

КОГЕРЕНТНОЕ ОБРАТНОЕ РАССЕЯНИЕ ПОЛЯРИЗОВАННОГО СВЕТА ОТ СРЕДЫ С КРУПНЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

Е. Е. Городничев, А. И. Кузовлев, Д. Б. Rogozkin*

*Московский инженерно-физический институт
115409, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 6 июня 2007 г.

Найдены приближенные аналитические выражения для интенсивностей поляризованных компонент света, отраженного от неупорядоченной среды с крупными (размер больше длины волны) дискретными частицами. Использован метод расщепления векторного уравнения переноса, основанный на выделении основных и дополнительных поляризационных мод. Полученные результаты устанавливают взаимосвязь между формой пика в угловом распределении рассеянного назад излучения заданной поляризации и оптическими характеристиками среды и хорошо согласуются с данными экспериментов и численных расчетов.

PACS: 42.25.Fx, 42.25.Ja

1. ВВЕДЕНИЕ

Эффект когерентного усиления обратного рассеяния света, предсказанный в работах [1–3], экспериментально был обнаружен в середине 80-х годов прошлого века [4–6]. За прошедшие два десятилетия выполнено значительное число экспериментальных и теоретических исследований этого эффекта (см., например, работы [7–24]). Большинство теоретических исследований основано на описании рассеяния электромагнитного излучения в скалярном приближении. Однако существует ряд эффектов [7, 8, 22], которые обусловлены векторной природой света и не могут быть описаны в рамках скалярной теории. В качестве примера можно указать на наблюдавшееся еще в первых экспериментах [7, 8] увеличение амплитуды пика когерентного обратного рассеяния ортогонально поляризованных волн с ростом размеров неоднородностей среды.

Как известно [1, 2], пик когерентного обратного рассеяния возникает из-за интерференции волн, прошедших через одни и те же неоднородности в противоположных направлениях. В отличие от скалярных волн при распространении электромагнитного излучения следует учитывать интерференцию полей различной поляризации. Существенно, что интерферен-

ция между ортогонально поляризованными волнами и между волнами с одинаковой поляризацией разрушается на разных пространственных масштабах, что отражается на форме пика обратного рассеяния.

Интерференция электромагнитных волн в неупорядоченной среде описывается корреляционными функциями $\langle E_i E_k^* \rangle$, где E_i , E_k^* — компоненты вектора напряженности электрического поля, $\langle \dots \rangle$ — усреднение по расположению рассеивателей. Корреляционные функции непосредственно выражаются через параметры Стокса, которые определяют состояние поляризации рассеянного излучения. Согласно [25–28], имеются два фундаментальных механизма деполаризации света, ответственных за пространственное затухание параметров Стокса. «Геометрический» механизм обусловлен эффектом Рytова [29] — плоскость поляризации поворачивается согласованно с искривлением траектории светового луча. Плоскости поляризации различных лучей, имеющих из-за многократного рассеяния случайные траектории, по мере изотропизации пучка по направлениям становятся хаотически ориентированными, и свет деполаризуется [30]. «Динамический» механизм обусловлен различием амплитуд однократно рассеянных волн, поляризованных во взаимно перпендикулярных плоскостях [30, 31]. Деполаризация наступает по мере нарастания разброса амплитуд ортогонально поляризованных волн.

*E-mail: gorodn@theor.mephi.ru

Существование двух механизмов деполяризации является причиной различий в затухании параметров Стокса и, соответственно, корреляционных функций $\langle E_i E_k^* \rangle$. При рассеянии линейно поляризованного света действуют оба механизма деполяризации. Деполяризация циркулярно поляризованного света происходит только за счет динамического механизма. Циркулярно поляризованный пучок можно представить как суперпозицию двух линейно поляризованных волн равной амплитуды, сдвинутых по фазе на $\pi/2$. Рытовское вращение плоскостей поляризации этих волн не меняет их амплитуд и сдвига фаз между ними и поэтому не приводит к деполяризации циркулярно поляризованного света. В средах с крупномасштабными слабопреломляющими неоднородностями (например, в водной суспензии латекса) динамический механизм становится заметным только на больших расстояниях, превышающих длину изотропизации — транспортную длину $l_{tr} = l / (1 - \langle \cos \gamma \rangle)$, где l — длина свободного пробега фотона относительно упругого рассеяния, $\langle \cos \gamma \rangle$ — средний косинус угла однократного рассеяния, $1 - \langle \cos \gamma \rangle \ll 1$ [32–34]. В таких средах должно наблюдаться относительно медленное (на масштабах транспортной длины l_{tr}) затухание циркулярной поляризации. Этот эффект экспериментально обнаружен в работах [32–34], а его теоретическое объяснение дано в работе [25], в которой было также показано, что эффект медленного затухания циркулярной поляризации напрямую связан с наблюдавшимся [7, 8] увеличением амплитуды пика когерентного обратного рассеяния ортогонально поляризованных волн с ростом размеров неоднородностей.

