

ГЕНЕРАЦИЯ ОДИНОЧНОГО АТТОСЕКУНДНОГО ИМПУЛЬСА ПРИ ИОНИЗАЦИИ ВОЗБУЖДЕННЫХ АТОМОВ МОЩНЫМ СВЕРХКОРОТКИМ ЛАЗЕРНЫМ ИМПУЛЬСОМ

М. Ю. Емелин^{ab}, М. Ю. Рябикин^{a}, А. М. Сергеев^a*

^a *Институт прикладной физики Российской академии наук
603950, Нижний Новгород, Россия*

^b *Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского
603950, Нижний Новгород, Россия*

Поступила в редакцию 29 апреля 2007 г.

Развит аналитический подход к описанию процесса генерации одиночного аттосекундного всплеска при надбарьерной ионизации атома водорода мощным лазерным импульсом. Для произвольного начального атомного состояния в предположении полной ионизации атома на одном полупериоде лазерного поля получены аналитические выражения, описывающие эволюцию электронного волнового пакета на промежутке времени между отрывом от атома и столкновением с родительским ионом. Для различных s -состояний получены выражения для профиля аттосекундного всплеска, генерируемого при столкновении электронного пакета с ионом, и исследована зависимость эффективности его генерации от главного квантового числа n начального состояния атома. Проведено сравнение полученных результатов с результатами трехмерных численных расчетов. Показано, что при использовании исходно возбужденных атомных состояний эффективность генерации аттосекундного импульса может быть выше на несколько порядков по сравнению со случаем ионизации из основного состояния.

PACS: 42.65.Re, 42.65.Ky, 32.80.Rm

1. ВВЕДЕНИЕ

Первые экспериментальные данные, свидетельствующие о получении субфемтосекундных импульсов в процессе генерации высоких гармоник оптического излучения в газах [1–3], дали старт бурному развитию физики аттосекундных световых импульсов [4]. Преодоление аттосекундного барьера открывает возможности для осуществления прямых экспериментальных наблюдений [5, 6] процессов, протекающих на временных масштабах, сравнимых с характерным временем движения электронов в атомах

$$t_a = \frac{\hbar^3}{m_e e^4} \approx 24 \text{ ас}$$

(1 ас = 10^{-18} с). Длительности импульсов, полученных в недавних экспериментах, составляют 130–250 ас [2, 7–9], а максимальный коэффициент преобразования излучения в область вакуумного

ультрафиолета (ВУФ) составляет величину порядка 10^{-5} [10, 11]. Актуальными задачами являются исследование путей получения еще более коротких импульсов [12–15] и поиск условий для наиболее эффективной трансформации энергии фемтосекундных лазерных импульсов в ВУФ и мягкое рентгеновское излучение аттосекундного диапазона длительностей [16–18].

В основе эффекта генерации высоких гармоник интенсивного линейно поляризованного оптического излучения лежит синхронизованное лазерным полем излучение электронов, вырываемых из атомов, ускоряемых оптическим полем и соударяющихся вновь с родительскими ионами [19, 20]. Одним из основных путей решения практически важной задачи получения одиночных аттосекундных импульсов является генерация высоких гармоник излучения оптического импульса, содержащего малое число периодов поля [21, 22]. Сильная временная локализация процесса генерации высоких гармоник

*E-mail: mike@ufp.appl.sci-nnov.ru

при этом обусловлена резкой зависимостью скорости ионизации от величины электрического поля лазерного импульса. В силу этого же обстоятельства сверхкороткие всплески излучения гармоник могут быть получены в условиях быстрой ионизации атомов на переднем фронте мощного фемтосекундного лазерного импульса [23]. В случае, если пиковая интенсивность лазерного импульса намного превышает критическое значение, соответствующее возникновению надбарьерной ионизации [24], отрыв электрона может происходить за промежуток времени, существенно меньший по сравнению с периодом поля. Волновой пакет освобожденных электронов движется затем вне атома как единое целое и может, будучи ускоренным в электрическом поле лазерного импульса, возвратиться к родительскому иону и столкнуться с ним, вызвав одиночный всплеск тормозного излучения аттосекундной длительности [23, 25]. Отметим, что рассматриваемый здесь режим генерации аттосекундного излучения в поле высокоинтенсивного лазерного импульса с быстро растущей амплитудой существенно отличается от обычного режима генерации высоких гармоник, когда в течение каждого полупериода возбуждающего поля заселенность исходного связанного атомного состояния уменьшается лишь незначительно. В случае быстрого опустошения исходного связанного состояния генерация гармоник происходит в основном не за счет свободно-связанных переходов, приводящих к хорошо известному платообразному распределению интенсивностей в спектре излучаемых гармоник [19, 20], а за счет свободно-свободных переходов (см., например, [26]). Фундаментальные ограничения на эффективность описанного выше процесса генерации аттосекундных импульсов связаны с расплыванием электронного волнового пакета при свободном движении. Из-за быстрого расплывания электронного волнового пакета генерация гармоник при надбарьерной ионизации атомов, находившихся первоначально в основном состоянии, малоэффективна [27]. Вместе с тем, поскольку скорость расплывания волнового пакета зависит от масштабов его начальной локализации, увеличение эффективности генерации аттосекундного импульса может быть достигнуто не только выбором подходящего профиля оптического поля, но и оптимизацией исходного состояния атомов или молекул [14, 18, 28]. В частности, эффективность этого процесса может быть существенно повышена при использовании исходно возбужденных электронных состояний [14]. Более того, при этом появляется возможность генерации всплесков излучения длительностью порядка 10 ас [14, 29].

Данная работа посвящена подробному рассмотрению процесса генерации одиночного аттосекундного всплеска при надбарьерной ионизации возбужденного атома водорода мощным сверхкоротким лазерным импульсом. В предположении полной ионизации на одном полупериоде лазерного поля получены аналитические выражения, описывающие эволюцию электронного волнового пакета и профиль аттосекундного всплеска при тормозном излучении электронов, возвращающихся к родительским ионам после ионизации атома водорода из произвольного начального состояния. На примере рассмотрения различных s -состояний с помощью развитого аналитического подхода исследована зависимость эффективности генерации всплеска излучения высоких гармоник и его длительности от главного квантового числа n начального состояния атома. Проведено сравнение полученных результатов с результатами трехмерных численных расчетов. Как аналитические, так и численные расчеты показывают, что при использовании исходно возбужденных атомных состояний эффективность рассмотренного процесса может быть повышена на несколько порядков по сравнению со случаем ионизации из основного состояния. Обсуждаются физические ограничения на максимальную эффективность преобразования частот и минимальную длительность генерируемого импульса при использовании исходно возбужденных состояний атома.

2. ГЕНЕРАЦИЯ ОДИНОЧНОГО АТТОСЕКУНДНОГО ВСПЛЕСКА ПРИ БЫСТРОЙ ИОНИЗАЦИИ АТОМА МОЩНЫМ ЛАЗЕРНЫМ ИМПУЛЬСОМ

В быстро нарастающем поле мощного лазерного импульса ионизация происходит на малом отрезке периода $T = 2\pi/\omega_0$, в результате чего образуется компактный волновой пакет свободных электронов, движущийся по траектории классической частицы в суммарном поле лазерного излучения и иона и испытывающий квантовомеханическую диффузию. На рис. 1 в качестве примера представлены результаты трехмерных численных расчетов для атома водорода, ионизируемого из исходного возбужденного $2s$ -состояния оптическим импульсом с линейно поляризованным электрическим полем

$$E(t) = 2 \exp \left[-5 \left(\omega_0 t / 2\pi - 1 \right)^4 \right] \sin \omega_0 t. \quad (1)$$

Здесь и далее используются атомные единицы; частота поля $\omega_0 = 0.114$ соответствует второй

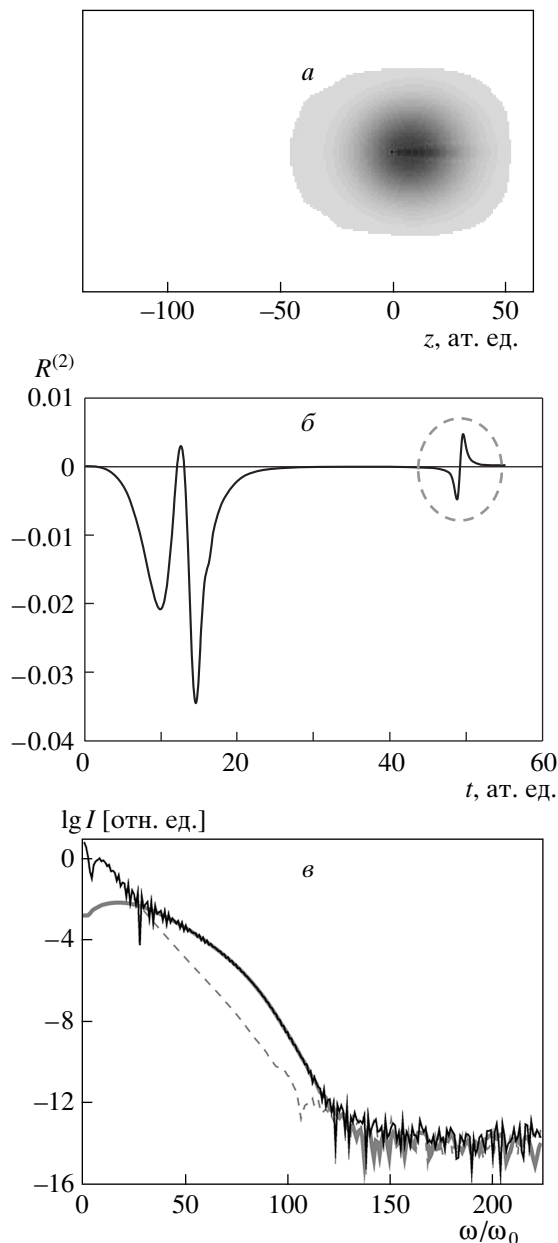


Рис. 1. Результаты трехмерных численных расчетов для атома водорода, ионизируемого из 2s-состояния оптическим импульсом (1): «мгновенный снимок» электронного пакета при столкновении с родительским ионом (а); нелинейный атомный отклик (б) и его спектр (в). Выделенная область на рис. б соответствует возбуждению аттосекундного всплеска. На рис. в, наряду с полным спектром (черная линия), представлены спектры фрагментов отклика, соответствующих движению волнового пакета до (штриховая серая линия) и после (жирная серая линия) точки поворота

