболочки на противоположную при столкновении с барьером. Так как столкновение оболочки с барьером строго чередуется столкновениями оболочки с внутренней частицей, можно легко получить и матрицу рассеяния для N кратных столкновений:

$$\hat{S}_{int(N)} = \hat{S}_b \cdot (\hat{S}_c \cdot \hat{S}_b)^{(N-1)}.$$

Таким образом, число столкновений с барьером, вычисленное выше, и определяет изменение скоростей композитной частицы при взаимодействии с барьером. Вычисление этой матрицы достаточно простая задача. После несложных преобразований легко записать ее окончательный вид:

$$\hat{S}_{int(N)} = \begin{pmatrix} \cos(2(N-1)\alpha) & -\frac{\sqrt{mM}}{m} \sin(2(N-1)\alpha) \\ -\frac{m}{\sqrt{mM}} \sin(2(N-1)\alpha) & -\cos(2(N-1)\alpha) \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Основные характеристики матрицы рассеяния

$$\det(\hat{S}_{int(N)}) = -1, \quad \operatorname{sp}(\hat{S}_{int(N)}) = 0.$$

Таким образом, скорости композитной частицы в результате столкновения с барьером меняются согласно соотношениям

$$\begin{aligned} V_N &= \cos(2\alpha(N-1))V_1 - \\ &\quad - \sqrt{\frac{M}{m}} \sin(2\alpha(N-1))U_1, \\ U_N &= -\sqrt{\frac{m}{M}} \sin(2\alpha(N-1))V_1 - \\ &\quad - \cos(2\alpha(N-1))U_1. \end{aligned} \quad (11)$$

Легко видеть, что основной параметр, определяющий изменение скоростей, это число

$$N = N(V_1, U_1)$$

столкновений с барьером (9). Обратим внимание, что отображение

$$(V_1, U_1) \rightarrow (V_N, U_N)$$

— нелинейное и даже разрывное именно из-за зависимости $N = N(V_1, U_1)$. Фактически этим формально и исчерпывается описание изменения скоростей композитной частицы при N -кратном столкновении с барьером. Однако с физической точки зрения, важно обсудить изменение скорости центра масс и разности скоростей внутренней частицы и оболочки в результате столкновения. Дело в том, что разность скоростей внутренней частицы и оболочки можно связать с условной температурой композитной частицы, а скорость центра масс — со скоростью ее поступательного движения. При этом возникает возможность нагрева или охлаждения композитной частицы при взаимодействии с барьером. Кроме того, причина такого выбора связана с физически ясными соображениями. Процесс свободного движения композитной частицы можно представить как ее движение с постоянной скоростью центра масс и колебаниями оболочки. При столкновении оболочки с внутренней частицей скорость центра масс не меняется и, следовательно, она сохраняется при свободном движении. Таким образом, отражение от барьера может произойти только после смены скорости центра масс на противоположное. Если импульс оболочки мал, то за одно ее столкновение с барьером скорость центра масс не сможет изменить свое направление и в этом случае должны происходить последующие столкновения с барьером до тех пор, пока не изменится направление скорости центра масс. Исходя из этой качественной картины, проведем анализ рассеяния композитной частицы. Естественно, из соотношений (11) легко восстановить преобразования скорости центра масс

$$\bar{V} = (mV + MU)/(m + M)$$

и относительной скорости внутренней частицы $V_T = U - V$ в результате столкновения с барьером. Переход к таким переменным является линейным преобразованием координат. Поэтому его легко осуществить в матричном виде. В результате получим нужное преобразование скоростей вида

$$\begin{aligned} \bar{V}_N &= \bar{V}_1 \cos(2\alpha N) - V_{T1} \frac{\sin(2\alpha)}{2} \sin(2\alpha N), \\ V_{T(N)} &= -\bar{V}_1 \frac{2}{\sin(2\alpha)} \sin(2\alpha N) - V_{T1} \cos(2\alpha N). \end{aligned} \quad (12)$$

При отсутствии столкновения с барьером \bar{V} и $|V_T|$ сохраняются со временем (см. соотношение (4)). Это еще одно обстоятельство в пользу введения этих переменных.

