

КВАЗИКЛАССИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ РАДИАЦИОННО-СТОЛКНОВИТЕЛЬНОГО КАСКАДА В РИДБЕРГОВСКОМ АТОМЕ

М. Б. Кадомцев, М. Г. Левашова, В. С. Лисица***

*Российский научный центр «Курчатовский институт»
123182, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 7 сентября 2007 г.

Развита двумерная квазиклассическая модель радиационно-столкновительного каскада для водородоподобных систем. Столкновения с электронами и ионами описываются классической диффузией в пространстве главного и орбитального квантовых чисел, а для радиационных переходов используется итерационная процедура, последовательно учитывающая квантовый характер радиационного каскада. Модель устанавливает соответствие между квантовым и классическим подходами и указывает на невозможность прямого применения последнего для расчетов кинетики заселенностей высоковозбужденных атомных состояний. Проведенные расчеты двумерных заселенностей высоковозбужденных состояний атомарного водорода для селективного, трехчастичного и фоторекомбинационного источников заселения позволяют уточнить данные одномерных кинетических моделей. Рассчитанные интенсивности рекомбинационных линий демонстрируют степень неравновесности заселенностей ридберговских состояний в типичных условиях астрофизической плазмы.

PACS: 52.20.-j, 52.25.Dg

1. ВВЕДЕНИЕ

Проблема расчета заселенностей высоковозбужденных (ридберговских) атомных состояний, определяемых радиационно-столкновительным каскадом, является предметом многолетних исследований для различных значений плазменных параметров [1–10]. Расчеты проводятся, как правило, в одномерной модели, учитывающей баланс радиационно-столкновительных процессов только по главным квантовым числам (см. например, [1–3]). При переходе к двумерной кинетике (по главным n и орбитальным l квантовым числам) резко возрастает количество атомных состояний, которые необходимо учитывать при конкретных расчетах. Здесь естественно использовать полуклассические или чисто классические модели для описания кинетики заселения высоковозбужденных состояний.

Возникновение и кинетика заселенностей ридберговских атомов определяется двумя основными фи-

зическими процессами: столкновениями с частицами плазмы и радиационными процессами. Источниками заселения являются поэтому процессы трехчастичной и радиационной рекомбинаций, а полная населенность определяется кинетикой радиационно-столкновительного каскада. Для описания этого каскада Беляевым и Будкером [5] впервые была предложена чисто классическая кинетическая модель только с одним (трехчастичным) источником заселения. В действительности, для радиационно-столкновительного каскада картина непрерывного классического течения электрона по атомным уровням не является последовательной, поскольку не описывает квантового характера радиационного каскада, связанного со скачкообразным изменением атомных состояний при испускании квантов. Квантовый характер радиационных процессов проявляется как раз вблизи границы континуума, где происходит формирование радиационно-столкновительного потока от трехчастичного источника заселения. В этой области существен чисто квантовый баланс между столкновительным заполнением уровня и уходом с него в ни-

*E-mail: mariya@fusion.ru

**E-mail: lisitsa@nfi.kiae.ru

жележащие состояния вследствие испускания кванта. Благодаря этому происходит первоначальное — прямое заселение, которое и запускает дальнейший радиационно-столкновительный каскад, и уже для него картина классического течения, связанная с многоквантовыми переходами, становится более адекватной.

Одновременное и совместное воздействие столкновительных и радиационных процессов приводит к своеобразной модификации традиционных представлений об источниках заселения, которые обычно рассматриваются раздельно. В действительности, процесс заселения определяется трансформацией столкновительного потока на верхних уровнях в радиационный поток на нижних уровнях. В результате возникает комбинированный поток, являющийся композицией столкновительных и радиационных процессов. Соотношение между столкновительными и радиационными процессами можно получить путем сравнения скоростей столкновительной ионизации и радиационного распада уровней. Действительно, используя для скорости ионизации классическую формулу Томсона¹⁾

$$\gamma_i(n) \sim N_e n^2 / \sqrt{T},$$

где N_e — плотность электронов, T — температура плазмы, а для вероятности радиационных распадов — формулу Крамерса

$$A(n) \propto \frac{\ln n}{c^3 n^5},$$

где $c = 137$ — скорость света, легко получить значение того главного квантового числа n_1 , при котором оба процесса сравнимы:

$$n_1 \sim \left(\frac{\sqrt{T}}{N_e c^3} \right)^{1/7}. \quad (1)$$

Легко убедиться, что при $n \sim n_1$ сравниваются три скорости процессов: столкновительного,

$$\gamma_{col}(n) \sim N_B(n) \gamma_i(n) \sim N_e^3 n^4 / T^2,$$

где $N_B(n)$ — Саха–Больцмановская заселенность атомного уровня, фоторекомбинационного,

$$q_{rr}(n) \sim N_e^2 / c^3 n^3 T^{3/2}$$

и чисто радиационного,

$$q_r(n) \sim A_n N_B(n),$$

обусловленного распадами из термодинамически равновесно заселенных состояний вблизи континуума в нижележащие состояния.

Подставляя далее какое-либо значение из этих источников (для определенности — столкновительного) в уравнение для потока j ,

$$\frac{dj}{dn} \sim \gamma_{col} \sim \frac{n^4 N_e^3}{T^2},$$

после интегрирования по n и подстановки $n = n_1$ получаем

$$j \sim \frac{N_e^3}{T^{9/2}} \left(\frac{T^4}{N_e c^3} \right)^{5/7} = \frac{N_e^3}{T^{9/2}} (T n_1^2)^{5/2}. \quad (2)$$

Поток (2), хотя и возникает за счет трехчастичной рекомбинации на границе сплошного спектра, содержит в явном виде зависимость от радиационных процессов. Отметим, что множитель $T n_1^2 \gg 1$ оказывается большим и является основным параметром развиваемой ниже теории.

Двумерная кинетика может приводить к принципиальным отличиям от одномерной кинетики. В этом нетрудно убедиться на примере баланса прямого радиационного заселения и распада уровней, анализируя скорости заселения и распада в двумерном и одномерном случаях. Действительно, в рамках квазиклассического рассмотрения вероятности как свободно-связанных (фоторекомбинация), так и связанно-связанных (радиационный распад) переходов с определенными значениями квантовых чисел определяются одинаковыми вероятностями, описываемыми формулой [6, 11, 12]:

$$A \sim \frac{2l+1}{c^3 (nn')^3} \exp\left(-\frac{\omega l^3}{3}\right), \quad (3)$$

где n, n' — главные квантовые числа верхнего и нижнего уровней, l — орбитальный момент, $\omega = 1/2n'^2 - 1/2n^2$ — энергия (частота) перехода. Здесь мы заменили для простоты рассуждений точные выражения для вероятностей перехода (см. ниже разд. 4) их асимптотиками. Для свободно-связанных переходов формула (3) определяет (после деления на максвелловский нормировочный множитель $(2\pi/T)^{3/2}$) скорость фоторекомбинации из интервала энергий dE с учетом замены

$$dE = -\frac{dn}{n^3}, \quad \omega = E + \frac{1}{2n'^2},$$

где E — энергия налетающего электрона.

Полная вероятность радиационного перехода получается после интегрирования выражения (3) по

¹⁾ Здесь и далее используются атомные единицы.

всем частотам ω переходов. Это приводит для связанно-связанных (bb) переходов к известной формуле Крамерса для радиационного распада:

$$A_{bb}^{tot}(nl) = A(nl) = 4/\pi\sqrt{3}c^3n^3l^2. \quad (4)$$

Для свободно-связанных (fb) переходов интегрирование проводится только по положительным значениям энергии $E > 0$ и потому полная вероятность $A_{fb}^{tot}(nl)$ в этом случае содержит экспоненциальный множитель:

$$A_{fb}^{tot}(nl) \sim A(nl) \exp\left(-\frac{l^3}{3n'^2}\right) \left(\frac{2\pi}{T}\right)^{3/2}. \quad (5)$$

В одномерной модели усредняются сами вероятности (4), (5) по орбитальным квантовым числам, что дает известные одномерные скорости радиационных распадов и фоторекомбинации [1]:

$$A(n) = \langle A(nl) \rangle_l = \frac{8 \ln n}{\pi\sqrt{3}c^3n^5}, \quad (6)$$

$$A_{fb}(n) = \langle A_{fb}^{tot}(nl) \rangle_l = \frac{8 \ln(2n^2T)}{3\pi\sqrt{3}c^3n^3} \left(\frac{2\pi}{T}\right)^{3/2},$$

здесь и ниже полагается $n^2T \gg 1$ в соответствии с рассматриваемой областью ридберговских состояний.

Деление скорости фоторекомбинации на полную скорость радиационного распада из формул (6) дает (после умножения на плотности электронов и ионов) заселенности $N_B(n)$ атомных уровней в одномерной модели. Переходя далее к безразмерным (в единицах $N_B(n)$) населенностям $b(n)$, находим

$$b(n) = \frac{N(n)}{N_B(n)} = \frac{\langle A_{fb}^{tot}(nl) \rangle_l}{\langle A(nl) \rangle_l N_B(n)} = \frac{2}{3} \left[1 - \frac{\ln(1/\sqrt{T})}{\ln n} \right]. \quad (7)$$

Формула (7), определяющаяся отношением средних по орбитальному моменту вероятностей переходов, описывает медленное (логарифмическое) убывание заселенностей при удалении от границы сплошного спектра. Аппроксимации именно такого вида успешно использовались Бейгманом [4] для аналитического описания численных решений кинетических уравнений для одномерных заселенностей.