гармонике (длина волны 400 нм) излучения титан-сапфирового лазера. Уравнение Шредингера

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{1}{2} \left(\mathbf{p} + \frac{\mathbf{A}}{c} \right)^2 \Psi + V(\mathbf{r}) \Psi,$$

где \mathbf{A} — векторный потенциал электромагнитного поля, V — атомный потенциал, интегрировалось методом операторного расщепления с использованием быстрого преобразования Фурье [30]. Для решения проблемы кулоновской сингулярности дискретная сетка, на которой проводились расчеты, была смещена на 1/2 шага по всем трем координатам относительно кулоновского центра. Интегрирование велось по области, перемещающейся вслед за движением электронного волнового пакета, что позволило осуществлять численные расчеты на гораздо меньшей сетке, чем при интегрировании по всей области локализации пакета на исследуемом промежутке времени.

В поле лазерного импульса (1) ионизация, прохождение точки поворота и повторное взаимодействие электронного волнового пакета с кулоновским центром происходят соответственно в моменты времени $t \approx 0.31T$, $t \approx 0.66T$ и $t \approx 0.90T$. «Мгновенный снимок» электронного пакета при столкновении с родительским ионом показан на рис. 1а. Как видно из рисунка, форма пакета остается почти сферически симметричной, как в исходном состоянии, и лишь в узкой области, соответствующей прохождению электронов наиболее близко к кулоновскому центру, появляются мелкомасштабные сгустки.

На рис. 1б,в приведены временная зависимость нелинейного атомного отклика (обусловленного вкладом атомного потенциала в параллельную электрическому полю компоненту вектора $\ddot{\mathbf{d}}(t) = d^2 \langle \mathbf{r} \rangle / dt^2$ [31]),

$$R(t) = \iiint |\Psi(\mathbf{r}, t)|^2 \frac{\partial V}{\partial z} dx dy dz, \quad (2)$$

и его спектр¹⁾. Отчетливо видна генерация аттосекундного всплеска (выделенная область на рис. 1б) при пролете ускоренного волнового пакета мимо родительского иона. На рис. 1в, кроме полного спектра, представлены также отдельно вычисленные спектры фрагментов атомного отклика, соответствующих движению волнового пакета до и после точки поворота. Приведенные зависимости показывают, что в спектре могут быть выделены три раз-

¹⁾ На рисунках и ниже в тексте $R^{(n)}$ означает поляризационный отклик атома, первоначально находившегося в s-состоянии, характеризуемом главным квантовым числом n ; I — спектральная интенсивность атомного отклика.

личных частотных области, обусловленные излучением различных групп электронов. Низкочастотная часть спектра (приблизительно до 40-й гармоники) возбуждается в основном при отрыве электрона от атома. Центральная часть спектра (интервал гармоник с номерами N от 40 до 120) обусловлена ускорением основной массы электронов при возвратном соударении. Поскольку кинетическая энергия этих электронов, пролетающих в основном на достаточно больших прицельных расстояниях от иона, превышает потенциальную, их движение носит безотражательный характер. Наконец, наиболее жесткое излучение (высокочастотная область, соответствующая гармоникам с номерами $N > 120$) обусловлено очень небольшой группой электронов, пролетающих в близкой окрестности кулоновского центра на малых прицельных расстояниях и поэтому наиболее сильно взаимодействующих с кулоновским потенциалом. Именно эта группа электронов формирует на профиле волнового пакета видные на рис. 1а мелкомасштабные сгустки, обусловленные интерференцией падающей и отраженной компонент волнового пакета. Размеры этих сгустков определяются длиной волны де Бройля, соответствующей скорости пакета. В обычно рассматриваемом случае генерации высоких гармоник в поле достаточно длинного лазерного импульса умеренной интенсивности такого рода интерференционная модуляция электронного волнового пакета становится ярко выраженной вследствие многократного взаимодействия пакета с кулоновским центром [32], что приводит к формированию высокочастотного плато в спектре излучения атома. В этом случае область плато дает существенный вклад в возбуждение аттосекундного излучения. Однако в рассматриваемом нами случае очень короткого интенсивного лазерного импульса интерференционные искажения электронного волнового пакета невелики, и подавляющая часть энергии аттосекундного всплеска сосредоточена не в высокочастотной, а в промежуточной области спектра, определяющий вклад в которую вносит основная масса далеко пролетающих электронов. Это позволяет найти аналитическое решение для формы аттосекундного всплеска, пренебрегая малым вкладом наиболее сильно рассеивающихся электронов в его генерацию.

3. АНАЛИТИЧЕСКИЕ РАСЧЕТЫ

Как уже отмечалось, в режиме надбарьерной ионизации отрыв электрона происходит за малую долю периода оптического поля. В приведенном вы-

ше примере частота поля $\omega_0 = 0.114$ сравнима с собственной частотой $2s$ -состояния, равной 0.125. Это фактически означает, что в поле (1) кулоновский потенциал открывается за время, существенно меньшее периода изменения Ψ -функции исходного атомного состояния. При этом естественно полагать, что электронный волновой пакет оказывается вне атома практически неизменным, и при аналитическом рассмотрении его эволюции под действием оптического поля в качестве начальных условий можно выбрать волновую функцию, соответствующую невозмущенному состоянию электрона в атоме. Аналитическое рассмотрение дальнейшей эволюции волновой функции мы проводим в приближении сильного поля (см., например, [33]), пренебрегая кулоновским потенциалом иона, что может быть оправдано для рассматриваемого нами случая высокоинтенсивного лазерного поля, оказывающего определяющее влияние на динамику электрона в континууме (см. также обсуждение в разд. 4). Будем рассматривать задачу в системе отсчета, связанной с центром масс пакета, двигающегося в соответствии с теоремой Эренфеста по классической траектории электрона (подобный подход в несколько упрощенном варианте применялся в работе [27], где рассмотрение ограничивалось случаем надбарьерной ионизации из основного состояния, волновая функция которого для простоты вычислений аппроксимировалась гауссовой функцией). В этом случае в используемом нами приближении уравнение Шредингера принимает вид

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{1}{2} \Delta \Psi. \quad (3)$$

Начальными условиями в нашей задаче являются волновые функции произвольных стационарных состояний атома водорода [34]:

$$\Psi_{nlm}(r, \theta, \varphi) = X_{nl}(r) Y_{lm}(\theta, \varphi). \quad (4)$$

Здесь n , l и m — соответственно главное, орбитальное и магнитное квантовые числа, $X_{nl}(r)$ — радиальные функции (r — расстояние до центра пакета):

$$X_{nl}(r) = \frac{2}{n^2 (2l+1)!} \sqrt{\frac{(n+l)!}{(n-l-1)!}} \left(\frac{2r}{n}\right)^l \times \exp\left(-\frac{r}{n}\right) F\left(-n+l+1, 2l+2, \frac{2r}{n}\right), \quad (5)$$

где $F(a, b, c)$ — вырожденная гипергеометрическая функция; $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ — сферические функции:

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = (-1)^{(m+|m|)/2} i^l \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}} \times P_l^{|m|}(\cos\theta) e^{im\varphi}, \quad (6)$$

где $P_l^{|m|}(\cos\theta)$ — присоединенные полиномы Лежандра.