Найдем еще одну важную характеристику взаимодействия с барьером — время взаимодействия с ним. Очевидно, если композитная частица взаимодействует с барьером посредством однократного столкновения, то взаимодействие мгновенно. Конечное время взаимодействия возникает только при многократных столкновениях с барьером. Определим его как время между первым и последним столкновениями оболочки со стенкой. Поскольку при переходе к новым координатам не выполнялось преобразование времени, очевидно, что интервал времени между двумя любыми состояниями $\Delta t = \tilde{S}/|\dot{\mathbf{v}}|$, где \tilde{S} — длина спрямленной бильярдной траектории между этими состояниями, а $|\dot{\mathbf{v}}|$ — модуль скорости в бильярдных координатах вдоль бильярдной траектории, который не меняется, так как $|\dot{\mathbf{v}}| = \sqrt{2E}$ (E — полная энергия сложной частицы).

Пусть композитная частица испытала N столкновений при взаимодействии с барьером. Вычислим длину бильярдной траектории между первым и последним столкновениями оболочки с барьером (см. рис. 7), используя теорему синусов:

$$\begin{aligned} S &= \tilde{l}_1 \frac{\sin(2\alpha(N-1))}{\sin(\pi - \beta_1 - 2\alpha(N-1))} \equiv \\ &\equiv \tilde{l}_1 \frac{\sin(2\alpha(N-1))}{\sin(\beta_1 + 2\alpha(N-1))}. \end{aligned}$$

Естественно этот путь зависит от начальных характеристик взаимодействия с барьером β_1 и \tilde{l}_1 и параметров структурно-сложной частицы α . Тогда время взаимодействия равно

$$\Delta t_{int} = \frac{S}{|\dot{\mathbf{v}}|} = \tilde{l}_1 \frac{\sin(2\alpha(N-1))}{\sin(\beta_1 + 2\alpha(N-1)) \sqrt{mV^2 + MU^2}},$$

где N зависит от характеристик композитной частицы и условий взаимодействия согласно уравнению (9). Время взаимодействия возрастает с уменьшением полной энергии частицы и зависит от параметров столкновения разрывным образом.

Обсудим теперь, какие изменения скоростей происходят в результате взаимодействия с барьером. Как отмечалось ранее, важными наблюдаемыми являются скорость центра масс композитной частицы

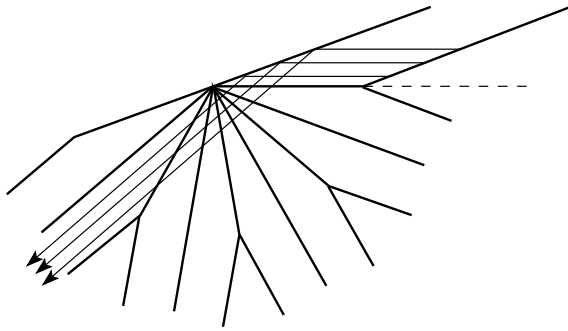


Рис. 9. Биллиардные траектории, для которых реализуется режим полного охлаждения композитной частицы при взаимодействии с барьером с четырехкратным столкновением с ним оболочки

и относительная скорость внутренней частицы и оболочки. Первую можно рассматривать как поступательную скорость частицы, вторую как характеристику внутренней степени свободы. Именно эта скорость характеризует внутреннюю энергию частицы. В этом смысле можно говорить, что она характеризует «температуру» структурно-сложной частицы. Поэтому далее будем говорить о режимах охлаждения или нагрева частицы, понимая под этим соответственно уменьшение или увеличение V_T в результате взаимодействия с барьером. Разумеется при этом будет меняться и скорость поступательного движения \bar{V} . Начнем с режимов полного охлаждения структурно-сложной частицы. При таком режиме столкновения скорость V_T обращается в нуль. Идеология биллиардов позволяет легко обнаружить существование и критерии таких режимов. Пример биллиардных траекторий, соответствующих им, приведен на рис. 9. Необходимые критерии возможности полного охлаждения композитной частицы при взаимодействии с барьером посредством N столкновений с ним оболочки приводят к следующим условиям для соотношения масс оболочки и внутренней частицы (см. Приложение А):

$$\frac{\sin \alpha}{\sin(2\alpha N + \alpha)} > 1,$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sin(2\alpha(N - 1) + \alpha)} \leq 1.$$