При переходе к двумерной кинетике населенности $N(nl)$ определяются двумерными вероятностями (4) и (5), существенно зависящими от орбитального квантового числа l в (5). Для сравнения с одно-

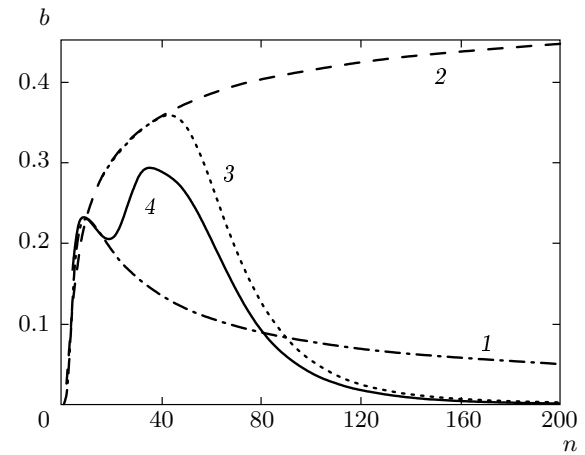


Рис. 1. Населенности атомных уровней при прямом заселении фоторекомбинационным источником: 1 — усредненные двумерные расчеты без учета столкновений; 2 — одномерные расчеты без учета столкновений; 3 — одномерные расчеты с учетом столкновений; 4 — усредненные двумерные расчеты с учетом столкновений. Параметры плазмы соответствуют астрофизическим условиям: $N_e = 2.5 \cdot 10^3 \text{ см}^{-3}$, $T = 1 \text{ эВ}$

мерной моделью надо усреднить по l эти населенности, определяющиеся уже отношением неусредненных вероятностей, что дает

$$\langle b(n'l) \rangle_l \propto \left\langle \exp\left(-\frac{l^3}{3n'^2}\right) \right\rangle_l \propto \frac{1}{n'^2} \int_1^{n'-1} 2l dl \exp\left(-\frac{l^3}{3n'^2}\right) \propto \frac{1}{n'^{2/3}}. \quad (8)$$

Видно, что усредненные двумерные заселенности, в отличие от одномерных, убывают с увеличением главного квантового числа. Описанная ситуация иллюстрируется на рис. 1 (кривые 1 и 2). Видно, что двумерная кинетика имеет существенно другой характер поведения (падение заселенностей вместо роста в одномерном случае). При учете столкновений, однако, столь резкое различие между одномерной и двумерной кинетическими моделями в значительной степени нивелируется. Это демонстрируется на рис. 1 кривыми 3 и 4, полученными при расчетах заселенностей от фоторекомбинационного источника с нулевыми граничными условиями при $n \rightarrow \infty$ и рассчитанными в различных приближениях. Видно, что кривая 4 плавно приближается к кривой 3 по мере возрастания главного квантового числа (т. е. в области увеличения интенсивности столкновений).

Ниже нас в основном будут интересовать параметры плазмы, отвечающие малым электронным плотностям ($N_e \sim 10^3-10^4 \text{ см}^{-3}$) и умеренным температурам ($T \sim 1 \text{ эВ}$) характерные для рекомбинационных радиолиний в астрофизических условиях [3]. В то же время, развиваемые методы являются достаточно универсальными и также применимы для других условий, при которых реализуются ридберговские атомы.

Целью настоящей работы является последовательное развитие квазиклассической двумерной радиационно-столкновительной модели заселения высоковозбужденных состояний ридберговского атома. Модель основана на классическом виде оператора столкновений и итерационной процедуре для учета радиационного каскада. Предварительные результаты, связанные с учетом только электронных столкновений и основанные на первых членах итерации и несимметризованных по квантовым числам начальных и конечных состояний атома вероятностях радиационных переходов, были представлены в работе [13]. Отметим, что включение упругих столкновений с ионами принципиально важно для развиваемой ниже двумерной модели, поскольку приводит к интенсивной диффузии по орбитальным моментам, тогда как столкновения с электронами определяют в основном диффузию по главным квантовым числам (энергии).

2. КИНЕТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАДИАЦИОННО-СТОЛКНОВИТЕЛЬНОГО КАСКАДА

Рассмотрим переход от квантового кинетического уравнения к классическому. Структура квантового кинетического уравнения для радиационно-столкновительного каскада имеет вид

$$[\hat{L}_c + \hat{L}_r^q]f(n, l) + q(n, l) = 0, \quad (9)$$

где \hat{L}_c — оператор столкновительных переходов, \hat{L}_r^q — оператор радиационных переходов, $f(n, l)$ — функция распределения населенностей в двумерном пространстве главного n и орбитального l квантовых чисел атома, $q(n, l)$ — источник заселения атомных состояний. Операторы действуют на функцию распределения населенностей следующим образом:

$$\hat{L}_c f(n, l) = \sum_{n', l'} [W(n', l'; n, l)f(n, l) - W(n, l; n', l')f(n', l')], \quad (10)$$

$$\hat{L}_r^q f(n, l) = A(n, l)f(n, l) - \sum_{n', l'} A(n, l; n', l')f(n', l'). \quad (11)$$

Здесь $W(n', l'; n, l)$ и $A(n, l; n', l')$ — скорости столкновительных и радиационных переходов между состояниями с различными квантовыми числами, $A(n, l) = \sum_{n', l'} A(n, l; n', l')$ — полная скорость радиационного распада данного уровня во все нижележащие; суммирование в выражениях (10), (11) распространяется на все значения квантовых чисел с учетом соответствующих правил отбора.

Переходя к высоковозбужденным (ридберговским) состояниям, можно упростить столкновительный оператор, сведя его к оператору диффузии в пространстве главных и орбитальных квантовых чисел. Такое упрощение достигается либо использованием аппроксимаций для сечений переходов (как правило, в дипольном приближении), см. [1, 4], либо на основе чисто классического подхода, основанного на расчете передачи энергии и момента атомному электрону при его столкновении с плазменным электроном. В последнем случае эффект диффузии может быть учтен также прямым использованием интеграла столкновений Ландау для столкновения атомного электрона с электронами плазмы, обладающими максвелловским распределением по скоростям [5]. Ниже решение кинетического уравнения основано на замене квантового оператора столкновений \hat{L}_c классическим оператором диффузии \hat{L}_c^{cl} , вычисляемым, в отличие от [5], более простым и прямым расчетом изменения энергии и момента при кулоновских столкновениях.

Что касается радиационных переходов, то здесь ситуация осложняется нелокальностью связи между атомными состояниями, между которыми происходит радиационный переход. Действительно, радиационный оператор (11) является интегральным оператором, описывающим возможности больших изменений (скачков) главных квантовых чисел при радиационном переходе. Можно показать, однако, что в области $n > l \gg n^{2/3}$ действие интегрального радиационного оператора (11) может быть сведено к дифференциальному оператору, описывающему непрерывное движение (течение) электрона в двумерном пространстве квантовых чисел со скоростями, определяемыми чисто классическими скоростями потери энергии и момента [14]:

$$\hat{L}_c f = \dot{n} \frac{\partial f}{\partial n} + \dot{l} \frac{\partial f}{\partial l} \equiv \hat{L}_r^{cl} f, \quad (12)$$

где скорости потери энергии и момента при движе-

нии по кулоновской траектории определяются известными соотношениями [14]

$$\begin{aligned} \dot{n} &= -\frac{1}{c^3 l^5} \left(1 - \frac{l^2}{3n^2} \right), \\ \dot{l} &= -\frac{2}{3c^3 n^3 l^2}. \end{aligned} \quad (13)$$

Таким образом, в указанной области переменных квантовый интегральный радиационный оператор \hat{L}_r сводится к классическому дифференциальному оператору \hat{L}_r^{cl} . Такое приближение, однако, справедливо только для тех источников заселения атомных состояний, которые имеют достаточно широкое распределение по квантовым числам (например, трехчастичная рекомбинация), при котором статистический вес состояний с малыми орбитальными моментами l_{eff} достаточно мал

$$l_{eff}^2 \sim n^{4/3} \ll n^2.$$

Это приближение, однако, нарушается для многих других источников рекомбинации (например, фотоили диэлектронной), для которых источники заселения сосредоточены как раз в области малых орбитальных моментов. Эти источники для ридберговских состояний вносят вклад, сравнимый со вкладом трехчастичной рекомбинации.

Метод учета нелокальности связи атомных состояний при радиационном каскаде в одномерной модели (только по главным квантовым числам) был развит Бейгманом [4]. Ниже мы используем, однако, метод учета нелокальной связи состояний для двумерного распределения, основанный на итерационном подходе, предложенном в работе [6]. Суть метода сводится к последовательному учету ступеней радиационного каскада путем итерационного решения уравнений (9), (11) с последующим использованием классического каскада (12) на определенной ступени итерационного процесса. Такой подход приводит к переопределению источников заселения на каждом шаге итерации. Так, на первом шаге имеем

$$f = q/A + \langle q \rangle / A + \hat{C}[\langle q \rangle], \quad (14)$$

где новый источник на первом шаге каскада равен

$$\langle q \rangle = \sum_{n', l'} q(n', l') \frac{A(n', l'; n, l)}{A(n', l')}, \quad (15)$$

а оператор \hat{C} , называемый каскадной матрицей Ситона [1, 4, 7], описывает последующие ступени каскада.