Ввиду изотропии задачи угловая часть волновой функции не зависит от времени. Уравнение для радиальной функции имеет вид

$$i \frac{\partial X_{nl}}{\partial t} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 X_{nl}}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial X_{nl}}{\partial r} + \frac{l(l+1)}{2r^2} X_{nl}. \quad (7)$$

3.1. Асимптотическая теория. s -состояния

Рассмотрим задачу о свободной диффузии волнового пакета, изначально соответствующего произвольному s -состоянию атома водорода ($l = 0$, $m = 0$). В этом случае (7) сводится к уравнению

$$i \frac{\partial X_n}{\partial t} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 X_n}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial X_n}{\partial r}, \quad (8)$$

а выражение (5) записывается в виде

$$X_n(r, 0) = \frac{2}{n\sqrt{n}} \exp\left(-\frac{r}{n}\right) F\left(-n+1, 2, \frac{2r}{n}\right). \quad (9)$$

После замены $X_n = \chi/r$ получим диффузионное уравнение с мнимым коэффициентом диффузии:

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} = \frac{i}{2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2}. \quad (10)$$

В силу ограниченности волновой функции $\chi(0, t) = 0$. С помощью метода Фурье нетрудно получить решение уравнения (10) с наложенным граничным условием в интегральном виде (см., например, [35, с. 267]):

$$\chi(r, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi it}} \int_0^\infty \chi(x, 0) \times \left[\exp\left(\frac{i}{2t}(x-r)^2\right) - \exp\left(\frac{i}{2t}(x+r)^2\right) \right] dx \quad (11)$$

или

$$X_n(r, t) = -\frac{2i}{r\sqrt{2\pi it}} \exp\frac{ir^2}{2t} \times \int_0^\infty x X_n(x, 0) \exp\frac{ix^2}{2t} \sin\frac{rx}{t} dx. \quad (12)$$

Рассмотрим поведение электронной плотности в центре волнового пакета в зависимости от времени,

что является удобной характеристикой степени расплывания пакета и дает представление об изменении числа электронов в области, существенной для возбуждения аттосекундного импульса. Из формул (9) и (12) можно получить следующую (см. Приложение А):

$$\Psi_n(0, t) = \frac{\exp(-z)}{\sqrt{\pi^3 n^3}} \sum_{m=0}^{n-1} (-1)^{n-m+1} \binom{2n}{2m+1} \times \left[\frac{\Gamma\left(m+\frac{3}{2}\right) \Gamma\left(n-m-\frac{1}{2}\right)}{n!} F\left(-n, m-n+\frac{3}{2}, z\right) + \Gamma\left(m-n+\frac{1}{2}\right) (-z)^{n-m-1/2} \times F\left(-m-\frac{1}{2}, n-m+\frac{1}{2}, z\right) \right], \quad (13)$$

где $z = -it/2n^2$.

Асимптотический анализ формулы (13) для случаев малых и больших времен дает:

$$|\Psi_n(0, t \rightarrow 0)|^2 \approx \frac{1 - 4t^{1/2}\pi^{-1/2}}{\pi n^3}, \quad (14)$$

$$|\Psi_n(0, t \rightarrow \infty)|^2 \approx \frac{8n^5}{\pi^2 t^3}. \quad (15)$$

Отсюда следует, что, хотя при малых t электронная плотность в центре пакета монотонно убывает с ростом главного квантового числа n , при больших t эта тенденция меняется на противоположную.

Зависимости $|\Psi_n(0, t)|^2$ в широком интервале времен для $n = 1-4$ представлены на рис. 2. Видно, что уже на временах, значительно меньших периода оптического поля (например, при $t \geq 12$ для $n = 2$ и $t \geq 20$ для $n = 3$), электронная плотность в центре волнового пакета для исходно невозбужденного состояния становится меньше, чем для возбужденных состояний. Это обусловлено более сильной локализацией основного состояния электронов в атоме и, следовательно, более быстрым расплыванием волнового пакета при движении вне атома. Из полученных зависимостей следует, что для каждого заданного значения частоты лазерного импульса существует оптимальное возбужденное состояние атома n^* , ионизация из которого обеспечивает максимальную плотность электронов, участвующих в генерации тормозного излучения при возврате к иону. Как следует из рис. 2, при ионизации атома водорода

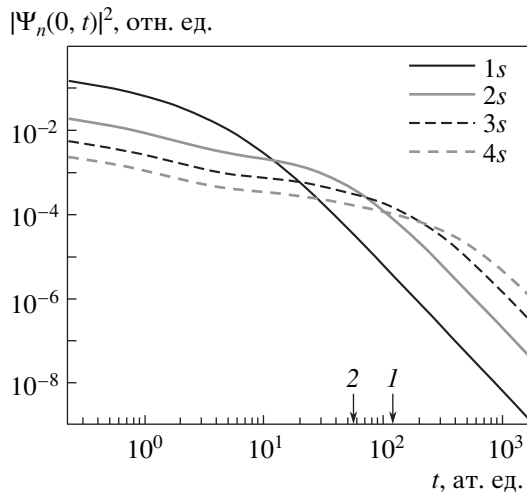


Рис. 2. Зависимости электронной плотности в центре волнового пакета от времени для начальных s -состояний с $n = 1-4$. Стрелками указаны значения t , соответствующие периоду поля (1) основной частоты ($\lambda = 800$ нм) и (2) второй гармоники ($\lambda = 400$ нм) излучения титан-сапфирового лазера

излучением на основной частоте титан-сапфирового лазера данному условию удовлетворяет $n^* = 3$, а для второй гармоники — $n^* = 2$.

Поскольку вклад в тормозное излучение дают электроны, пролетающие на различных расстояниях от кулоновского центра, для нахождения формы и амплитуды аттосекундного импульса необходимо знать полное пространственное распределение $|\Psi_n(r, t)|^2$ в интервале времен, соответствующем возвратному соударению. В используемом нами приближении эту задачу удастся решить аналитически для произвольного начального связанного состояния $|nlm\rangle$ атома водорода и для любого момента времени t (см. п. 3.2). Для интересующих нас здесь нескольких низших s -состояний можно провести упрощенный предварительный анализ, ограничившись асимптотическим представлением для больших t , когда в результате расплывания электронный волновой пакет к моменту соударения имеет пространственный размер, существенно больший исходного. В этом случае в формуле (12) при $t \gg n^2$ можно положить $\exp(ix^2/2t) \approx 1$, что с формальной точки зрения аналогично приближению Фраунгофера в задаче о дифракции волновых пучков в свободном пространстве. При этом интеграл в выражении (12) становится табличным (см., например, [34, с. 761]). После несложных преобразований получим

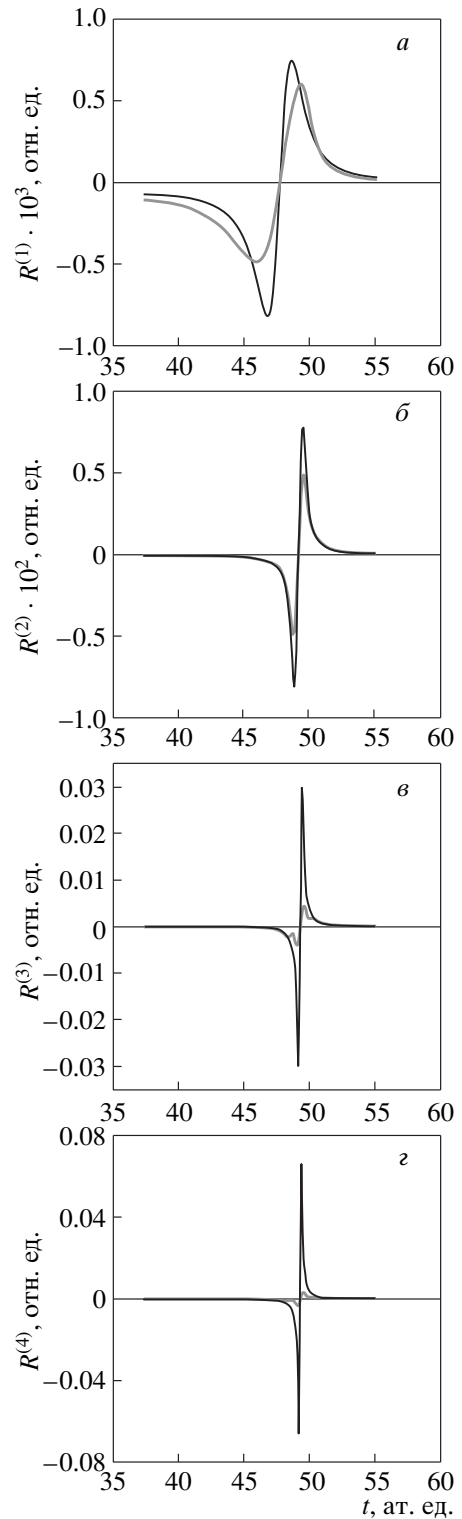


Рис. 3. Профили аттосекундного всплеска, полученные из асимптотической теории (черная линия) и численных расчетов (серая линия) для начальных s -состояний с $n = 1$ (а), 2 (б), 3 (в), 4 (г)

$$|\Psi_n(r, t \rightarrow \infty)|^2 = \frac{2n^3}{\pi^2 t^3 (1 + \rho^2)^{2n+2}} \times \left[\sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1} (-\rho^2)^k \right]^2, \quad (16)$$

где $\rho = nr/t$, а $\binom{i}{j} = i!/j!(i-j)!$ — биномиальные коэффициенты. Это асимптотическое выражение для волновой функции в координатном пространстве совпадает с точностью до замены r/t на волновое число с исходной волновой функцией в импульсном пространстве.

Для низших s -состояний плотность вероятности локализована в основном в центральной части волнового пакета $|\Psi_n(r, t)|^2$. Характерный размер пакета $a_n(t)$ (полная ширина по полувысоте) при больших t возрастает пропорционально времени с момента ионизации. Из выражения (16) получаем

$$a_1(t) = 2t\sqrt{2^{1/4} - 1} \approx 0.87t, \quad a_2(t) \approx 0.297t, \\ a_3(t) \approx 0.144t, \quad a_4(t) \approx 0.0833t.$$

Таким образом, скорость расплывания волнового пакета уменьшается с ростом n , что согласуется с рис. 2.