Здесь α определяется соотношением $\text{tg } \alpha = \sqrt{M/m}$. Например, для полного охлаждения при однократных столкновениях ($N = 1$) эти необходимые условия дают ограничение на массы

$$\sqrt{M/m} > 1.$$

Для $N = 2$ соотношение масс должно удовлетворять неравенству

$$\frac{\sqrt{3}}{3} < \sqrt{\frac{M}{m}} < 1.$$

Для $N = 3$ необходимые условия таковы:

$$\frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{\sqrt{2 + \sqrt{2}}} < \sqrt{\frac{M}{m}} < \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

При этом угол падения биллиардной траектории на ребро, соответствующее барьеру, строго фиксирован:

$$\beta_1 = \pi - 2\alpha(N - 1) - \alpha.$$

При выполнении этих условий все частицы с начальным параметром \tilde{l}_1 , лежащим в интервале

$$\tilde{L} \frac{\sin(2\alpha N + \alpha)}{\sin(2\alpha N - \alpha)} < \tilde{l}_1 < \tilde{L} \frac{\sin \alpha}{\sin(2\alpha(N - 1) + \alpha)},$$

будут испытывать полное охлаждение при взаимодействии с барьером с N -кратным столкновением с ним оболочки. Разумеется следует помнить, что N определяется соотношением (9) и также зависит как от параметров частицы, так и от начальных условий.

Таким образом, при взаимодействии с барьером может наблюдаться режим полного охлаждения частицы, при этом поступательная скорость частицы увеличивается согласно соотношениям (12):

$$\bar{V}_N = \bar{V}_1 \frac{1}{\cos(2\alpha N)}.$$

Другими словами, частица ускоряется после взаимодействия с барьером. Интересно отметить, что вообще отражение частицы от барьера является неупругим, несмотря на участие во взаимодействии только абсолютно упругого отражения при столкновении любых элементов структурно-сложной частицы с барьером. Кроме того, для такого режима отражения коэффициент восстановления $e > 1$, что соответствует необычному эффекту отражения частиц с малым числом внутренних степеней свободы. Разумеется случай $\cos(2\alpha N) = 0$ не соответствует режиму полного охлаждения.

Перейдем теперь к обсуждению в каком-то смысле обратных режимов нагрева композитной частицы. Легко строго доказать, что режим полного нагрева (при котором $\bar{V}_N = 0$) невозможен. Однако, предполагая $\bar{V}_N \ll \bar{V}_1$, легко получить возможность нагрева

$$V_{TN} \approx -V_{T1} \frac{1}{\cos(2\alpha N)}$$

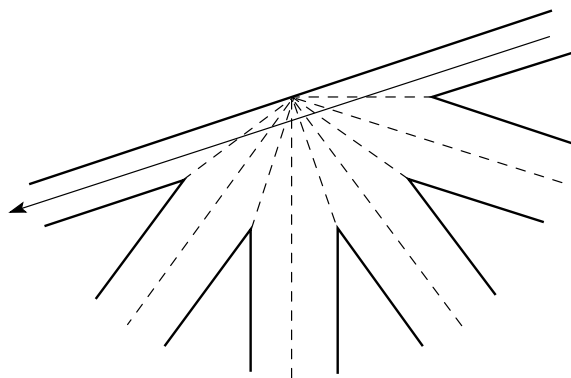


Рис. 10. Режим абсолютно упругого отражения «холодной» частицы. Показана развертка соответствующего бильярда и бильiardная траектория. Угол α выбран равным $\pi/10$. Легко увидеть, что оболочка при взаимодействии испытывает $N = 5$ столкновений с барьером и 4 столкновения с внутренней частицей

в результате N -кратного взаимодействия с барьером.

Обратим внимание еще на один качественный эффект, возникающий при отражении «холодной» частицы ($V_1 = U_1$) от барьера. При выполнении условия $2\alpha n = \pi$ с целым $n > 2$ возможен режим отражения, показанный на рис. 10, соответствующий упругому отражению $\bar{V}_N = -\bar{V}_1$. Коэффициент восстановления $e = 1$. При этом после N -кратного взаимодействия с барьером отраженная частица остается «холодной», $V_N = U_N$. Разумеется, в процессе взаимодействия внутренняя частица испытывает также $N - 1$ столкновений с оболочкой. В определенном смысле это даже более неожиданный эффект, чем нагрев или охлаждение частицы.