Расчеты населенностей по указанной схеме для чисто радиационного источника заселения обнаруживают высокую точность уже на первом шаге итерации [15]. Аналогичный итерационный метод можно развить и при учете столкновительного оператора. Такая схема решения выглядит следующим образом. Будем в качестве первого шага итерационной процедуры искать f в виде суммы $f = f_0 + f_1$, где f_0 удовлетворяет уравнению нулевого приближения, определяющему заселение внешним источником, столкновительной диффузией и радиационным уходом на нижележащие состояния:

$$\hat{L}_c f_0(n, l) - A(n, l) f_0(n, l) + q(n, l) = 0. \quad (16)$$

Подставляя $f = f_0 + \delta f$ в уравнение (9), получим уравнение для δf :

$$\begin{aligned} &\hat{L}_c \delta f(n, l) - A(n, l) \delta f(n, l) + \\ &+ \sum_{n'=n+1} \sum_{l'=l\pm 1} f_0(n', l') A(n', l' \rightarrow n, l) + \\ &+ \sum_{n'=n+1} \sum_{l'=l\pm 1} \delta f(n', l') A(n', l' \rightarrow n, l) = 0, \end{aligned} \quad (17)$$

или в операторном виде

$$\begin{aligned} &[\hat{L}_c + \hat{L}_r^q] \delta f(n, l) + \\ &+ \sum_{n'=n+1} \sum_{l'=l\pm 1} f_0(n', l') A(n', l' \rightarrow n, l) = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Видно, что для δf получается уравнение такого же вида (9), что и для f , где, однако, вместо источника $q(n, l)$ стоит модифицированный источник

$$q_1(n, l) = \sum_{n'=n+1} \sum_{l'=l\pm 1} f_0(n', l') A(n', l' \rightarrow n, l), \quad (19)$$

отвечающий заселению состояний после испускания первого кванта.

Применяя к δf ту же процедуру (16), выделим из δf прямое заселение $f_1(n, l)$ источником q_1 , определяемым формулой (19) и предшествующей итерацией f_0 . Применяя последовательно такую итерационную процедуру для решения исходного уравнения (9) находим f в виде ряда

$$f = f_0 + f_1 + f_2 + \dots + f_k + \dots,$$

отвечающего последовательному испусканию квантов, каждый член f_k которого определяется из уравнения

$$\begin{aligned} &\hat{L}_c f_k(n, l) - A(n, l) f_k(n, l) + q_k = 0, \\ &q_k = \sum_{n'=n+1} \sum_{l'=l\pm 1} f_{k-1}(n', l') A(n', l' \rightarrow n, l) \end{aligned} \quad (20)$$

по величине f_{k-1} , вычисленной на предыдущем шаге, а f_0 находится из уравнения (16) с исходным источником. Физически очевидно, что величина f_k определяется кинетикой столкновительных переходов между последовательно испускаемыми квантами k и $k + 1$. Сходимость ряда определяется местом действия источника и рассматриваемой областью квантовых чисел. Она оказывается, вообще говоря, достаточно медленной (логарифмической по k), так что учет высших итераций существен. Предлагаемый метод представляет собой итерационное решение исходного интегрального уравнения (9), которое широко используется в теории переноса резонансного излучения [2]. В нашем случае кинетическое уравнение с радиационным каскадом также является своеобразным уравнением переноса в энергетическом пространстве атома.

Источник q_k в данном состоянии nl формируется, согласно уравнению (20), всевозможными переходами из вышележащих $n' > n$ состояний при испускании k -го кванта. На каждом последующем шаге он сглаживается, и на определенной итерации можно перейти от квантового оператора \hat{L}_r^q к классическому дифференциальному оператору \hat{L}_r^{cl} (12), заменив дальнейшие члены итерационного ряда уравнением для классической функции распределения f_k^{cl} ,

$$\left[\hat{L}_c + \hat{L}_r^{cl} \right] f_k^{cl}(n, l) + A f_{k-1}(n, l) = 0, \quad (21)$$

описывающим непрерывное течение атомного электрона по уровням. Такой подход предполагает, что, начиная с k -го испущенного кванта, радиационный каскад уже описывается непрерывным классическим течением в пространстве квантовых чисел атома.

Таким образом, полная функция распределения определяется суммой:

$$f(n, l) \approx \sum_{i=0}^{k-1} f_i(n, l) + f_k^{cl}(n, l). \quad (22)$$

В работе [15] переход к классическому каскадному уравнению (21) осуществлялся на первом шаге радиационного каскада, т. е. только для функций f_0, f_1^{cl} . Уже это приближение обеспечивает достаточно высокую точность (порядка 20 %) для населенностей при фоторекомбинационном источнике заселения. Укажем, что использование (как в работе [5]) чисто классического приближения, основанного на решении уравнения (21) с исходным источником (т. е. без учета квантовых итераций в радиационном каскаде) может приводить к резкому отличию функции распределения населенностей от реальной (в частности,

к расходимости рекомбинационного потока при малых моментах).

В настоящей работе точность расчетов населенностей ридберговских уровней существенно увеличена благодаря учету столкновений с протонами, включению членов более высокого порядка в описанной выше итерационной процедуре, использованию симметризованных квазиклассических вероятностей радиационных переходов, наиболее близких к квантовым вероятностям. Расчеты проведены как для фоторекомбинационного и трехчастичного источников заселения, так и для селективного источника. В последнем случае для воспроизведения деталей радиационного каскада требуется достаточно высокая точность расчетов, отвечающая итерационной процедуре вплоть до двадцатого порядка.

3. КВАЗИКЛАССИЧЕСКИЕ ВЕРОЯТНОСТИ РАДИАЦИОННЫХ ПЕРЕХОДОВ

Проблема выбора достаточно точных квазиклассических вероятностей радиационных переходов, описывающих каскадные процессы в широком диапазоне частот переходов, является одной из центральных задач квазиклассической кинетики. Квазиклассические результаты для вероятностей радиационных переходов были получены в ряде работ [1, 4, 11–13, 15, 16]. Ниже нас будут интересовать вероятности свободно-связанных (фоторекомбинация) и связанно-связанных переходов в двумерном пространстве квантовых чисел. Для фоторекомбинации интерес представляют, как правило, вероятности переходов при достаточно большой температуре, которая существенно превышает энергию связи ридберговских состояний. Здесь вероятности свободно-связанных переходов хорошо описываются квазиклассическими формулами [12, 16], для которых скорости рекомбинации из максвелловского континуума описываются формулой (в единицах равновесного распределения)

$$q(n, l) = \frac{4}{\pi^2 c^3 l^2 n^3} \exp\left(\frac{1}{2n^2 T}\right) \times \int_{x_0}^{\infty} \exp\left(-\frac{3x}{Tl^3}\right) G_0(x) dx, \quad (23)$$

где $x_0 = l^3/6n^2$, $G_0(x) = x[K_{1/3}^2(x) + K_{2/3}^2(x)]$ — комбинация функций Макдональда, получаемая при переходе в матричных элементах к квазиклассическому пределу [7, 12, 16].

Источник (23) существенно селективен по моменту l и в меньшей степени — по n : преимущественно заселяются состояния с малыми моментами и малыми главными квантовыми числами.

Что касается вероятностей связанно-связанных переходов, то для них следует использовать более точные приближения, справедливые для всех квантовых чисел, участвующих в переходах при радиационном каскаде. Такие приближения, основанные на процедурах симметризации между начальными и конечными атомными состояниями, были предложены в работах [11, 12]. Сравнение этих симметризованных матричных элементов с квантовыми расчетами показывает, что приближение [12] лучше описывает квантовые результаты практически во всей области параметров, поэтому ниже мы использовали эти данные для расчетов вероятностей связанно-связанных переходов. Соответствующие формулы выражаются через функции Бесселя с симметризованными по начальному и конечному состояниям параметрами:

$$A(n, l; n', l' = l - 1) = \frac{4sl}{3c^3(2l + 1)(nn')^{5/2}} \times \left[J'_s(s\varepsilon) + J_s(s\varepsilon)\sqrt{\varepsilon^{-2} - 1} \right], \quad (24)$$

где $s = \omega(nn')^{3/2}$ и $\varepsilon = \sqrt{1 - l^2/nn'}$ — эффективное изменение главного квантового числа и эксцентриситет эллиптической орбиты, симметризованные по начальным и конечным состояниям рассматриваемого перехода, $\omega = |1/2n^2 - 1/2n'^2|$ — частота (энергия) перехода, J_s и J'_s — бесселева функция и ее производная.

Аналогичная формула справедлива для переходов с увеличением орбитального момента [12].

4. КЛАССИЧЕСКИЙ ОПЕРАТОР СТОЛКНОВЕНИЙ

Оператор столкновений, определяющий диффузию в пространстве главных и орбитальных квантовых чисел, выбирался в классическом приближении. Таким образом, кинетическое уравнение решалось в квазиклассическом представлении для радиационных переходов с классическим интегралом столкновений. Конкретный вид оператора столкновений может быть получен путем расчета передачи энергии и момента при классическом кулоновском столкновении атомного электрона на кеплеровской орбите с частицей плазмы. Коэффициенты диффузии в пространстве энергии и момента определяются, как известно, средними квадратами переданной энергии и

момента. Общий вид кинетического уравнения имеет форму уравнения Фоккера — Планка

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial I_j} \langle \Delta I_k \Delta I_j \rangle \frac{\partial f}{\partial I_j}. \quad (25)$$

Здесь $I_{k,j}$ — произвольные интегралы движения, в качестве которых в кулоновском поле естественно выбрать энергию (или главное квантовое число) и орбитальный момент, усреднение означает интегрирование по параметрам плазменных частиц и по фазам движения кеплеровского атомарного электрона.