В рамках используемых в данном разделе приближений удастся аналитически вычислить дипольный отклик системы в процессе возвратного столкновения пакета с кулоновским центром. Соотношение (2) удастся полностью проинтегрировать при подстановке в него асимптотического выражения (16) для волнового пакета свободных электронов, т. е. в предположении слабого взаимодействия электронов с ионом. Это предположение разумно, когда кинетическая энергия большинства ускоренных лазерным полем электронов при рассеянии много больше как величины потенциальной энергии, так и энергии тормозного излучения. Очевидно, что этим предположением мы исключаем из рассмотрения сильно взаимодействующие с центром электроны, дающие плато в спектре тормозного излучения. Вычисляя интеграл (2) в сферической системе координат, получаем следующее выражение для источника искомого аттосекундного всплеска при заданном начальном s -состоянии атома, определяемом главным квантовым числом n :

$$R^{(n)}(t) = \frac{2}{\pi z^2(t)} \times \left[\arctg \lambda + \frac{\lambda K_n(\lambda)}{n(4n^2 - 1)(1 + \lambda^2)^{2n+1}} \right]. \quad (17)$$

Здесь $\lambda = nz(t)/t$; $z(t)$ — зависящее от времени расстояние между ядром и центром электронного волнового пакета, которое определяется траекторией классического движения электрона в лазерном поле $E(t)$; $K_n(\lambda)$ — конечные полиномы степени $4n$, которые могут быть найдены аналитически при любом n . Ниже выписаны явные выражения для первых четырех из них:

$$K_1(\lambda) = 3\lambda^4 + 8\lambda^2 - 3, \\ K_2(\lambda) = 30\lambda^8 + 140\lambda^6 - 128\lambda^4 + 500\lambda^2 - 30, \\ K_3(\lambda) = 105\lambda^{12} + 700\lambda^{10} - 1043\lambda^8 + \\ + 13584\lambda^6 - 11053\lambda^4 + 4340\lambda^2 - 105, \quad (18) \\ K_4(\lambda) = 252\lambda^{16} + 2184\lambda^{14} - 4536\lambda^{12} + \\ + 123624\lambda^{10} - 296960\lambda^8 + \\ + 343692\lambda^6 - 124488\lambda^4 + 19320\lambda^2 - 252.$$

Профили аттосекундных импульсов для основного и первых трех возбужденных s -состояний, вычисленные по формулам (17), (18), приведены на рис. 3. При вычислениях использовалась зависимость $z(t)$, соответствующая движению электронного волнового пакета после момента поворота под действием лазерного поля (в пренебрежении влиянием кулоновского потенциала), с координатой точки поворота и соответствующим моментом времени, взятыми из численных расчетов. Видно, что с увеличением главного квантового числа начального состояния энергия тормозного излучения возрастает. Кроме того, поскольку с увеличением n возвращающийся к иону волновой пакет имеет меньшую протяженность, при соударении с ядром он возбуждает более высокочастотные спектральные составляющие излучения. Длительность всплеска в нашей задаче определяется, очевидно, длительностью пролета центрального сгустка волнового пакета вблизи кулоновского центра: $\tau_n \approx a_n(t^*)/\dot{z}(t^*)$, где t^* — интервал времени между событиями ионизации и соударения, рассчитываемый для классической траектории. Для используемого в работе профиля лазерного поля (1) имеем $\tau_1 \approx 75$ ас, $\tau_2 \approx 25$ ас, $\tau_3 \approx 12$ ас, $\tau_4 \approx 7.2$ ас.

Для сравнения на рис. 3 также приведены результаты трехмерных численных расчетов. Отметим, что, находясь в качественном согласии с асимптотической теорией, численные расчеты также демонстрируют уменьшение длительности аттосекундного всплеска с ростом степени начального возбуждения атома. Наилучшее количественное согласие наблюдается для случая $n = 2$. Для $n = 1$ длительность процесса ионизации оказывается недостаточно малой по сравнению с собственным периодом

функции основного состояния в атоме, в результате чего освободившийся из атома волновой пакет имеет асферическую форму, вытянутую вдоль вектора электрического поля лазерного импульса, что оказывает влияние на профиль аттосекундного всплеска и определяет расхождения между аналитическими и численными результатами для $n = 1$. Для высоких s -состояний волновой пакет к моменту столкновения с родительским ядром не успевает окончательно выйти на стадию асимптотического распыливания, описываемую формулой (16). Применяя ее, мы несколько уменьшаем пространственный размер пакета по сравнению с реальным, в результате чего завышаем эффективность генерации аттосекундного всплеска (рис. 3*в,з*). Для достижения лучшего количественного согласия аналитических расчетов с численными необходим выход за рамки асимптотического приближения, использованного в п. 3.1. Эта задача рассматривается ниже.

3.2. Полная теория. Произвольные состояния

Вернемся к уравнению (7) и будем искать его решение для произвольных l . Для этого найдем функцию Грина данного уравнения, используя радиальные функции стационарных состояний непрерывного спектра с заданными значениями энергии E и момента l , которые, будучи нормированы по шкале энергии E , выглядят следующим образом ([34], с. 138–139):

$$X_{El}(r, t) = \frac{1}{\sqrt{r}} J_{l+1/2}(\sqrt{2E}r) e^{-iEt}, \quad (19)$$

где $J_\nu(\rho)$ — функция Бесселя первого рода.

Разложим начальные условия в виде $X(r, 0) = \delta(r - x)$ по собственным функциям (19):

$$\begin{aligned} C_{El}(x) &= \int_0^\infty \delta(r - x) X_{El}(r, 0) r^2 dr = \\ &= x^{3/2} J_{l+1/2}(\sqrt{2E}x), \end{aligned} \quad (20)$$

и получим решение в произвольный момент времени, что дает искомую функцию Грина в интегральном виде:

$$\begin{aligned} G &= \int_0^\infty C_{El}(x) X_{El}(r, t) dE = \frac{x^{3/2}}{\sqrt{r}} \times \\ &\times \int_0^\infty J_{l+1/2}(\sqrt{2E}x) J_{l+1/2}(\sqrt{2E}r) e^{-iEt} dE. \end{aligned} \quad (21)$$

После замены $E = k^2/2$ данный интеграл сводится к табличному ([36], 2.12.39.3). В результате получим

$$G = \frac{x^{3/2}}{i^{l+3/2} t \sqrt{r}} \exp\left(i \frac{x^2 + r^2}{2t}\right) J_{l+1/2}\left(\frac{rx}{t}\right). \quad (22)$$

Теперь решение уравнения (7) может быть записано в следующем интегральном виде:

$$X_{nl}(r, t) = \int_0^\infty X_{nl}(x, 0) G dx, \quad (23)$$

где $X_{nl}(r, 0)$ — функции, задаваемые выражением (5).

Входящая в (5) гипергеометрическая функция имеет вид конечной суммы:

$$\begin{aligned} F\left(-n+l+1, 2l+2, \frac{2r}{n}\right) &= \\ &= \sum_{k=0}^{n-l-1} \frac{(-1)^k (n-l-1)! (2l+1)!}{(n-l-1-k)! (2l+1+k)! k!} \left(\frac{2r}{n}\right)^k, \end{aligned} \quad (24)$$

поэтому выражение (23) может быть представлено следующим образом:

$$\begin{aligned} X_{nl}(r, t) &= \frac{(-1)^{l+3/2}}{\sqrt{r}} \times \\ &\times \exp\left(i \frac{r^2}{2t}\right) \sum_{k=0}^{n-l-1} A_{nlk} I_{nlk}(r, t), \end{aligned} \quad (25)$$

где

$$A_{nlk} = \frac{(-1)^k \sqrt{(n+1)!(n-l-1)!}}{n^2 (n-l-1-k)! (2l+1+k)! k!} \left(\frac{2}{n}\right)^{l+k}, \quad (26)$$

а интегралы $I_{nlk}(r, t)$ равны

$$\begin{aligned} I_{nlk}(r, t) &= \frac{2}{t} \int_0^\infty x^{l+k+3/2} \exp\left(-\frac{x}{n}\right) \times \\ &\times \exp\left(i \frac{x^2}{2t}\right) J_{l+1/2}\left(\frac{rx}{t}\right) dx. \end{aligned} \quad (27)$$

Процедура вычисления интегралов (27) подробно изложена в Приложении В. Результат вычисления можно записать в общем виде:

$$I_{nlk}(r, t) = \sqrt{\frac{2t}{\pi r}} \sum_{s=0}^l \beta_{ls} \left(\frac{t}{r}\right)^{l-s} (-i)^s (2it)^{(k+s)/2} \times \\ \times \left\{ \Gamma\left(\frac{k+s+2}{2}\right) \left[F\left(\frac{k+s+2}{2}, \frac{1}{2}, z_2^2\right) - \right. \right. \\ \left. \left. - (-1)^s F\left(\frac{k+s+2}{2}, \frac{1}{2}, z_1^2\right) \right] - \right. \\ \left. - 2\Gamma\left(\frac{k+s+3}{2}\right) \left[z_2 F\left(\frac{k+s+3}{2}, \frac{3}{2}, z_2^2\right) - \right. \right. \\ \left. \left. - (-1)^s z_1 F\left(\frac{k+s+3}{2}, \frac{3}{2}, z_1^2\right) \right] \right\}, \quad (28)$$

где

$$z_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2it}} \left(\mp r + \frac{it}{n} \right),$$

а β_{ls} — коэффициенты в представлении функции Бесселя через элементарные функции:

$$J_{l+1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{s=0}^l \beta_{ls} \left(\frac{1}{x}\right)^{l-s} \text{Im} [(-i)^s e^{ix}]. \quad (29)$$

В результате получаем окончательный вид решения для волновой функции:

$$\Psi_{nlm}(r, \theta, \varphi, t) = Y_{lm}(\theta, \varphi) \frac{(-i)^{l+3/2}}{\sqrt{r}} \times \\ \times \exp\left(i\frac{r^2}{2t}\right) \sum_{k=0}^{n-l-1} A_{nlk} I_{nlk}(r, t), \quad (30)$$

где коэффициенты A_{nlk} и функции $I_{nlk}(r, t)$ задаются соответственно выражениями (26) и (28).