Разумеется, уравнения (12) позволяют после определения N согласно уравнению (9) точно находить значения обеих скоростей после взаимодействия с барьером при любых параметрах и начальных значениях композитной частицы. Однако это не означает отсутствия чувствительности к изменению начальных условий.

При упругом отражении обычной частицы от барьера начальная неопределенность скорости частицы сохраняется, а неопределенность координат растет пропорционально времени. Другими словами, рассеяние обычной частицы не хаотическое. Рассеяние композитной частицы на барьере уже можно отнести к хаотическому рассеянию. Бильiardная идеология позволяет легко понять основной механизм чувствительности характеристик рассеяния к

неопределенности в начальных условиях композитной частицы. На рис. 11 показан геометрический механизм такой чувствительности. Легко видеть, что увеличение неопределенностей связано с направлениями бильiardных траекторий, попадающих на углы развертки бильiardа. Для пучков с малым расхождением вдоль этих направлений угол β_1 падения на барьер непрерывно зависит от начальных неопределенностей, но значение \tilde{l}_1 меняется скачкообразно. При этом неопределенность \tilde{l}_1 становится порядка \tilde{L} . Значение

$$\Delta \tilde{l} \approx \tilde{L} \left(1 - \frac{\sin(\beta - 2\alpha)}{\sin \beta} \right)$$

легко оценить и заметить, что эта неопределенность практически не зависит от начальной неопределенности скоростей и положения. Это означает, что бильiardные траектории, входящие в узкий пучок, будут испытывать разное число столкновений оболочки с барьером при взаимодействии с ним (см. рис. 11). Это, в свою очередь, приводит к конечной неопределенности в скоростях композитных частиц после рассеяния. В этом смысле рассеяние композитной частицы на барьере имеет хаотический характер. Следует отметить, что точное знание положения внутренней частицы с физической точки зрения вообще выглядит сомнительным. Его естественная неопределенность сравнима с размером композитной частицы L . Кроме того, при большой удаленности частиц от барьера неопределенность дополнительно возрастает со временем. Это обстоятельство только усиливает хаотичность рассеяния из-за достаточно большой ширины пучка, сравнимой с периодом развертки бильiardа, и возможности одновременного вхождения нескольких «опасных» направлений в такой широкий пучок.

Аналогично можно рассмотреть отражение от барьера структурно-сложной частицы с двумя внутренними степенями свободы. Бильiardная идеология остается исключительно полезной как для этого случая, так и для случая большего числа внутренних степеней свободы. Однако этот случай значительно более разнообразный и требует отдельного изложения. Кроме этого такая идеология полезна и при изучении законов столкновения, или рассеяния таких частиц. Можно заметить, что рассмотренные выше закономерности взаимодействия с барьером автоматически переносятся на столкновение двух одинаковых структурно-сложных частиц с симметричными начальными условиями.