Рассмотрим случай быстрых (неупругих) и медленных (упругих) столкновений, реализующийся обычно для электронов и ионов плазмы. При быстрых столкновениях движение плазменной частицы можно считать прямолинейным с прицельным параметром ρ и скоростью \mathbf{v}_e . При этом атомный электрон получает мгновенное приращение скорости $\Delta \mathbf{v}_e$,

$$|\Delta \mathbf{v}_e| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} dt \mathbf{F}(t) \right| = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho dt}{(\rho^2 + v_e^2 t^2)^{3/2}} = \frac{2}{\rho v_e}. \quad (26)$$

При этом для квадрата приращения энергии имеем

$$\langle (\Delta E)^2 \rangle = \langle (\Delta \mathbf{v}_e \cdot \mathbf{v}_a)^2 \rangle = \frac{1}{3} \langle \Delta \mathbf{v}_e^2 \rangle \langle \mathbf{v}_a^2 \rangle, \quad (27)$$

где \mathbf{v}_a — скорость электрона на боровской орбите. После усреднения по прицельному параметру и скоростям и умножения на N_e для квадрата приращения энергии за время t получаем

$$\langle \Delta E^2 \rangle = 8E_n \omega t, \quad \omega = \frac{4\sqrt{2\pi}}{3} N_e L \sqrt{\frac{1}{T}}, \quad (28)$$

где ω — характерный масштаб частоты, L — кулоновский логарифм, обсуждаемый ниже. Квадрат изменения момента при мгновенном приращении скорости дается выражением

$$\langle (\Delta l)^2 \rangle = \frac{1}{3} \langle \Delta \mathbf{v}_e^2 \rangle \langle \mathbf{r}_a^2 \rangle, \quad (29)$$

где \mathbf{r}_a — координата электрона на боровской орбите.

Изменения энергии и момента не являются, однако, независимыми поскольку имеется корреляция между изменением энергии и момента, обусловленная поперечными (по отношению к радиусу-вектору кеплеровского электрона) компонентами скоростей v'_a и $\Delta v'_e$. Это приводит к одновременному и коррелированному изменению этих величин:

$$\langle \Delta l \Delta E \rangle = \langle r_a \Delta v'_e v'_a \Delta v'_e \rangle = \frac{1}{3} l \langle \Delta \mathbf{v}_e^2 \rangle, \quad (30)$$

где мы учли, что $r_a v'_a = l$.

Выписанные корреляторы легко вычисляются с помощью известных формул для средних значений квадратов радиуса-вектора и скорости:

$$\langle \mathbf{r}_a^2 \rangle = \frac{n^2}{2}(5n^2 - 3l^2), \quad \langle \mathbf{v}_a^2 \rangle = \frac{1}{n^2}. \quad (31)$$

Чтобы избавиться от перекрестных членов в уравнении Фоккера – Планка (25) необходимо вместо момента ввести переменную $\eta = l/n$. Коррелятор этой переменной с любой функцией только энергии (или n) обращается в нуль:

$$\langle \Delta \eta \Delta n \rangle = \frac{\langle \Delta l \Delta n \rangle}{n} - \frac{l \langle (\Delta n)^2 \rangle}{n^2} = 0. \quad (32)$$

В этом нетрудно убедиться с помощью формул (29)–(31), учитывая, что

$$\langle (\Delta n)^2 \rangle = n^6 \langle (\Delta E)^2 \rangle = \frac{1}{3} n^4 \langle \Delta \mathbf{v}_e^2 \rangle.$$

Для усредненного квадрата новой переменной окончательно получаем

$$\begin{aligned} \langle (\Delta \eta)^2 \rangle &= \left\langle \left(\frac{\Delta l}{n} - \frac{l \Delta n}{n^2} \right)^2 \right\rangle = \\ &= \frac{1}{3} \langle \Delta \mathbf{v}_e^2 \rangle \cdot \frac{5}{2} n^2 (1 - \eta^2). \end{aligned} \quad (33)$$

Изложенный подход позволяет выразить оператор столкновений в виде независимых операторов диффузии по переменным энергии (главному квантовому числу) и $\eta = l/n$. Удобно, следуя работе [5], записать оператор столкновений в безразмерных переменных

$$\xi = \sqrt{-\frac{E}{E_0}} = \frac{n_0}{n}, \quad \eta = \frac{l}{n}, \quad \zeta = \frac{l_z}{l} \quad (34)$$

(l_z — проекция орбитального момента на некоторое направление z), меняющихся в пределах $0 < \xi < \infty$, $0 < \eta < 1$, $-1 < \zeta < 1$, и ввести безразмерную функцию распределения $\psi = (\xi, \eta, \zeta)$. Для энергии E_0 (или главного квантового числа n_0) удобно выбрать такое значение, при котором скорости классических радиационных и столкновительных процессов сравниваются:

$$E_0 = \left(\frac{\sqrt{2\pi} L c^3 N_e}{12\sqrt{T}} \right)^{1/4}, \quad n_0 = \sqrt{\frac{1}{2E_0}}, \quad (35)$$

где L — кулоновский логарифм, выбор которого обсуждается ниже. При таком выборе переход от преобладающего столкновительного каскада к чисто радиационному отвечает, очевидно, значению параметра $\xi \sim 1$.

В приведенных безразмерных переменных оператор столкновения с учетом сферической симметрии задачи (позволяющей использовать статвесовое распределение по проекции орбитального момента l_z) приобретает вид [4]:

$$\hat{L}_c \psi = \frac{\xi^4}{\eta} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{\eta}{\xi^4} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right] + \frac{\xi^4}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{5\eta(1-\eta^2)}{2\xi^6} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right]. \quad (36)$$

Этот же интеграл столкновений был получен в работе [5] на основе прямого использования интеграла столкновений Ландау. Далее в работе [5] осуществлялся переход от импульсного пространства (в котором определен интеграл столкновений Ландау) к пространству интегралов движения — энергии и орбитальному моменту. Такой вывод, на наш взгляд, более громоздок и менее нагляден. Кроме того, предложенный выше вывод позволяет естественным образом включить в оператор столкновений упругие переходы от медленных столкновений с тяжелыми частицами (ионами).

Упругие столкновения отвечают, очевидно, диффузии только в пространстве орбитальных квантовых чисел. Для вывода выражений для квадратов переданного момента воспользуемся уравнениями, описывающими прецессию кеплеровской орбиты в слабом медленно меняющемся электрическом поле $\bar{\mathbf{F}}$:

$$\dot{\mathbf{M}} = \frac{3}{2} n^2 \mathbf{F} \times \mathbf{A}, \quad \dot{\mathbf{A}} = \frac{3}{2} \mathbf{F} \times \mathbf{A}, \quad (37)$$

где введен вектор Рунге–Ленца $\mathbf{A} = 2\langle \mathbf{r} \rangle / 3n^2$, модуль которого численно равен эксцентриситету кеплеровой орбиты $\varepsilon = \sqrt{1 - n^2}$.

Интегрируя первое из уравнений (37), возводя полученный результат в квадрат в предположении малости переданного момента при столкновении, получаем

$$\begin{aligned} \langle (\Delta \mathbf{M})^2 \rangle &= n^4 \cdot \frac{1}{3} \left(\frac{2}{\rho v_i} \right)^2 \cdot \frac{9}{2} (1 - \eta^2), \\ \langle (\Delta \eta)^2 \rangle &= n^2 \cdot \frac{1}{3} \left(\frac{2}{\rho v_i} \right)^2 \cdot \frac{9}{2} (1 - \eta^2), \end{aligned} \quad (38)$$

где v_i — скорость налетающего иона. Отметим, что функциональный вид величины $\langle (\Delta \eta)^2 \rangle$, следующий из (38), тождествен (33), а численный коэффициент в (38) оказывается практически совпадающим с численным коэффициентом в выражении (33) для неупругих переходов. Поэтому учет упругих столкновений сводится к изменению только численного

коэффициента перед оператором диффузии по орбитальным моментам в уравнении (36), связанному с отношением масс быстрых m (электронов) и медленных M (ионов) частиц плазмы, а также к некоторому изменению кулоновского логарифма в формуле (28).

Обсудим величину логарифма L в формуле (28) отдельно для случаев быстрых и медленных столкновений. Величина L определяется отношением максимального (ρ_{max}) и минимального (ρ_{min}) прицельных параметров. В рамках классического рассмотрения в случае быстрых столкновений величина ρ_{max} соответствует границе между адиабатически медленным и внезапным возмущениями и определяется из условия равенства времени соударения классическому периоду T_n обращения электрона по орбите:

$$\rho_{max} \sim v_e T_n \sim v_e n^3 \equiv \rho_{ad}.$$

Минимальное значение определяется из условия равенства переданного импульса (26) импульсу электрона на орбите, что дает

$$\rho_{min} \propto 1/p_a v_e \propto n/v_e.$$

В результате отношение приведенных прицельных параметров равно

$$\rho_{max}/\rho_{min} \approx T/E_n \gg 1.$$

В случае упругих столкновений величина ρ_{ad} играет, очевидно, роль минимального значения параметра соударения. Максимальное значение определяется в этом случае радиусом ρ_D дебаевской экранировки. Таким образом, для диффузии по энергии (переменной ξ в уравнении (36)) фигурирует логарифм $L = \ln(T/E_n)$, отвечающий случаю внезапного возмущения. В то же время диффузия по переменной η происходит как при внезапных, так и при адиабатически медленных возмущениях, поэтому она с высокой точностью отвечает сумме указанных выше логарифмов, что приводит к увеличению значения полного кулоновского логарифма $L = \ln(\rho_D v_e/n)$. Это означает, что коэффициент диффузии по переменной η в уравнении (36) следует увеличить в $\ln(\rho_D/\rho_{min})/\ln(\rho_{ad}/\rho_{min}) \equiv R_e$ раз. Для условий плазмы межзвездных газовых туманностей низкой плотности ($N_e \sim 10^3 \text{ см}^{-3}$) этот множитель близок к двойке, тогда как для лабораторной корональной плазмы более высокой плотности ($N_e \sim 10^{13} \text{ см}^{-3}$) он несущественно отличается от единицы.