Полученные формулы описывают без каких-либо приближений свободную диффузию электронного волнового пакета, соответствующего в начальный момент времени произвольному стационарному состоянию электрона в атоме водорода. При сделанных предположениях о слабом влиянии кулоновского потенциала на форму волновой функции при ионизации и на ее дальнейшую эволюцию в рассматриваемом режиме полученное решение позволяет, зная закон движения центра масс пакета, найти поляризационный отклик системы в электродипольном приближении в процессе возвратного столкновения пакета с кулоновским центром.

Сравним результаты, даваемые развитой выше теорией, с численными расчетами, для чего снова ограничимся рассмотрением простейшего случая ионизации атома из произвольного s -состояния. В этом случае выражения (28) и (30) существенно упрощаются:

$$\Psi_{n00}(r, \theta, \varphi, t) = \Psi_n(r, t) = \frac{1}{2\pi r} \times \\ \times \exp\left(i\frac{r^2}{2t}\right) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1} \sqrt{n!(n-1)!}}{n^2(n-1-k)!(k+1)!k!} \times \\ \times \left(\frac{2}{n}\right)^k (2it)^{(k+1)/2} \times \\ \times \left\{ \Gamma\left(\frac{k+2}{2}\right) \left[F\left(\frac{k+2}{2}, \frac{1}{2}, z_2^2\right) - F\left(\frac{k+2}{2}, \frac{1}{2}, z_1^2\right) \right] - \right. \\ \left. - 2\Gamma\left(\frac{k+3}{2}\right) \left[z_2 F\left(\frac{k+3}{2}, \frac{3}{2}, z_2^2\right) - \right. \right. \\ \left. \left. - z_1 F\left(\frac{k+3}{2}, \frac{3}{2}, z_1^2\right) \right] \right\}. \quad (31)$$

Далее вычислим поляризационный отклик на отрезке времени, соответствующем возбуждению аттосекундного импульса. Запишем выражение (2) в сферической системе координат:

$$R^{(n)}(t) = \int_0^\infty |\Psi_n(r, t)|^2 2\pi r^2 dr \times \\ \times \int_0^\pi \frac{r \cos \theta - z(t)}{[r^2 + z^2(t) - 2z(t)r \cos \theta]^{3/2}} \sin \theta d\theta. \quad (32)$$

Здесь, как и в формуле (17), $z(t)$ — мгновенное расстояние между центром электронного волнового пакета и ядром.

После замены

$$r^2 + z^2(t) - 2z(t)r \cos \theta = \eta$$

внутренний интеграл в (32) легко вычисляется:

$$\frac{1}{4rz^2(t)} \int_{[z(t)-r]^2}^{[z(t)+r]^2} \frac{\eta + z^2(t) - r^2}{\eta^{3/2}} d\eta = \\ = \begin{cases} \frac{2}{z(t)|z(t)|}, & r < |z(t)|, \\ 0, & r > |z(t)|. \end{cases} \quad (33)$$

С учетом (33) выражение для $R_n(t)$ переписывается в следующем виде:

$$R_n(t) = \frac{1}{z(t)|z(t)|} \int_0^{|z(t)|} |\Psi_n(r, t)|^2 4\pi r^2 dr. \quad (34)$$

Данное выражение имеет простой физический смысл: поляризационный отклик системы равен силе, действующей со стороны иона на заряд, заключенный внутри сферы, центр которой совпадает с

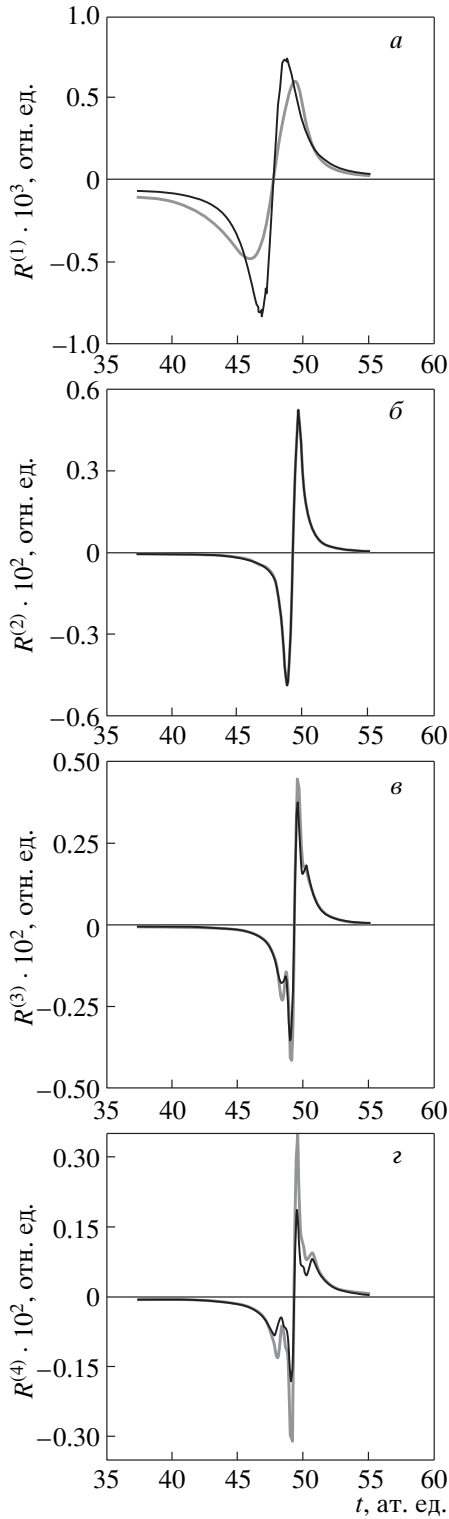


Рис. 4. Профили аттосекундного всплеска, полученные из аналитических (черная линия) и численных (серая линия) расчетов для начальных s -состояний с $n = 1$ (а), 2 (б), 3 (в), 4 (г)

центром электронного волнового пакета, а радиус равен расстоянию от центра пакета до иона.

Интеграл (34) с функцией $\Psi_n(r, t)$, задаваемой выражением (31), вычислить аналитически не удается, поэтому интегрирование проводилось численно. Результаты этих вычислений для четырех низших s -состояний представлены на рис. 4. Там же для сравнения приведены отклики, полученные из трехмерных численных расчетов.

4. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Из сравнения рис. 3 и 4 нетрудно заметить, что для $1s$ -состояния результаты аналитических расчетов в рамках асимптотической (рис. 3а) и полной теории (рис. 4а) практически совпадают, поскольку для наиболее низких s -состояний волновой пакет к моменту столкновения с родительским ядром окончательно выходит на стадию асимптотического расплывания (см. рис. 2). В обоих случаях отличия от результатов численных расчетов объясняются искажением волновой функции, соответствующей основному состоянию, в процессе ионизации атома. Уже начиная с $2s$ -состояния такого рода искажения при данном профиле ионизирующего импульса становятся пренебрежимо малыми, что отражается в практически идеальном совпадении результатов полной теории и численных расчетов для начального $2s$ -состояния. Расхождения между аналитическими и численными результатами при $n \geq 3$ (см. рис. 4в,г) связаны с возрастающим с увеличением главного квантового числа n влиянием кулоновского потенциала на эволюцию электронного волнового пакета после ионизации атома. Действительно, в изложенной выше аналитической теории электронная эволюция на этой стадии считалась свободной, на самом деле кулоновский центр играет фокусирующую роль, уменьшая тем самым скорость диффузии электронного пакета. Очевидно, что влияние кулоновской фокусировки больше для волнового пакета, имеющего к моменту приближения к ядру меньшие поперечные размеры, что в рассмотренных примерах соответствует ионизации из состояний с большими значениями n .

Сравнивая результаты расчетов, представленные на рис. 3, 4, отметим также, что приведенные на рис. 4в,г профили аттосекундных всплесков имеют тонкую структуру, обусловленную наличием дополнительных максимумов в радиальных распределениях вероятностей для s -состояний. В процессе эволюции вне атома эти максимумы уменьшаются

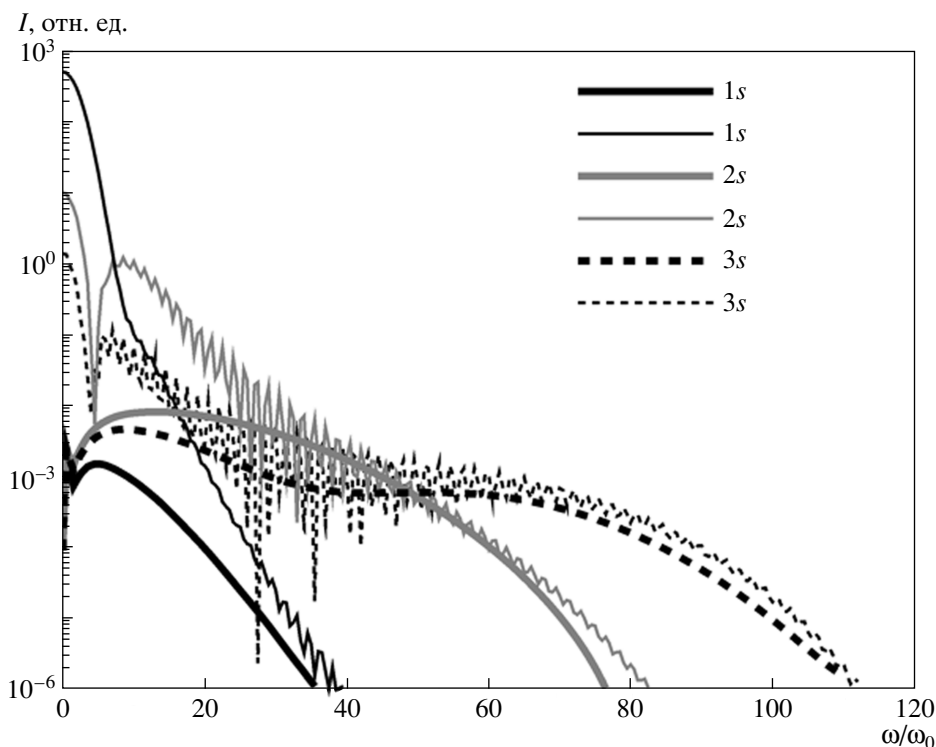


Рис. 5. Спектры аттосекундного всплеска (аналитическая теория, жирные линии) и полного отклика (численные расчеты, тонкие линии) для атома водорода, ионизируемого оптическим импульсом (1) из s -состояний с $n = 1-3$