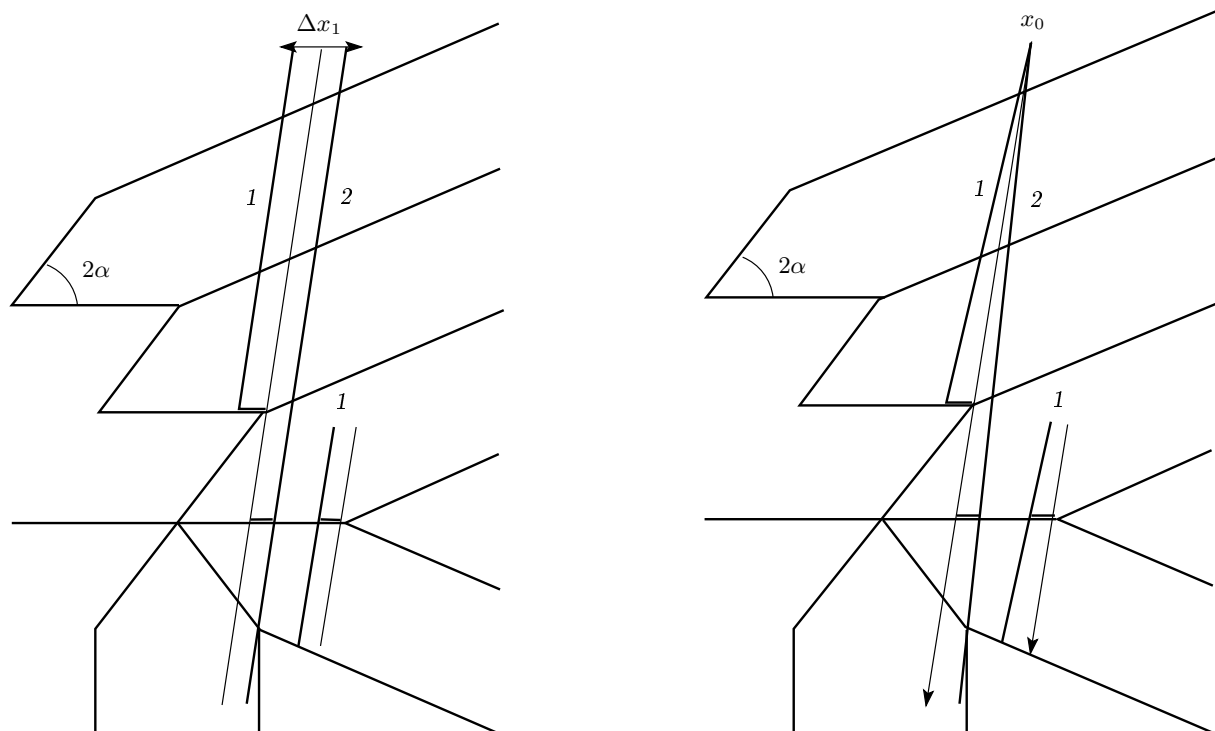


Рис. 11. Показан пучок бильярдных траекторий до и после столкновения с барьером. Слева параллельный пучок с неопределенностью по положению, но с одинаковыми начальными скоростями. Справа неопределенность только в начальных скоростях композитной частицы. Хорошо видны разрывы значений \tilde{l}_1 при малых неопределенностях и изменение числа столкновений оболочки с барьером для разных бильярдных траекторий пучка

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение обсудим некоторые обобщения и дополнительные возможности, не рассмотренные в работе. Прежде всего такую модель сложной частицы легко обобщить на двумерный или трехмерный случай. Тогда оболочка принимает вид массивной сферы, внутри которой движется внутренняя частица или частицы. Переход к бильярдной идеологии осуществим и в этом случае. Однако он приводит к открытым бильярдам в пространстве большой размерности. Естественно, это делает задачу технически значительно более сложной, но бильярдная идеология по-прежнему остается исключительно эффективной. К аналогичному увеличению размерности приводит и увеличение числа внутренних частиц. При этом можно исследовать формирование закона отражения, наблюдаемого для макрочастиц с большим числом внутренних степеней свободы и установить внутренний динамический механизм его появления. Интересно отметить, что рассеяние на барьере это только одно из простых проявлений динамики таких частиц. Подобным образом можно

рассмотреть закономерности столкновения двух разных композитных частиц. Интересным является и изучение поведения таких частиц во внешних полях. При этом возникает несколько вариантов композитных частиц, у которых внешнее поле влияет на одну из составляющих или на обе, например на оболочку или внутреннюю частицу. Такие частицы будут проявлять, вообще говоря, разное динамическое поведение. Некоторые результаты в этом направлении уже получены, но не вошли в данную работу. Бильярдный подход остается эффективным для всех этих процессов.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Получим критерии полного охлаждения композитной частицы при взаимодействии с барьером при N -кратном столкновении. Начнем с простого случая полного охлаждения при однократном столкновении с барьером. Геометрическое построение для этого случая приведено на рис. 12. Из рисунка ясно, что охлаждение при однократном столкновении воз-