Поляризационные особенности пика когерентного обратного рассеяния наиболее подробно исследованы для сред с рэлеевскими рассеивателями (размер a рассеивателя меньше длины волны λ) [15–19]. Случай крупномасштабных неоднородностей ($a \gg \lambda$) теоретически исследован в меньшей степени. Аналитические результаты получены в приближении двукратного рассеяния [14, 23, 24]. Для водной суспензии частиц латекса и ряда других сред имеются результаты численного интегрирования векторного уравнения переноса для фактора усиления рассеяния точно назад [20]. Полученные методом Монте-Карло данные об угловом распределении поляризованных компонент излучения в окрестности направления назад относятся к случаю, когда анизотропия однократного рассеяния выражена достаточно слабо [21].

Ниже в развитие работ [25, 35] дано приближенное аналитическое решение задачи о когерентном

усилении обратного рассеяния поляризованного света от сред с крупными неоднородностями. Найдена связь между интерференционными вкладами в интенсивности поляризованных компонент отраженного излучения и элементами матрицы Грина векторного уравнения переноса и использован развитый в работах [26–28] приближенный метод решения этого уравнения. Проанализирована роль механизмов деполяризации при интерференции электромагнитных волн. В пренебрежении динамическим механизмом ортогонально поляризованные волны интерферируют между собой, как и волны одной поляризации, и векторная природа света не сказывается на когерентном обратном рассеянии. Поляризационная зависимость пика обратного рассеяния обусловлена динамическим механизмом деполяризации. Пик в угловом распределении обратнорассеянных ортогонально поляризованных волн становится более тупым. Коэффициент усиления ортогонально поляризованной компоненты оказывается зависящим от размера неоднородностей. Показано также, что для волн, поляризованных по кругу, угол раствора треугольного пика в угловом распределении излучения, отраженного без изменения поляризации, оказывается в два раза большим, чем для линейно поляризованных волн.

Полученные в настоящей работе результаты согласуются с данными экспериментов и численных расчетов и могут использоваться в оптических исследованиях многократно рассеивающих сред.

2. ОБЩИЕ СООТНОШЕНИЯ

Пусть на поверхность среды, состоящей из случайно расположенных крупных (размер a много больше длины волны λ) частиц, падает поляризованная плоская световая волна.

Задача о вычислении углового распределения и поляризационных характеристик рассеянного излучения сводится к нахождению усредненной по расположению рассеивателей билинейной комбинации

$$\Gamma_{ijkl}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2) = \langle G_{ik}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}'_1) G_{jl}^*(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}'_2) \rangle, \quad (1)$$

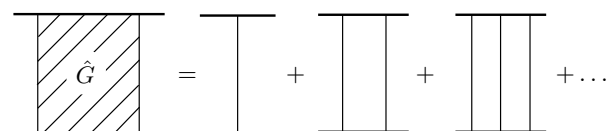


Рис. 1

где $G_{ik}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ — функция Грина светового поля в среде [36, 37]. В условиях слабой локализации ($\lambda \ll l$) основной вклад в $\hat{\Gamma}$ дает сумма \hat{G} диаграмм лестничного типа [36, 37] (рис. 1)

$$\Gamma_{ijkl}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2) \approx G_{ijkl}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2). \quad (2)$$