по амплитуде по сравнению с центральной частью пакета. Вследствие этого в аттосекундных всплесках, рассчитанных с помощью асимптотической теории, тонкая структура вообще практически отсутствует, в то время как полная теория качественно согласуется с точными численными расчетами и в этих тонких деталях. Подчеркнем, что, согласно расчетам во всех трех подходах, центральная наиболее интенсивная часть аттосекундного отклика существенно укорачивается с ростом главного квантового числа начального состояния атома. Это приводит к увеличению ширины спектра испускаемого излучения — см. рис. 5, где приведены результаты аналитических и численных расчетов для трех низших начальных s -состояний. Отметим, что в области частот, где определяющий вклад в излучение обусловлен возвращающимися к ядру электронами, спектральная интенсивность излучения для возбужденных начальных состояний более чем на четыре порядка превышает соответствующее значение для случая ионизации из основного состояния.

Обсудим далее физические ограничения на эффективность генерации аттосекундных импульсов и их длительность при использовании исходно воз-

бужденных атомных состояний. Одно из основных ограничений связано с качественной перестройкой структуры атомных волновых функций при переходе от низколежащих к высоковозбужденным состояниям. В рассмотренном примере водородных s -состояний с увеличением главного квантового числа n вероятность локализации электронов вблизи ядра уменьшается и, соответственно, возрастает доля электронов, локализованных в периферийных структурах. В связи с этим в аттосекундном отклике системы доля высокочастотной составляющей, обусловленной центральной группой электронов, при больших n снижается, а возрастание роли периферийных электронов приводит к общему увеличению длительности всплеска. Эта тенденция видна уже из рис. 4б-г, где приведены результаты для $n = 2-4$, и, очевидно, должна усиливаться с дальнейшим ростом n . Отметим также, что увеличение с ростом n значения радиуса, соответствующего максимуму распределения электронной плотности в периферийной части, приводит к уменьшению доли электронов, имеющих малый прицельный параметр при столкновении с ядром, что в конечном итоге должно приводить к общему снижению эффективности

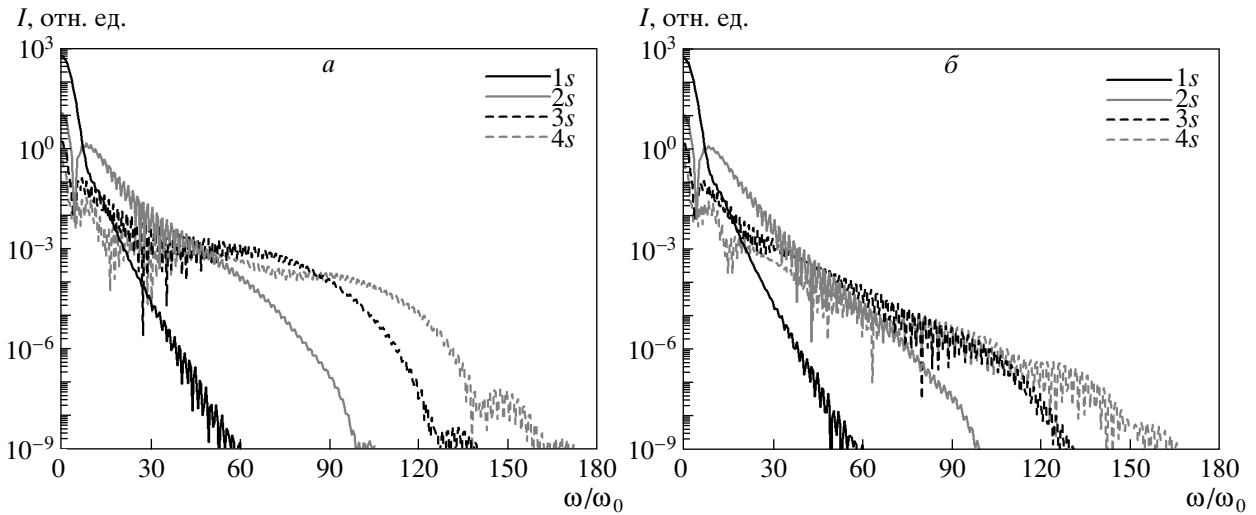


Рис. 6. Спектры нелинейного атомного отклика, вычисленные в электродипольном приближении (а) и за его рамками (б) для различных значений главного квантового числа начального s -состояния

генерации тормозного излучения при больших n .

Другим фактором, ограничивающим возможности рассматриваемого в данной работе механизма генерации аттосекундных импульсов, является влияние магнитного поля лазерного излучения [25]. Действительно, при заданных начальных условиях и фиксированном профиле лазерного импульса длительность генерируемого аттосекундного всплеска может быть в принципе уменьшена за счет увеличения интенсивности лазерного поля, приводящего к увеличению скорости электронного волнового пакета. Однако при этом возрастает сила Лоренца со стороны магнитного поля волны, отклоняющая траекторию пакета от прямолинейной. Степень влияния этого фактора зависит от поперечных размеров электронного пакета при его прохождении вблизи родительского иона и в рассматриваемой задаче возрастает с ростом главного квантового числа начального атомного состояния из-за уменьшения пространственных размеров электронного сгустка в центральной части пакета. Для иллюстрации на рис. 6 приведены спектры поляризационного отклика, вычисленные в электродипольном приближении и за его рамками [25] для различных значений главного квантового числа начального атомного состояния. Из рис. 6 видно, что в спектральном интервале, соответствующем генерации аттосекундного всплеска при возвратном соударении, происходит усиливающееся с ростом n подавление высокочастотных компонент излучения за счет влияния магнитного поля лазерной волны. При $n = 4$ поперечное смещение

волнового пакета за время от момента ионизации до возврата к родительскому иону в поле (1) превышает величину радиуса центральной области пакета, что приводит к уменьшению в несколько десятков раз эффективности генерации высокочастотного излучения (отметим однако, что, согласно проведенным расчетам, уже при уменьшении амплитуды импульса (1) в 2 раза влияние силы Лоренца оказывается пренебрежимо малым для начальных состояний с $n \leq 3$).

Ограничения, связанные с влиянием магнитной составляющей силы Лоренца, могут быть в принципе преодолены при использовании в качестве рабочей среды возбужденных молекул [37]. Для примера на рис. 7 представлен «мгновенный снимок» электронного пакета, возвращающегося к родительскому остову после ионизации молекулярного иона H_2^+ лазерным импульсом (1). Ион H_2^+ изначально приготовлен в состоянии, при больших значениях межъядерного расстояния D переходящем в симметричную комбинацию атомных $2s$ -состояний, и ориентирован вдоль направления распространения лазерного импульса. Рисунки 7а и 7б получены соответственно без учета и с учетом магнитного поля волны. При выбранной ориентации молекулярного иона направление дрейфа электронного волнового пакета за счет магнитной составляющей силы Лоренца (рис. 7б) параллельно молекулярной оси. При межъядерном расстоянии, равном $D = 20$, величина этого дрейфа в поле лазерного импульса (1) близка к $D/2$, что соответствует точному «нацеливанию»

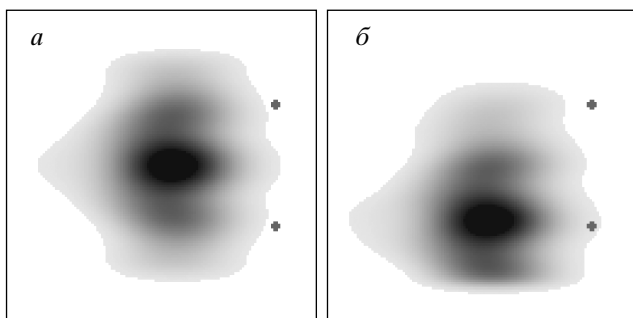


Рис. 7. Распределения вероятностей перед столкновением с родительским ионом в случае ионизации H_2^+ в поле лазерного импульса (1). Ион H_2^+ приготовлен в состоянии, при больших D переходящем в симметричную комбинацию атомных $2s$ -состояний. Межъядерное расстояние $D = 20$. Молекулярная ось параллельна направлению распространения лазерного импульса. Рисунки получены без учета (*a*) и с учетом (*б*) магнитного поля лазерного излучения