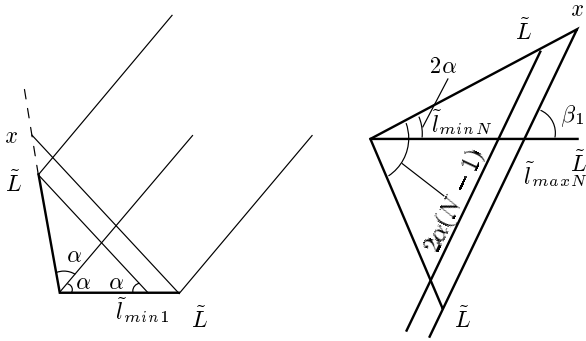


Рис. 12. Показана геометрия полного охлаждения при однократном столкновении с барьером (слева) и при N -кратном столкновении (справа)

можно только при выполнении необходимого условия $x > \tilde{L} \equiv \sqrt{m}L$. Естественно, угол падения $\beta_1 = \pi - \alpha$ таких билиардных траекторий точно задан условием полного охлаждения. Величину отрезка x легко найти из теоремы синусов

$$x = \tilde{L} \frac{\sin \alpha}{\sin 3\alpha}.$$

Тогда необходимое условие $x > \tilde{L}$ принимает вид

$$4 \cos^2 \alpha - 1 > 1$$

и выполняется при

$$\alpha > \pi/4.$$

Это означает, что полное охлаждение при однократном столкновении с барьером может наблюдаться только для композитных частиц с $M/m > 1$. При этом начальное значение \tilde{l}_1 , характеризующее столкновение, должно удовлетворять неравенству

$$\tilde{l}_{min1} < \tilde{l}_1 < \tilde{L}.$$

Величину \tilde{l}_{min1} также легко найти:

$$\tilde{l}_{min1} = \tilde{L} \frac{\sin 3\alpha}{\sin \alpha}.$$

Таким образом, установлены необходимые и достаточные условия полного охлаждения композитной частицы при однократном столкновении с барьером. Перейдем теперь к полному охлаждению при N -кратном столкновении. Естественно $N \leq N_{max}$ (N_{max} — максимально возможное число столкновений с барьером). Из рис. 12 ясна модификация предыдущих соотношений. Так,

$$\beta_1 = \pi - 2\alpha(N - 1) - \alpha$$

— угол падения билиардной траектории при полном охлаждении после N столкновений с барьером. Необходимое условие $x > \tilde{L}$ сохраняется, но оно определяет $\tilde{l}_{maxN} < \tilde{L}$. Значение x теперь другое, но находится аналогично:

$$x = \tilde{L} \frac{\sin \alpha}{\sin(2\alpha N + \alpha)}.$$

Необходимое условие, как и ранее, сводится к ограничению на массы внутренней частицы и оболочки вида

$$\frac{\sin \alpha}{\sin(2\alpha N + \alpha)} > 1.$$

Обратим внимание, что этим условиям удовлетворяет несколько областей (примерно $N/2$) углов α , отделенных друг от друга. Достаточные условия сводятся к

$$\tilde{l}_{minN} < \tilde{l}_1 < \tilde{l}_{maxN}.$$

Значение \tilde{l}_{maxN} легко найти:

$$\tilde{l}_{maxN} = \tilde{L} \frac{\sin \alpha}{\sin(2\alpha(N - 1) + \alpha)} \leq \tilde{L}.$$

При $N = 1$ его значение $\tilde{l}_{maxN} = \tilde{L}$. При этом возникает дополнительное ограничение на углы α вида

$$\frac{\sin \alpha}{\sin(2\alpha(N - 1) + \alpha)} \leq 1.$$

Вычисление \tilde{l}_{minN} также очевидно:

$$\tilde{l}_{minN} = \tilde{L} \frac{\sin(2\alpha N + \alpha)}{\sin(2\alpha N - \alpha)},$$

при $N = 1$ его значение совпадает с ранее полученным для однократного столкновения. Полученные соотношения и описывают критерии полного охлаждения композитной частицы при N -кратном столкновении с барьером.

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Вычислим характеристики, определяющие характер столкновения частицы с барьером. Это зависимость величины l от начальных положений и скоростей оболочки и внутренней частицы.