Вклад медленных ионов (для определенности, протонов) является существенно упругим для рассматриваемых здесь умеренных температур. Поэто-

му их учет приводит к резкому увеличению коэффициента диффузии по переменной η , пропорциональному корню из отношения масс. При обрезании логарифма в качестве максимального прицельного параметра следует по-прежнему использовать дебаевский радиус, а в качестве минимального — величину ρ_{min} с заменой скорости электрона на скорость протона.

Наконец, выражая в тех же безразмерных переменных ψ классический радиационный оператор (12), имеем

$$\hat{L}_r^{cl} \psi = -\frac{\xi^4}{\eta} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{\xi^3}{\eta^4} \left(1 - \frac{\eta^2}{3} \right) \psi \right] - \frac{\xi^4}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{\xi^2}{\eta^3} (1 - \eta^2) \psi \right]. \quad (39)$$

Суммируя операторы (36) и (39), получаем запись классического кинетического уравнения в виде дивергенции потоков, определяемых столкновениями и радиацией [5]:

$$-\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial \xi} [\sqrt{G} j^\xi] - \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial \eta} [\sqrt{G} j^\eta] = 0. \quad (40)$$

Здесь $\sqrt{G} = n_0^3 \eta/\xi^4$, а потоки j^ξ , j^η частиц по переменным ξ , η равны

$$j^\xi = \frac{\xi^7}{\eta^5} \left(1 - \frac{\eta^2}{3} \right) \psi - \frac{\partial \psi}{\partial \xi}, \quad (41)$$

$$j^\eta = \frac{\xi^6}{\eta^4} (1 - \eta^2) \psi - R \frac{5(1 - \eta^2)}{2\xi^2} \frac{\partial \psi}{\partial \eta}, \quad (42)$$

где

$$R = R_e + R_p = \frac{\ln(\rho_D v_e/n)}{\ln(T/E_n)} + \sqrt{\frac{M}{m}} \frac{\ln(\rho_D v_i/n)}{\ln(T/E_n)}. \quad (43)$$

Мы ввели в коэффициент диффузии по переменной η отношение $R > 1$, обусловленное учетом упругой электронной и ионной диффузии наряду с неупругой электронной. Отметим, что этот фактор R не учитывался в исходной работе [5].

Уравнение (40) (без учета фактора R) было исследовано в работе [5] при граничных условиях

$$\psi = \begin{cases} 0, & \xi \gg 1, \\ 1, & \xi \eta^{-5/8} \ll 1, \end{cases} \quad j^\eta = 0 \text{ при } \eta \rightarrow 0 \text{ и } \eta \rightarrow 1,$$

отвечающих равновесному заселению на границе сплошного спектра, что эквивалентно учету заселения состояний трехчастичной рекомбинацией и условию поглощения при $\xi \gg 1$, т. е. при малых значениях главного квантового числа n . Вычисленная при

этих граничных условиях интенсивность рекомбинации имеет вид

$$I = N_e \left(\frac{2\pi}{n_0^2 T} \right)^{3/2} \frac{1}{c^3} \gamma, \quad (44)$$

$$\gamma = \int_0^1 \frac{\eta}{\xi^4} \left\{ \frac{\xi^7}{\eta^5} \left(1 - \frac{\eta^2}{3} \right) \psi - \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right\} 2d\eta.$$

Таким образом, в работе [5] предполагалось, что функциональная зависимость интенсивности рекомбинации от параметров плазмы целиком определяются множителем перед некоторой универсальной константой γ . Легко увидеть, однако, что интеграл, определяющий γ , расходится при малых η и поэтому не может быть найден в рамках чисто классической постановки задачи.

Для нахождения величины γ необходимо воспользоваться следующей модифицированной квазиклассической схемой: на первом шаге необходимо решить уравнение (16) в безразмерных переменных ξ , η и ψ_0 , полагая в нем величину $q(\xi, \eta)$ равной нулю с граничным условием $\psi_0 = 1$ при $\xi = 0$. Тогда уравнение для ψ_0 запишется в виде

$$\hat{L}_c \psi_0 - \hat{A} \psi_0 = \frac{\xi^4}{\eta} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{\eta}{\xi^4} \frac{\partial \psi_0}{\partial \xi} \right] + \frac{\xi^4}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{5\eta(1-\eta^2)}{2\xi^6} \frac{\partial \psi_0}{\partial \eta} \right] R - \frac{n_0}{\eta^2} \xi^5 \psi_0 = 0, \quad (45)$$

где, с учетом квантовых ограничений на момент $1/2 \leq l \leq n - 1/2$, функция ψ_0 определена в области

$$\frac{\xi}{2n_0} \equiv \eta_{min} < \eta < \eta_{max} \equiv 1 - \frac{\xi}{2n_0}$$

и необходимо положить $\partial \psi_0 / \partial \eta = 0$ на границах.

Математически уравнение (45) имеет вид двумерного уравнения Шредингера с потенциалом отталкивания (при $\xi > 0$), а физически описывает кинетику заселения атомных состояний вблизи границы сплошного спектра до испускания первого кванта. После испускания кванта можно уже решать чисто классическое уравнение (21) с источником, определяемым из решения уравнения (45). Из этой процедуры следует, что, в отличие от классической постановки [5], граничным условием, определяющим дальнейший классический радиационно-столкновительный каскад, является реальная функция распределения из (45) вблизи границы сплошного спектра, а не просто единичное (равновесное) условие.

5. РЕКОМБИНАЦИОННЫЙ ПОТОК

Специфика рассматриваемой задачи состоит, как отмечалось, в том, что рекомбинационный поток j в пространстве квантовых чисел атома, задаваемый трехчастичной (столкновительной) рекомбинацией вблизи континуума, перехватывается радиационным потоком при более низких квантовых числах. При этом населенность уровней убывает от равновесного значения, равного единице на границе, до достаточно малых значений, определяющихся радиационным опустошением уровней. Зависимость потока от физических параметров задачи можно получить качественно в рамках одномерной (только по главным квантовым числам) кинетической модели из условия равенства населенностей нулю при некотором значении главного квантового числа, при котором скорости столкновительных и радиационных процессов сравниваются. Из общих соображений такие значения главных квантовых чисел должны иметь порядок величины n_0 , следующей из формулы (35). В этом действительно можно убедиться, используя одномерную кинетическую модель [1, п. 17.3] в области интересующих нас высоких температур. Действительно, используя связь потока j с производной безразмерной населенности по энергии и полагая поток не зависящим от энергии, легко получить общий вид зависимости населенности от энергии вблизи границы непрерывного спектра:

$$\psi(E) = 1 - j C E^{5/2}, \quad (46)$$

где C — не зависящий от энергии коэффициент, определяемый параметрами задачи. Если определить величину потока j из равенства нулю населенности при некотором значении энергии $E_0 = -1/2n_0^2$, то получится его правильная зависимость от параметров плазмы. При этом, однако, численные значения коэффициента при потоке остаются неопределенными, поскольку значения энергии выбраны лишь по порядку величины. Заметим, что зависимость от граничного квантового числа n_0 , следующая из соотношения (46), очень резкая (пропорциональна n_0^{-5}), так что, например, изменение численного значения n_0 в два раза приведет к изменению потока в $2^5 = 32$ раза. Поэтому более последовательным является расчет потока непосредственно из решения уравнения (45).

Уравнение (45) является, как отмечалось, двумерным уравнением Шредингера с нулевой энергией и эффективным потенциалом, определяемым скоростью радиационного распада. Нас интересует поток по главным квантовым числам (переменной ξ).

Поэтому следует усреднить уравнение (45) по орбитальным переменным η . Эта процедура оправдана при сильной орбитальной диффузии, обеспечиваемой большим значением фактора R в уравнении (45), обусловленным столкновениями с ионами. Усреднение по переменной η (сводящееся к интегрированию уравнения (45) по $2\eta d\eta$), устраняет члены с производной по η , а в последнем члене, определяющем эффективный потенциал, возникает характерная логарифмическая расходимость, устраняемая обрезанием при $\eta_{min} \sim \xi/n_0$. В результате такого усреднения двумерное уравнение Шредингера (45) сводится к одномерному, имеющему вид

$$\xi^4 \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{1}{\xi^4} \frac{\partial}{\partial \xi} \psi_0 - n_0 \frac{8 \ln(n_0/\xi)}{\pi\sqrt{3}} \xi^5 \psi_0 = 0. \quad (47)$$

Проведем исследование решения уравнения (47) с логарифмической точностью. Удобно привести это уравнение к универсальному виду путем замены переменных:

$$\xi' = \xi \left(n_0 \frac{8 \ln n_1}{\pi\sqrt{3}} \right)^{1/7}. \quad (48)$$

В результате уравнение (47) приобретает безразмерный вид:

$$\xi'^4 \frac{\partial}{\partial \xi'} \frac{1}{\xi'^4} \frac{\partial}{\partial \xi'} \psi_0 - \xi'^5 \psi_0 = 0, \quad (49)$$

а величина n_1 определяется из условия

$$\xi' = \frac{n_0}{n_1} \left(n_0 \frac{8 \ln n_1}{\pi\sqrt{3}} \right)^{1/7} = 1$$

и с логарифмической точностью равна

$$n_1 = n_0^{8/7} \left(\frac{64}{7\pi\sqrt{3}} \ln n_0 \right)^{1/7}. \quad (50)$$

Решение уравнения (49) может быть получено в явном аналитическом виде через функции Макдональда:

$$\psi_0 = 7^{-5/7} \frac{2 \sin(5\pi/7) \Gamma(2/7)}{\pi} \xi'^{5/2} K_{5/7} \left(\frac{2}{7} \xi'^{7/2} \right). \quad (51)$$

Интересно, что структура формулы (51) совпадает с аналитическим решением, полученным в одномерной кинетической модели [3], с некоторым различием численных коэффициентов. Безразмерный рекомбинационный поток определяется в соответствии со структурой уравнения (49) соотношением

$$\gamma = -\frac{1}{\xi^4} \frac{\partial \psi_0}{\partial \xi} \quad (52)$$

в отличие от расходящегося выражения (44) для потока в картине чисто классического течения по уровням.