электронного пакета на одно из ядер. Результаты расчетов нелинейного отклика приведены на рис. 8. Как следствие компенсации индуцируемого магнитным полем дрейфа электронного волнового пакета, временные профили аттосекундного всплеска в поляризованном отклике H_2^+ , вычисленные в электродипольном приближении и за его рамками, почти не различаются. Полученные временные профили молекулярного отклика, в свою очередь, очень близки к профилю аттосекундного всплеска, полученному в электродипольном приближении для нейтрального атома водорода в $2s$ -состоянии (рис. 4б). Сравнение с соответствующим атомарным откликом, вычисленным без учета магнитного поля лазерного излучения (рис. 8, штриховая кривая), показывает, что оптимизация электронного и колебательного возбуждения и выстраивания молекул дает дополнительные к продемонстрированным ранее [14, 18, 28] возможности для управления процессом генерации аттосекундных импульсов. Эти возможности могут быть реализованы, в частности, с помощью возбуждения молекулярных вращательных и колебательных волновых пакетов.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе развитого в данной работе аналитического подхода и с помощью трехмерных численных

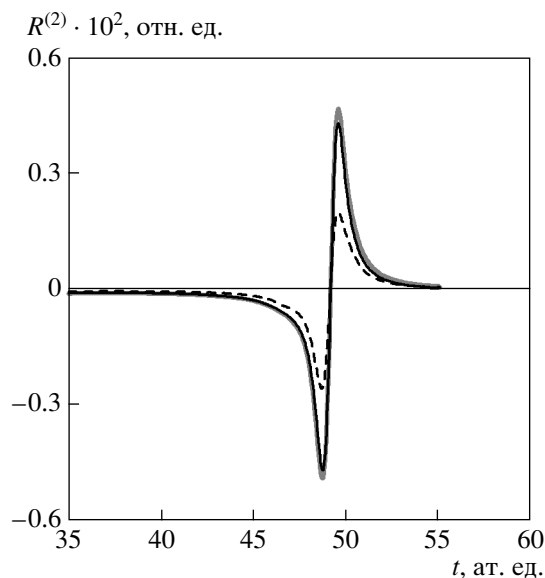


Рис. 8. Временной профиль аттосекундного всплеска в нелинейном отклике H_2^+ , вычисленном в электродипольном приближении (серая линия) и за его рамками (черная линия); штриховая линия — отклик атома водорода в $2s$ -состоянии, вычисленный за рамками электродипольного приближения

расчетов нами показана возможность высокоэффективной генерации одиночного аттосекундного импульса в режиме надбарьерной ионизации атома мощным сверхкоротким лазерным импульсом в случае использования исходно возбужденных атомных состояний. Основными источниками физических ограничений на максимальную эффективность преобразования частот и минимальную длительность генерируемого импульса в рассмотренных условиях являются увеличение влияния магнитного поля световой волны и возрастание роли периферийной части электронного волнового пакета с ростом главного квантового числа начального атомного состояния. Продемонстрированы новые возможности использования «инжиниринга» молекулярных волновых пакетов для управления процессом генерации аттосекундных импульсов.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (грант № 05-02-17523) и Президентской программы поддержки ведущих научных школ РФ (грант № 7738.2006.2). Один из авторов (М. Ю. Е.) также благодарит за финансовую поддержку Фонд некоммерческих программ «Династия».

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Расчет эволюции электронной плотности в центре волнового пакета

Перепишем решение (12) в виде

$$X_n(r, t) = \frac{1}{r\sqrt{2\pi it}} \exp \frac{ir^2}{2t} \int_0^\infty x X_n(x, 0) \times \left[\exp \left(\frac{ix^2}{2t} - \frac{irx}{t} \right) - \exp \left(\frac{ix^2}{2t} + \frac{irx}{t} \right) \right] dx. \quad (A.1)$$

Выражение в квадратных скобках представим в виде интеграла Фурье:

$$\exp \left(\frac{ix^2}{2t} - \frac{irx}{t} \right) - \exp \left(\frac{ix^2}{2t} + \frac{irx}{t} \right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty S(k) \exp(-ikx) dk,$$

где

$$S(k) = \sqrt{2\pi it} \times \left\{ \exp \left[-\frac{it}{2} \left(k - \frac{r}{t} \right)^2 \right] - \exp \left[-\frac{it}{2} \left(k + \frac{r}{t} \right)^2 \right] \right\},$$

и поменяем в (A.1) порядок интегрирования:

$$X_n(r, t) = \frac{1}{2\pi r} \int_{-\infty}^\infty \exp \left(-\frac{it}{2} k^2 \right) \times [\exp(ikr) - \exp(-ikr)] dk \times \int_0^\infty x X_n(x, 0) \exp(-ikx) dx. \quad (A.2)$$

Внутренний интеграл в (A.2) является табличным (см., например, [34], с. 761). После его вычисления получим

$$\Psi_n(r, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} X_n(r, t) = -\frac{i}{\sqrt{\pi^3 n^3}} \times \int_{-\infty}^\infty \exp \left(-\frac{it}{2} k^2 \right) \frac{(k + i/n)^{n-1}}{(k - i/n)^{n+1}} \frac{\sin(kr)}{kr} k dk. \quad (A.3)$$

При $r = 0$ имеем

$$\Psi_n(0, t) = -\frac{i}{\sqrt{\pi^3 n^3}} \times \int_{-\infty}^\infty \exp \left(-\frac{it}{2} k^2 \right) \frac{(k + i/n)^{n-1}}{(k - i/n)^{n+1}} k dk. \quad (A.4)$$

Преобразуем числитель подынтегральной дроби по формуле бинома Ньютона и учтем, что в интеграл дают вклад только слагаемые с четными k , тогда

$$\Psi_n(0, t) = -\frac{i}{\sqrt{\pi^3 n^3}} \times \sum_{m=0}^{n-1} \binom{2n}{2m+1} \left(\frac{i}{n} \right)^{2n-2m-1} \times \int_{-\infty}^\infty \exp \left(-\frac{it}{2} k^2 \right) \frac{k^{2m+1}}{(k^2 + 1/n^2)^{n+1}} k dk. \quad (A.5)$$

После замены $k^2 = z$ все интегралы в (A.5) становятся табличными (см., например, [38], 2.3.6.9), и после их вычисления окончательно получим решение для $\Psi_n(0, t)$ в виде (13).

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Вычисление интегралов $I_{nlk}(r, t)$

Входящие в формулу (27) функции Бесселя с полупелым индексом выражаются через элементарные функции, в частности:

$$\begin{aligned} J_{1/2}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x, \\ J_{3/2}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(\frac{\sin x}{x} - \cos x \right), \\ J_{5/2}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(3 \frac{\sin x}{x^2} - 3 \frac{\cos x}{x} - \sin x \right). \end{aligned} \quad (B.1)$$

Из формулы (B.1) видно, что при всех значениях l интегралы (27) выглядят однотипно, поэтому более подробно рассмотрим их вычисление на простейшем примере.

При $l = 0$ имеем

$$I_{n0k}(r, t) = \frac{2}{t} \int_0^\infty x^{k+3/2} \exp \left(-\frac{x}{n} \right) \times \exp \left(i \frac{x^2}{2t} \right) \sqrt{\frac{2t}{\pi r x}} \sin \frac{rx}{t} dx. \quad (B.2)$$

Представим в формуле (B.2) $\sin(rx/t)$ через экспоненты и после несложных преобразований получим

$$I_{n0k}(r, t) = -\frac{2i}{t} \sqrt{\frac{t}{2\pi r}} \times \left\{ \exp(z_2^2) \int_0^\infty x^{k+1} \exp \left[-\frac{1}{2it} (x + \sqrt{2it} z_2)^2 \right] dx - \exp(z_1^2) \int_0^\infty x^{k+1} \times \exp \left[-\frac{1}{2it} (x + \sqrt{2it} z_1)^2 \right] dx \right\}, \quad (B.3)$$

где введены следующие обозначения:

$$z_1 = \frac{-r + it/n}{\sqrt{2it}}, \quad z_2 = \frac{r + it/n}{\sqrt{2it}}. \quad (B.4)$$

Для вычисления (B.3) воспользуемся следующим соотношением ([38], 2.3.15.3):

$$\exp \left(\frac{1}{\gamma} x_0^2 \right) \int_0^\infty x^k \exp \left[-\frac{1}{\gamma} (x + x_0)^2 \right] dx = \frac{1}{2} \gamma^{(k+1)/2} \left[\Gamma \left(\frac{k+1}{2} \right) F \left(\frac{k+1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\gamma} x_0^2 \right) - \frac{2x_0}{\sqrt{\gamma}} \Gamma \left(\frac{k+2}{2} \right) F \left(\frac{k+2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{\gamma} x_0^2 \right) \right]. \quad (B.5)$$

С учетом выражения (B.5) окончательно получаем

$$I_{n0k}(r, t) = \sqrt{\frac{2t}{\pi r}} (2it)^{k/2} \left\{ \Gamma \left(\frac{k+2}{2} \right) \times \left[F \left(\frac{k+2}{2}, \frac{1}{2}, z_2^2 \right) - F \left(\frac{k+2}{2}, \frac{1}{2}, z_1^2 \right) \right] - 2\Gamma \left(\frac{k+3}{2} \right) \left[z_2 F \left(\frac{k+3}{2}, \frac{3}{2}, z_2^2 \right) - z_1 F \left(\frac{k+3}{2}, \frac{3}{2}, z_1^2 \right) \right] \right\}. \quad (B.6)$$