Для обсуждения отражения и эволюции композитной частицы достаточно изучить поведение луча в билиарде, представляющем ограниченную полосу (рис. 6) и вычислить значение l . Для удобства выберем систему координат, как это показано на рис. 13,

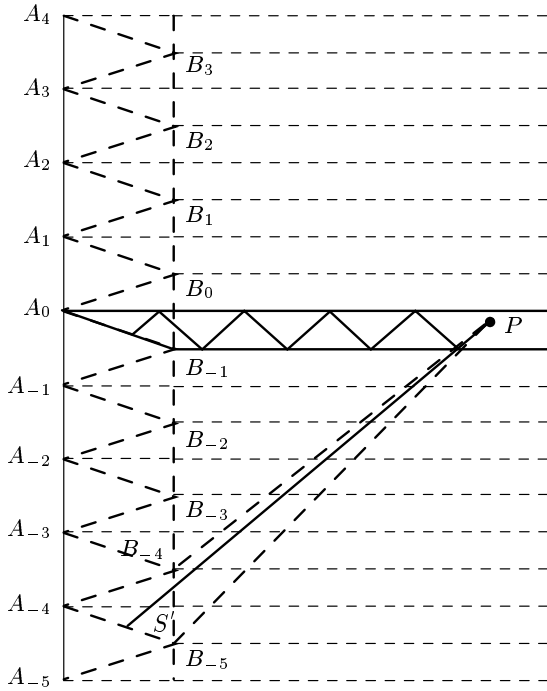


Рис. 13. Сплошной линией показана граница исходного бильярда, штриховыми — бильярд, полученный спрямлением траектории при свободном движении композитной частицы. Показана также ее траектория до первого столкновения с барьером

т. е. повернутой на угол α относительно исходной системы. При этом преобразование координат имеет вид

$$\begin{aligned} x'_1 &\rightarrow x_1\sqrt{m} \cos \alpha + x_2\sqrt{M} \sin \alpha, \\ x'_2 &\rightarrow -x_1\sqrt{m} \sin \alpha + x_2\sqrt{M} \cos \alpha, \\ v_1 &\rightarrow V\sqrt{m} \cos \alpha + U\sqrt{M} \sin \alpha, \\ v_2 &\rightarrow -V\sqrt{m} \sin \alpha + U\sqrt{M} \cos \alpha, \end{aligned}$$

где $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ — вектор скорости в новых координатах. Для простоты далее штрихи будем опускать, что не приведет к особым усложнениям. Пусть начальная точка траектории будет P с координатами x_{01}, x_{02} . Обозначим S' точку падения спрямленной траектории, а вектор скорости движения частицы — \mathbf{v} . Точки A_k соответствуют вершинам «зубьев пилы», а B_k — соответственно точкам впадин между зубьями, целое число k нумерует вершины зубьев (см. рис. 13). Очевидно, что частица должна попасть в одну из граней зубьев пилы, как на рис. 13.

Соединяя точки B_k прямыми линиями с точкой x_0 , соответствующей начальному положению оболочки и внутренней частицы, получим набор углов,

принадлежность к одному из которых определяет, с каким зубом пилы произойдет столкновение. При этом возможны два случая столкновения с верхней или нижней гранью зуба.

Для принадлежности к определенному сектору углов вектор скорости частицы \mathbf{PS}' должен лежать между векторами \mathbf{PB}_k и \mathbf{PB}_{k-1} :

$$PB_k = \begin{pmatrix} L\sqrt{m} \cos \alpha - x_{01} \\ (2k + 1)L\sqrt{m} \sin \alpha - x_{02} \end{pmatrix},$$

$$PB_{k-1} = \begin{pmatrix} L\sqrt{m} \cos \alpha - x_{01} \\ (2k - 1)L\sqrt{m} \sin \alpha - x_{02} \end{pmatrix},$$

$$PS' = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}.$$

После достаточно простых вычислений получаем условие

$$|d + L\sqrt{m}(2kv_1 \sin \alpha - v_2 \cos \alpha)| \leq Lv_1\sqrt{m} \sin \alpha,$$

где $d = v_2x_{01} - v_1x_{02}$. Целое число k фактически нумерует зубья пилы и его легко получить как функцию начальных скоростей и параметров частицы:

$$k = \left\lfloor \frac{1}{2} \left(1 + \frac{v_2}{v_1 \tan \alpha} - \frac{d}{L\sqrt{m}v_1 \sin \alpha} \right) \right\rfloor, \quad (13)$$

где квадратными скобками обозначено извлечение целой части.