Используя асимптотику решения (51) при $\xi \rightarrow 0$ (на границе сплошного спектра) и формулу (52), получаем для величины полного потока I :

$$I = N_e^2 \left(\frac{4\pi E_0}{T} \right)^{3/2} \frac{1}{c^3} \gamma, \quad (53)$$

$$\gamma \approx 1.08 \left(\frac{64 n_0}{7\pi\sqrt{3}} \ln n_0 \right)^{5/7}.$$

Запишем поток (53) через исходные физические параметры задачи (в атомных единицах), подставляя значения E_0, n_0 из формул (35). Это дает

$$I = C \frac{N^3}{T^{9/2}} \left(\frac{T^4}{N c^3} \right)^{5/7}, \quad (54)$$

где C — численный коэффициент, а поток выражен через поток от трехчастичной рекомбинации, умноженный на безразмерный параметр, определяющий вклад радиационных процессов, и в точности совпадает с приведенными выше оценками (2), следующими из результатов одномерной модели [1]. При этом величины численных коэффициентов C в обоих случаях оказываются удивительно близкими: $C = 70$ для рассматриваемой нами двумерной модели и $C = 58$ для одномерной модели [1]. Столь малое различие численных коэффициентов вполне приемлемо в рамках приближенной (логарифмической) точности обоих расчетов.

Учет только трехчастичной рекомбинации справедлив лишь в узкой области вблизи границы сплошного спектра, где определяющую роль играют столкновения. В действительности здесь необходимо принимать во внимание также и радиационную рекомбинацию, которая для условий реальной плазмы дает для подавляющей области энергетического спектра основной вклад в населенности уровней (см. ниже).

Учет дополнительных источников рекомбинации не может быть получен, как отмечалось, простой подстановкой этих источников в правую часть классических кинетических уравнений (40)–(42). Это обусловлено указанным выше квантовым характером радиационного каскада, приводящего к скачкообразным (нелокальным) переходам между атомными уровнями. Поэтому решение кинетических уравнений в этом случае должно основываться на итерационном методе, описанном выше в разд. 3.

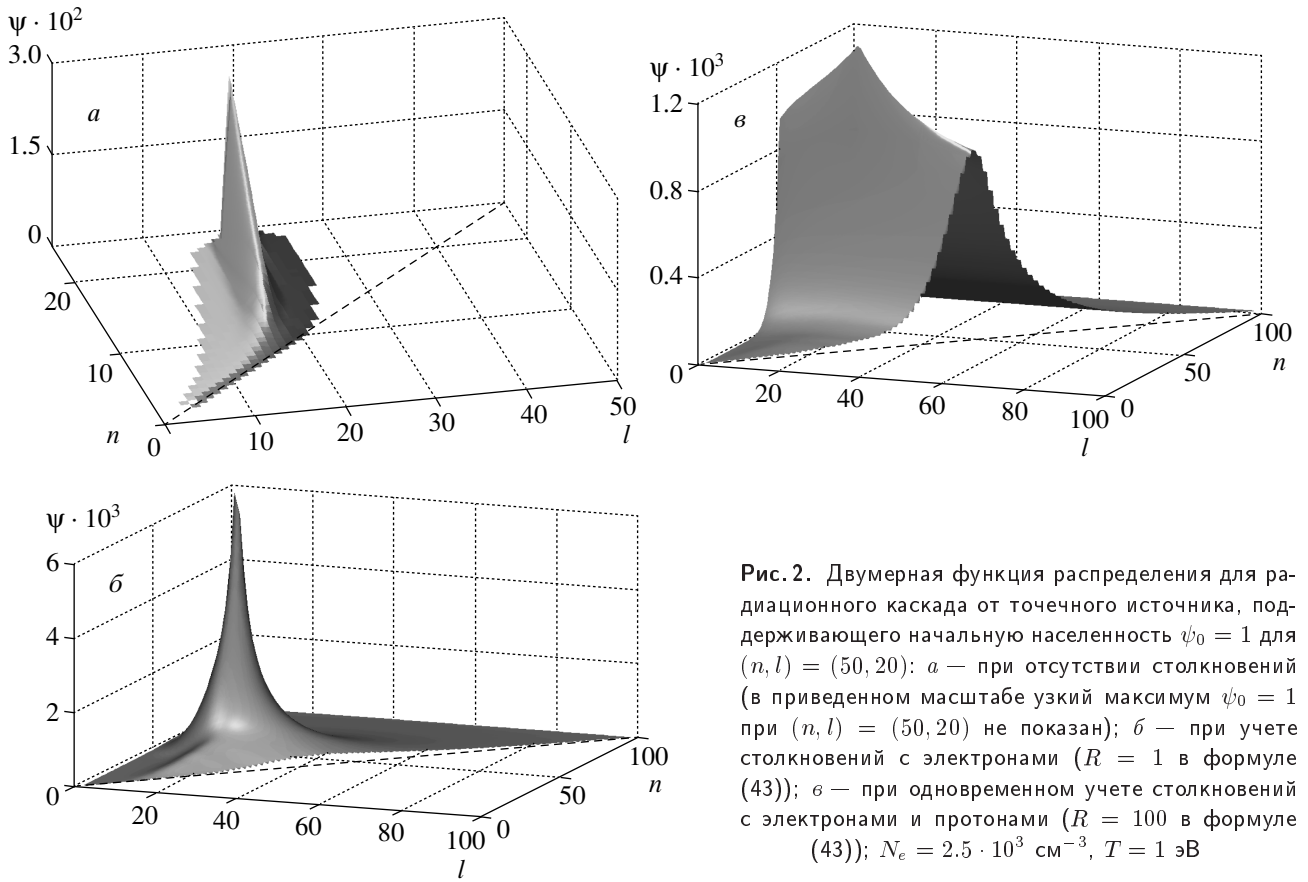


Рис. 2. Двумерная функция распределения для радиационного каскада от точечного источника, поддерживающего начальную населенность $\psi_0 = 1$ для $(n, l) = (50, 20)$: *a* — при отсутствии столкновений (в приведенном масштабе узкий максимум $\psi_0 = 1$ при $(n, l) = (50, 20)$ не показан); *б* — при учете столкновений с электронами ($R = 1$ в формуле (43)); *в* — при одновременном учете столкновений с электронами и протонами ($R = 100$ в формуле (43)); $N_e = 2.5 \cdot 10^3 \text{ см}^{-3}$, $T = 1 \text{ эВ}$

6. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ СОСРЕДОТОЧЕННОГО ИСТОЧНИКА

Решение кинетических уравнений для сосредоточенного (дельта-функционального) источника представляет интерес как с общезначимой точки зрения, демонстрирующей развитие радиационного каскада и влияние на него столкновений, так и в прикладном аспекте для расчета населенностей при селективном лазерном или столкновательном источниках заселения атомных состояний. Процедура расчета состояла во введении источника с весом, равным единице, для определенных значений главного и орбитального квантовых чисел с последующим расчетом радиационно-столкновительного каскада по итерационной процедуре, описанной в разд. 2. Рассматривались параметры плазмы ($T = 1 \text{ эВ}$, $N_e = 2.5 \cdot 10^3 \text{ см}^{-3}$), близкие к условиям астрофизических экспериментов, и две пары значений квантовых чисел (n, l) , $(100, 55)$ и $(50, 20)$. Первая пара квантовых чисел совпадала с их значениями в работе [10] с целью проверки точности наших расчетов. Вторая пара отвечала

уменьшению квантовых чисел примерно вдвое, чтобы продемонстрировать резкое изменение соотношения между излучательными и столкновительными процессами при уменьшении квантовых чисел. Действительно, оценка скорости столкновительных переходов дает зависимость $\hat{L}_c \sim N_e v_e n^4$, тогда как для радиационных переходов получаем $\hat{L}_r \sim n^{-3} l^{-2}$. Ясно, что резкая зависимость отношения столкновительного и радиационного операторов от квантовых чисел должна приводить к резкому различию размытия радиационного каскада по пространству этих квантовых чисел, а также к различию максимумов функции распределения f для этих двух случаев примерно в $(n_{s1}/n_{s2})^7 (l_{s1}/l_{s2})^2 \sim 10^3$ раз вследствие расплывания распределений по большей области фазового пространства.