Аналогичным образом интегралы (27) вычисляются при любых значениях l . Ниже приведены явные выражения для случаев $l = 1$ и $l = 2$, записанные в тех же обозначениях:

$l = 1$:

$$I_{n1k}(r, t) = \frac{t}{r} \sqrt{\frac{2t}{\pi r}} (2it)^{k/2} \left\{ \Gamma \left(\frac{k+2}{2} \right) \times \left[F \left(\frac{k+2}{2}, \frac{1}{2}, z_2^2 \right) - F \left(\frac{k+2}{2}, \frac{1}{2}, z_1^2 \right) \right] - 2\Gamma \left(\frac{k+3}{2} \right) \left[z_2 F \left(\frac{k+3}{2}, \frac{3}{2}, z_2^2 \right) - z_1 F \left(\frac{k+3}{2}, \frac{3}{2}, z_1^2 \right) \right] \right\} - i \sqrt{\frac{2t}{\pi r}} (2it)^{(k+1)/2} \times \left\{ \Gamma \left(\frac{k+3}{2} \right) \left[F \left(\frac{k+3}{2}, \frac{1}{2}, z_2^2 \right) + F \left(\frac{k+3}{2}, \frac{1}{2}, z_1^2 \right) \right] - 2\Gamma \left(\frac{k+4}{2} \right) \left[z_2 F \left(\frac{k+4}{2}, \frac{3}{2}, z_2^2 \right) + z_1 F \left(\frac{k+4}{2}, \frac{3}{2}, z_1^2 \right) \right] \right\}. \quad (B.7)$$

$l = 2$:

$$I_{n2k}(r, t) = \frac{3t^2}{r^2} \sqrt{\frac{2t}{\pi r}} (2it)^{k/2} \times \left\{ \Gamma \left(\frac{k+2}{2} \right) \left[F \left(\frac{k+2}{2}, \frac{1}{2}, z_2^2 \right) - F \left(\frac{k+2}{2}, \frac{1}{2}, z_1^2 \right) \right] - 2\Gamma \left(\frac{k+3}{2} \right) \times \left[z_2 F \left(\frac{k+3}{2}, \frac{3}{2}, z_2^2 \right) - z_1 F \left(\frac{k+3}{2}, \frac{3}{2}, z_1^2 \right) \right] \right\} - \frac{3it}{r} \sqrt{\frac{2t}{\pi r}} (2it)^{(k+1)/2} \left\{ \Gamma \left(\frac{k+3}{2} \right) \times \left[F \left(\frac{k+3}{2}, \frac{1}{2}, z_2^2 \right) + F \left(\frac{k+3}{2}, \frac{1}{2}, z_1^2 \right) \right] - 2\Gamma \left(\frac{k+4}{2} \right) \left[z_2 F \left(\frac{k+4}{2}, \frac{3}{2}, z_2^2 \right) + z_1 F \left(\frac{k+4}{2}, \frac{3}{2}, z_1^2 \right) \right] \right\} - \sqrt{\frac{2t}{\pi r}} (2it)^{(k+2)/2} \times \left\{ \Gamma \left(\frac{k+4}{2} \right) \left[F \left(\frac{k+4}{2}, \frac{1}{2}, z_2^2 \right) - F \left(\frac{k+4}{2}, \frac{1}{2}, z_1^2 \right) \right] - 2\Gamma \left(\frac{k+5}{2} \right) \left[z_2 F \left(\frac{k+5}{2}, \frac{3}{2}, z_2^2 \right) - z_1 F \left(\frac{k+5}{2}, \frac{3}{2}, z_1^2 \right) \right] \right\}. \quad (B.8)$$

Из анализа формул (B.6)–(B.8), а также (B.1) следует, что интегралы (27) могут быть записаны в

общем виде при произвольных значениях l . Для этого представим входящую в интеграл (27) функцию Бесселя через элементарные функции в виде суммы:

$$J_{l+1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{s=0}^l \beta_{ls} \left(\frac{1}{x}\right)^{l-s} \times \times \operatorname{Im} [(-i)^s e^{ix}], \quad (\text{B.9})$$

где β_{ls} — модули коэффициентов разложения. Например, из формул (B.1) имеем

$$\begin{aligned} \beta_{00} &= 1, \\ \beta_{10} &= 1, \quad \beta_{11} = 1, \\ \beta_{20} &= 3, \quad \beta_{21} = 3, \quad \beta_{22} = 1. \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

В данных обозначениях результат вычисления (27) записывается в общем виде (28).

ЛИТЕРАТУРА

1. P. M. Paul, E. S. Toma, P. Breger et al., *Science* **292**, 1689 (2001).
2. M. Hentschel, R. Kienberger, C. Spielmann et al., *Nature* **414**, 509 (2001).
3. P. Tzallas, D. Charalambidis, N. A. Papadogiannis, K. Witte, and G. D. Tsakiris, *Nature* **426**, 267 (2003).
4. P. Agostini and L. F. DiMauro, *Rep. Progr. Phys.* **67**, 813 (2004).
5. M. Drescher, M. Hentschel, R. Kienberger et al., *Nature* **419**, 803 (2002).
6. M. Uiberacker, Th. Uphues, M. Schultze et al., *Nature* **446**, 627 (2007).
7. R. Kienberger, E. Goulielmakis, M. Uiberacker et al., *Nature* **427**, 817 (2004).
8. R. López-Martens, K. Varjú, P. Johnsson et al., *Phys. Rev. Lett.* **94**, 033001 (2005).
9. G. Sansone, E. Benedetti, F. Calegari et al., *Science* **314**, 443 (2006).
10. J.-F. Hergott, M. Kovacev, H. Merdji et al., *Phys. Rev. A* **66**, 021801 (2002).
11. E. Takahashi, Y. Nabekawa, and K. Midorikawa, *Opt. Lett.* **27**, 1920 (2002).
12. Y. Mairesse, A. de Bohan, L. J. Frasinski et al., *Science* **302**, 1540 (2003).
13. K. T. Kim, C. M. Kim, M.-G. Baik et al., *Phys. Rev. A* **69**, 051805 (2004).
14. M. Yu. Emelin, M. Yu. Ryabikin, A. M. Sergeev et al., *Europhys. Lett.* **69**, 913 (2005).
15. P. Lan, P. Lu, W. Cao et al., *Phys. Rev. A* **74**, 063411 (2006).
16. A. D. Bandrauk and N. H. Shon, *Phys. Rev. A* **66**, 031401 (2002).
17. K. L. Ishikawa, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 043002 (2003).
18. М. Ю. Емелин, М. Ю. Рябикин, А. М. Сергеев и др., Письма в ЖЭТФ **77**, 254 (2003); T. Pfeifer, D. Walter, G. Gerber et al., *Phys. Rev. A* **70**, 013805 (2004).
19. P. V. Corkum, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 1994 (1993).
20. K. C. Kulander, K. J. Schafer, and J. L. Krause, in *Super-Intense Laser-Atom Physics*, NATO AST Series, Ser. B: Physics 316, ed. by B. Piraux et al., Plenum Press, New York (1993), p. 95.
21. I. P. Christov, M. M. Murnane, and H. C. Kapteyn, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 1251 (1997).
22. Ch. Spielmann, N. H. Burnett, S. Sartania et al., *Science* **278**, 661 (1997).
23. A. M. Sergeev, A. V. Kim, E. V. Vanin et al., in: *Laser Optics'95 and ICONO'95: Superintense Laser Fields*, ed. by A. A. Andreev and V. M. Gordienko, SPIE Proc. (1996), Vol. 2770, p. 36.
24. S. Augst, D. D. Meyerhofer, D. Strickland, and S. L. Chin, *J. Opt. Soc. Amer. B* **8**, 858 (1991).
25. А. В. Ким, М. Ю. Рябикин, А. М. Сергеев, УФН **169**, 58 (1999).
26. J. B. Watson, A. Sanpera, K. Burnett, and P. L. Knight, *Phys. Rev. A* **55**, 1224 (1997).
27. M. V. Fedorov and J. Peatross, *Phys. Rev. A* **52**, 504 (1995).
28. М. Ю. Емелин, М. Ю. Рябикин, А. М. Сергеев, Изв. вузов. Радиофизика **47**, 909 (2004).
29. М. Ю. Емелин, М. Ю. Рябикин, and А. М. Сергеев, *Laser Phys.* **15**, 903 (2005).
30. M. D. Feit, J. A. Fleck, Jr., and A. Steiger, *J. Comp. Phys.* **47**, 412 (1982).
31. K. Burnett, V. C. Reed, J. Cooper, and P. L. Knight, *Phys. Rev. A* **45**, 3347 (1992).

32. M. Protopapas, D. G. Lappas, C. H. Keitel, and P. L. Knight, *Phys. Rev. A* **53**, R2933 (1996).
33. M. Protopapas, C. H. Keitel, and P. L. Knight, *Rep. Progr. Phys.* **60**, 389 (1997).
34. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика*, Наука, Москва (1989).
35. В. С. Владимиров, *Уравнения математической физики*, Наука, Москва (1981).
36. А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев, *Интегралы и ряды. Специальные функции*, Наука, Москва (1983).
37. M. Yu. Emelin, M. Yu. Ryabikin, and A. M. Sergeev, in *Superstrong Fields in Plasmas: 3rd Int. Conf. on Superstrong Fields in Plasmas*, AIP Conf. Proc. 827, ed. by M. Lontano and D. Batani (2006), p. 418.
38. А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев, *Интегралы и ряды. Элементарные функции*, Наука, Москва (1981).