После того как определено k , нужно выяснить, на какую из граней зуба пилы — верхнюю или нижнюю упадет частица. Критерием может служить точка пересечения траектории с осью x_2 , — если она лежит ниже A_k , то — нижняя грань «зуба», в противном случае — верхняя. Уравнения границы k -й верхней и нижней граней «зуба» соответственно:

$$x_2 = \pm x_1 \tan \alpha + 2kL\sqrt{m} \sin \alpha.$$

Здесь знак «+» соответствует верхней и «-» нижней граням зуба. Уравнение траектории

$$\frac{x_{01} - x_1}{v_1} = \frac{x_{02} - x_2}{v_2}.$$

Используя эти уравнения, получим координаты точки пересечения траектории с осью x_2 :

$$x_{s1} = \frac{v_2x_{01} - v_1x_{02} + 2v_1kL\sqrt{m} \sin \alpha}{v_2 \cos \alpha \mp v_1 \sin \alpha} \cos \alpha,$$

$$x_{s2} = \pm \frac{v_2 x_{01} - v_1 x_{02} \pm 2v_2 k L \sqrt{m} \cos \alpha}{v_2 \cos \alpha \mp v_1 \sin \alpha} \sin \alpha.$$

Знак выбираем из условия $0 \leq x_1 \leq L\sqrt{m} \cos \alpha$. Далее находим длину отрезка $A_k S'$:

$$l^- = |A_k S'| = \sqrt{x_{s1}^2 + (x_{s2} - 2kL\sqrt{m} \sin \alpha)^2} = \left| \frac{v_2 x_{01} - v_1 x_{02} + 2kLv_1 \sqrt{m} \sin \alpha}{v_1 \sin \alpha + v_2 \cos \alpha} \right|,$$

l^+ легко установить, используя теорему синусов и значение l^- :

$$\frac{l^+}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{l^-}{\sin(\alpha - \beta)},$$

где угол β между направлением скорости и осью x_1 определяется соотношением $\operatorname{tg} \beta = v_2/v_1$. Соотношение для l^+ легко получить в виде

$$l^+ = l^- \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}.$$

Возвращаясь к исходным координатам, получаем

$$l^- = \left| \frac{\sqrt{m}}{U_0} \left(2kL \frac{mV_0 + MU_0}{m + M} + U_0 x_{01} - V_0 x_{02} \right) \right|,$$

$$l^+ = l^- \left| \frac{(m + M) U_0}{m(U_0 - 2V_0) - MU_0} \right|.$$

Таким образом, зависимость l от параметров частицы и начального состояния носит довольно сложный нелинейный характер. Обратим внимание на то, что k также зависит от этих характеристик согласно соотношению (13).

ЛИТЕРАТУРА

1. B. W. Smith, M. Monthieux, and D. E. Luzzi, *Nature* **396**, 323 (1998).
2. M. Monthieux, *Carbon* **40**, 1809 (2002).
3. M. Yudasaka, S. Iijima et al., *Phys. Rev. Lett.* **380**, 42 (2003).
4. В. В. Козлов, Д. В. Трещев, *Биллиарды. Генетическое введение в динамику систем с ударами*, Изд-во МГУ, Москва (1991), с. 168.
5. Я. Г. Синай, *Введение в эргодическую теорию*, ФАЗИС, Москва (1996).
6. Г. А. Гальперин, А. Н. Земляков, *Математические бильярды*, Наука, Москва (1990).
7. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Механика*, Наука, Москва (1988).
8. Г. А. Гальперин, Н. И. Чернов, *Биллиарды и хаос*, Знание, Москва (1991).
9. G. Casati and T. Prosen, E-print archives, chaos-dyn/9908022.
10. E. Gutkin and H. Haydn, *Bull. AMS* **32**, 50 (1995).
11. R. Artuso, G. Casati, and I. Guarneri, *Phys. Rev. E* **55**, 6384 (1997).
12. Я. Г. Синай, *УМН* **33**, 229 (1987).