На рис. 2 показано влияние столкновений на радиационный каскад при $(n, l) = (50, 20)$. Рисунок 2*a* соответствует случаю отсутствия столкновений, когда радиационный каскад развивается вдоль классической характеристики согласно уравнению (12). Включение столкновений с электронами (рис. 2*б*)

приводит к резкому размыванию радиационного каскада по главным и орбитальным квантовым числам. Учет столкновений с ионами (рис. 2в) дополнительно размывает заселенности уровней по орбитальному моменту. В целом рис. 2 позволяет судить об относительной роли излучения и процессов столкновений с различными частицами плазмы.

7. ТРЕХЧАСТИЧНЫЙ ИСТОЧНИК ЗАСЕЛЕНИЯ

Учет трехчастичного источника заселения атомных состояний основан на введении граничного условия, отвечающего термодинамически равновесному значению населенностей на границе сплошного спектра. При этом рекомбинационный поток определяется вторым граничным условием $\psi(\xi \rightarrow \infty) = 0$. Такой подход используется в одномерной кинетике [1] и приводит к известным выражениям для скорости трехчастичной рекомбинации. В рассматриваемом случае двумерного радиационно-столкновительного каскада использование указанных граничных условий непосредственно в уравнениях (40)–(42) приводит, как отмечалось выше, к расходимости полного потока (44) вследствие резких зависимостей классических вероятностей радиационного распада от орбитального момента (переменной η). Поэтому необходимо решать модифицированные квазиклассические кинетические уравнения (20), (45), учитывающие нелокальный характер радиационных переходов.

Результаты двумерных расчетов населенностей уровней в указанной постановке для условий астрофизической плазмы приведены на рис. 3. Видно, что заселение идет от термодинамически равновесной границы сплошного спектра и убывает при уменьшении n вследствие быстрого радиационного опустошения нижних уровней.

8. ФОТОРЕКОМБИНАЦИОННЫЙ ИСТОЧНИК ЗАСЕЛЕНИЯ

Расчеты населенностей для фоторекомбинационного источника заселения проводились по итерационной схеме, описанной в разд. 2. Использовалось различное количество итераций вплоть до двадцати с целью убедиться в сходимости итерационного ряда. Источник фоторекомбинации задается выражением (23), достаточно хорошо описывающим радиационные переходы с большим изменением энергии. В то же время при расчетах радиационного каскада

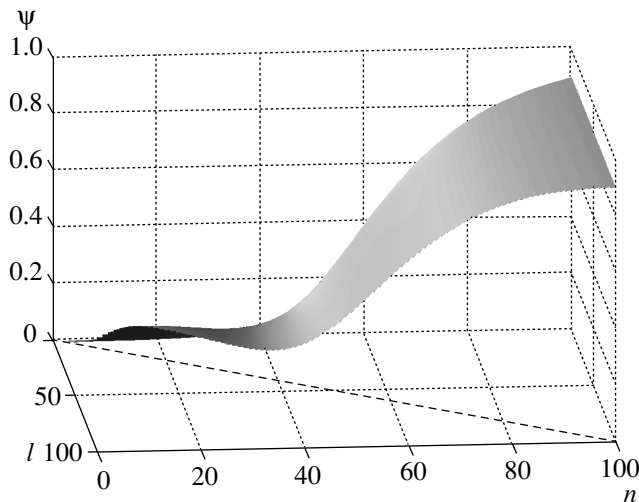


Рис. 3. Двумерная функция распределения при термодинамически равновесной заселенности границы дискретного спектра, $N_e = 2.5 \cdot 10^3 \text{ см}^{-3}$, $T = 1 \text{ эВ}$

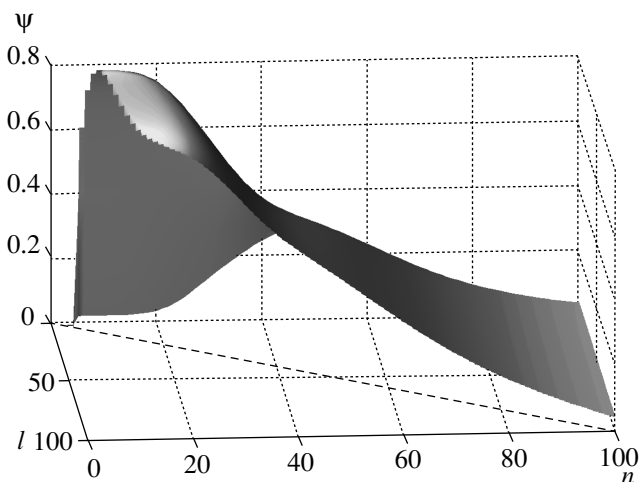


Рис. 4. Двумерная функция распределения при наличии источника фоторекомбинационного заселения (при нулевых граничных условиях на границе сплошного спектра), $N_e = 2.5 \cdot 10^3 \text{ см}^{-3}$, $T = 1 \text{ эВ}$

с различными изменениями энергии и орбитального момента использовалось более точное квазиклассическое выражение (24).

Решение уравнений (20) проводилось численно методом сеток. Для оценки вклада источника интересно получить решение для f при нулевых граничных условиях с одним лишь источником фоторекомбинационного заселения. Эти данные, полученные с учетом столкновений с электронами и протонами

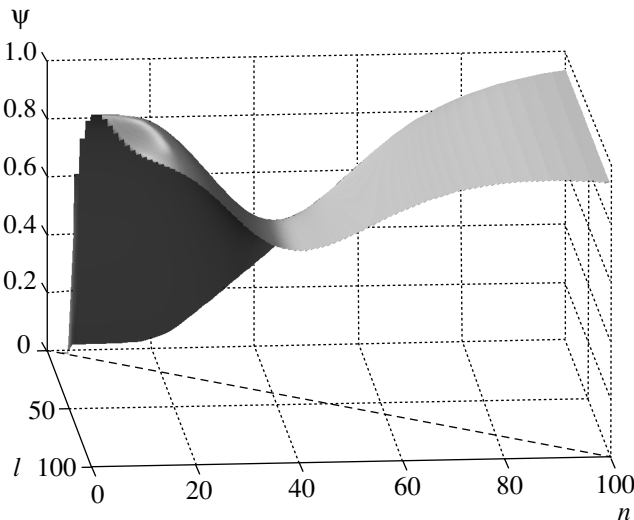


Рис. 5. Полная двумерная функция распределения при одновременном действии трехчастичного и фоторекомбинационного источников заселения (сумма населенностей на рис. 3 и 4); $N_e = 2.5 \cdot 10^3 \text{ см}^{-3}$, $T = 1 \text{ эВ}$

плазмы, приведены на рис. 4. Видно, что учет столкновений с протонами приводит к сглаживанию распределения по орбитальным моментам.

Сравнение функций распределения для трехчастичного (рис. 3) и фоторекомбинационного (рис. 4) источников показывает, что решения для обоих источников оказываются значимыми в существенно различных областях переменных n и l . На рис. 5 приведено полное решение при одновременном действии двух источников заселения. Интересно отметить значительное уменьшение населенностей по сравнению с термодинамически равновесным пределом $\psi = 1$ в промежуточной области переменных n и l .

9. СРАВНЕНИЕ С ОДНОМЕРНЫМИ КИНЕТИЧЕСКИМИ МОДЕЛЯМИ

Интересно сравнить результаты двумерной и одномерной моделей. Такое сравнение достигается путем усреднения исходных двумерных заселенностей по l :

$$\bar{\psi} \equiv \langle \psi \rangle_l = 2 \int \frac{\psi l \, dl}{n^2}.$$

Графики для $\bar{\psi}$ с учетом фоторекомбинационного и трехчастичного источников заселения приведены на рис. 6. Видно, что структура заселенностей при больших n определяется трехчастичной реком-

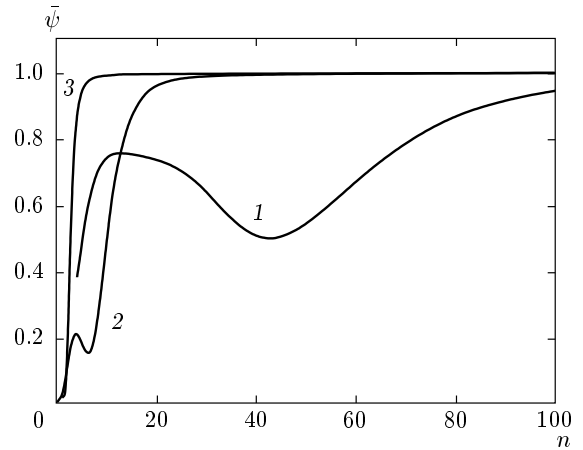


Рис. 6. Полная (с учетом фоторекомбинационного и трехчастичного источников заселения) одномерная функция распределения, полученная интегрированием двумерной функции по переменной l : $\bar{\psi} \equiv \langle \psi \rangle_l = 2 \int \psi l \, dl / n^2$ при $T = 1 \text{ эВ}$ и $N_e = 2.5 \cdot 10^3 \text{ см}^{-3}$ (1), 10^9 см^{-3} (2), 10^{13} см^{-3} (3)

бинацией (граничным условием), которая затем при уменьшении n убывает и основным источником заселения здесь уже является фоторекомбинация. Такое взаимоотношение между трехчастичным и фоторекомбинационным источниками приводит к характерному провалу на кривой заселенностей в промежуточной области, наблюдаемому также в одномерных расчетах [2, 9]. В двумерных расчетах такой провал особенно выделен в области малых l , где радиационные переходы наиболее интенсивны (см. рис. 5).

Подробное сравнение усредненных двумерных заселенностей с результатами одномерных моделей [2, 9] обнаруживает сходство общего поведения заселенностей, однако глубина провала вблизи $n \sim 45$ при малой плотности (кривая 1 на рис. 6) заметно больше в двумерной модели, чем в одномерной.

Интересно также проследить соотношение между численным решением кинетических уравнений для полной функции распределения с учетом всех источников заселения и аналитическим решением (51) для функции ψ_0 при наличии одного трехчастичного источника заселения. Такое сравнение представлено на рис. 7 для достаточно большой плотности $N_e = 10^9 \text{ см}^{-3}$, при которой роль трехчастичной рекомбинации является определяющей для рассматриваемых высоковозбужденных состояний. Видно, что при $n > 10$ результаты численного решения находятся в превосходном соответствии с ана-

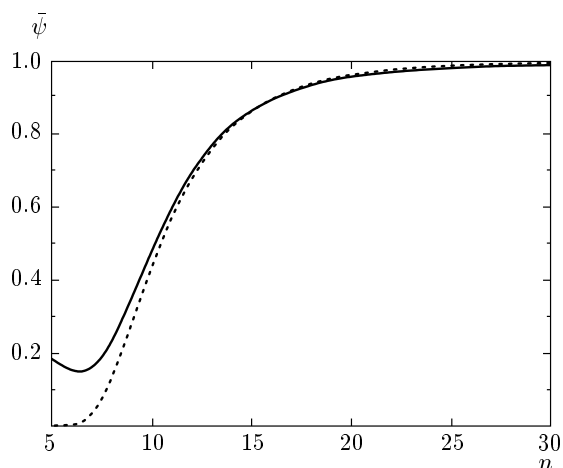


Рис. 7. Полная одномерная функция распределения (сплошная линия) и аналитическое решение (51) для трехчастичного источника заселения (пунктирная линия), $N_e = 10^9 \text{ см}^{-3}$, $T = 1 \text{ эВ}$

литической формулой (51). Различие наблюдается лишь при меньших главных квантовых числах, когда радиационные процессы начинают играть заметную роль.

10. ИНТЕНСИВНОСТИ РИДБЕРГОВСКИХ ЛИНИЙ

Интенсивности ридберговских линий рассчитывались по общей формуле

$$I_{nn'} = \hbar\omega_{nn'} \sum_{l,l'} N_{nl} A(nl; n'l'), \quad (55)$$

где $\hbar\omega_{nn'}$ — энергии рассматриваемых переходов, N_{nl} — населенности верхних атомных уровней, рассчитанные по указанной выше схеме, $A(nl; n'l')$ — вероятности радиационных переходов, рассчитываемые по формуле (24).

Интерес представляют зависимости интенсивностей переходов от величины главного квантового числа верхнего уровня при фиксированной частоте ω наблюдаемых переходов (см. [2]). На рис. 8 представлены интенсивности линий для переходов с уровней $n = 50-100$ при частоте наблюдаемых спектров вблизи $\omega = 8 \cdot 10^{-6}$ ат. ед. При сравнении интенсивностей в случаях статистически равновесной и неравновесной (по рассчитанной выше схеме) заселенностей верхних уровней наблюдается заметное различие между ними, существенное при интерпретации ридберговских спектров.

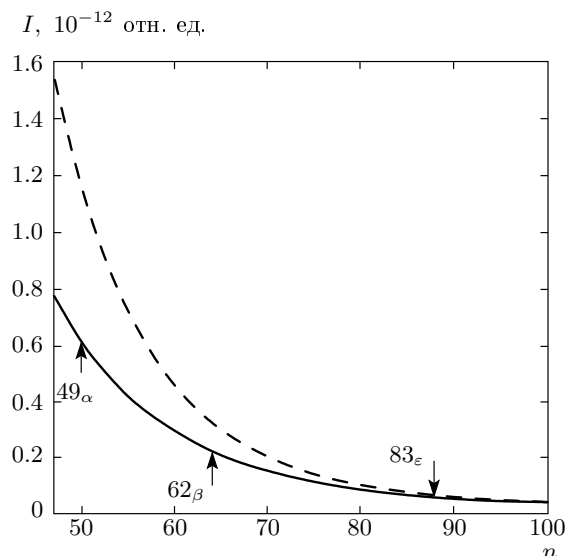


Рис. 8. Интенсивности ридберговских линий для переходов с уровнями $n = 50-100$ при фиксированной частоте наблюдения $\omega = 1/2n^2 - 1/2n'^2 = 8 \cdot 10^{-6}$ ат. ед., соответствующей переходу с $\Delta n = 1$ между уровнями 50 и 49 (минимуму населенностей на рис. 6) при $N_e = 2.5 \cdot 10^3 \text{ см}^{-3}$ и $T = 1 \text{ эВ}$; стрелками указаны положения некоторых ридберговских линий

11. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Развита двумерная квазиклассическая модель радиационно-столкновительного каскада для водородоподобных систем в плазме. Для радиационных переходов предложена итерационная процедура, на каждом шаге последовательно учитывающая квантовый характер радиационных процессов, при этом для вероятностей переходов применяются квазиклассические выражения, симметризованные по начальным и конечным состояниям атома. Коэффициенты столкновительной диффузии в пространстве главного и орбитального квантовых чисел были определены на основе расчета передачи энергии и орбитального момента при классическом столкновении атомного электрона с заряженными частицами плазмы. Модель позволяет избежать расходимостей, возникающих при чисто классическом описании радиационного каскада, и установить соответствие с одномерными моделями расчетов заселенностей. Проведены расчеты заселенностей высоковозбужденных состояний атомарного водорода для точечного (дельта-функционального) источника заселения, характерного для селективного механизма заселения. Результаты демонстрируют размытие радиационного каскада в атоме вследствие столкновений.

Учет трехчастичного и фоторекомбинационного источников заселения проведен для плазмы низкой плотности и умеренной температуры, что соответствует условиям наблюдения рекомбинационных линий в астрофизической плазме. Расчеты обнаруживают заметную неравновесность в заселении по орбитальному квантовому числу l . Проведено сравнение с одномерными расчетами путем усреднения по квантовым числам l . Результаты сравнения обнаруживают характерный минимум заселенностей, обусловленный конкуренцией столкновительного и радиационного заселения состояний. Глубина этого минимума в двумерной модели оказывается заметно большей по сравнению с одномерными моделями.

На основе найденных заселенностей рассчитаны интенсивности спектральных линий в диапазоне частот переходов, соответствующем определенному спектральному интервалу наблюдений. Результаты позволяют судить о степени неравновесности заселенностей ридберговских атомов в астрофизической плазме.

Развитый метод расчета может применяться для других высоковозбужденных атомных систем, в частности, для переходов в спектрах многозарядных ионов в накопительных кольцах, где значения квантовых чисел атомов могут достигать аномально больших значений (порядка 10^3). Наши результаты, основанные на универсальном квазиклассическом подходе, без труда обобщаются на случай многозарядных ионов (в нерелятивистском приближении) путем перехода от атомных к кулоновым единицам измерения параметров задачи [17].

Авторы благодарны И. Л. Бейгману, В. С. Воробьеву и А. Б. Кукушкину за ценные обсуждения. Работа выполнена при поддержке гранта фундаментальных исследований № 20 РНЦ КИ, РФФИ (грант № 06-02-16614-а) и гранта Президента РФ для поддержки ведущих научных школ РФ (№ НШ-9878.2006.2).

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. А. Вайнштейн, И. И. Собельман, Е. А. Юков, *Возбуждение атомов и уширение спектральных линий*, Наука, Москва (1979).
2. Л. М. Биберман, В. С. Воробьев, И. Т. Якубов, *Кинетика неравновесной низкотемпературной плазмы*, Наука, Москва (1982).
3. Р. Л. Сороченко, М. А. Гордон, *Рекомбинационные радиолиты*, Физматлит, Москва (2003).
4. I. L. Beigman, *Astrophys. Space Phys.* **11**, 1 (2001).
5. С. Т. Беляев, Г. И. Будкер, в сб.: *Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций*, т. 3, под ред. М. А. Леонтовича, Изд-во АН СССР (1957), с. 41.
6. А. Б. Кукушкин, В. С. Лисица, *ЖЭТФ* **88**, 1570 (1985).
7. Л. А. Буреева, В. С. Лисица, *Возмущенный атом*, ИздАт, Москва (1997).
8. M. B. Bell, L. W. Avery, E. R. Seaquist, and J. P. Vallee, *Public. Astron. Soc. of the Pacific* **112**, 1236 (2000).
9. H. R. Griem, *Astrophys. J.* **620**, L-133 (2005).
10. V. S. Strel'nitski, V. O. Ponomarev, and H. A. Smith, *Astrophys. J.* **470**, 1118 (1996).
11. M. R. Flannery and D. Vrinceanu, *Phys. Rev. A* **68**, 030502(R) (2003).
12. Р. А. Ганцев, Н. Ф. Казакова, В. П. Крайнов, в сб.: *Химия плазмы*, т. 12, под ред. Б. М. Смирнова, Энергоатомиздат, Москва (1985), с. 96.
13. М. Б. Кадомцев, М. Г. Левашова, В. С. Лисица, *Письма ЖЭТФ* **85**, 599 (2007).
14. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория поля*, Наука, Москва (1974).
15. V. I. Kogan, A. V. Kukushkin, and V. S. Lisitsa, *Phys. Rep.* **213**, 1 (1992).
16. С. П. Гореславский, Н. Б. Делоне, В. П. Крайнов, *ЖЭТФ* **82**, 1789 (1982); *ЖЭТФ* **87**, 1164 (1984).
17. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика*, Наука, Москва (1974).