Выделяя в функции \hat{G} «быстрые» $((\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)/2, (\mathbf{r}'_1 + \mathbf{r}'_2)/2)$ и «медленные» $(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}'_2)$ переменные, функцию \hat{G} можно представить в следующем виде [36, 37]:

$$G_{ijkl}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2) \approx \frac{1}{(2\pi)^4} \int d\mathbf{n} d\mathbf{n}' \times \exp[ik_0 \mathbf{n} \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) + ik_0 \mathbf{n}' \cdot (\mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}'_2)] \times G_{ijkl}\left(\frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{2}, \mathbf{n} \middle| \frac{\mathbf{r}'_1 + \mathbf{r}'_2}{2}, \mathbf{n}'\right), \quad (3)$$

где векторы \mathbf{n} и \mathbf{n}' совпадают с направлениями движения рассеянных и падающих фотонов с волновыми векторами \mathbf{k} и \mathbf{k}' , $(\mathbf{n} = \mathbf{k}/k_0 = \{\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta\}k_0 = |\mathbf{k}|, |\mathbf{k}'|)$. Зная величину $\hat{G}(\mathbf{r}, \mathbf{n}|\mathbf{r}', \mathbf{n}')$, матрицу плотности рассеянного излучения для падающей плоской волны можно записать в виде [38]

$$\rho_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = \langle E_i E_j^* \rangle = \int d\mathbf{r}'_{||} G_{ijkl}(\mathbf{r}, \mathbf{n}|z'=0, \mathbf{r}'_{||}, \mathbf{n}_0) \rho_{kl}^{(0)}. \quad (4)$$

Здесь интегрирование ведется по поверхности среды, $\mathbf{r}'_{||} = (x', y')$, $\rho_{kl}^{(0)}$ — поляризационная матрица плотности падающего света.

Величина $G_{ijkl}(\mathbf{r}, \mathbf{n}|\mathbf{r}', \mathbf{n}')$ и матрица плотности ρ_{ij} удовлетворяют условию поперечности. В частности,

$$n_i \rho_{ij} = \rho_{ij} n_j = 0. \quad (5)$$

Соотношение (4) записано для произвольной декартовой системы координат. Удобно перейти в систему отсчета, связанную с направлением распространения \mathbf{n} (рис. 2). В этой системе обычно используется базис

$$\mathbf{e}_{||} = \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \theta}, \quad \mathbf{e}_{\perp} = \mathbf{n} \times \mathbf{e}_{||}, \quad \mathbf{n}. \quad (6)$$

Раскладывая напряженность электрического поля рассеянной волны по ортам (6),

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_{||} E_{||} + \mathbf{e}_{\perp} E_{\perp}, \quad (7)$$

получим матрицу плотности в виде

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} \langle |E_{||}|^2 \rangle & \langle E_{||} E_{\perp}^* \rangle \\ \langle E_{||}^* E_{\perp} \rangle & \langle |E_{\perp}|^2 \rangle \end{pmatrix}. \quad (8)$$

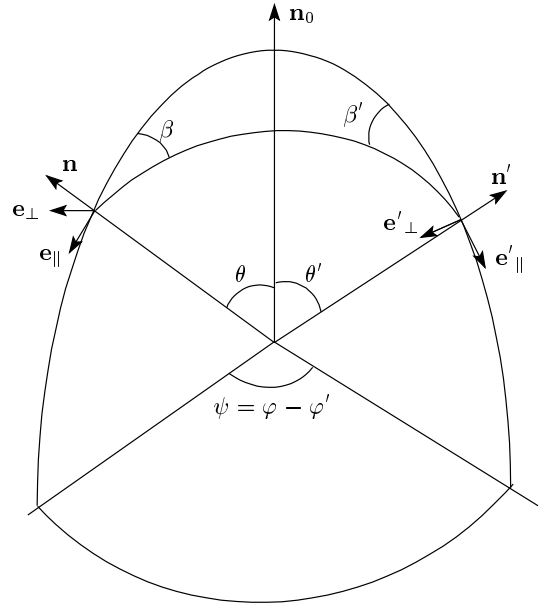


Рис. 2

Матрицу плотности $\rho_{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta = ||, \perp$) можно представить в виде разложения по четырем матрицам — единичной матрице и матрицам Паули [15]:

$$\rho_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = \frac{1}{2} S_i \sigma_{\alpha\beta}^i, \quad \sigma_{\alpha\beta}^0 = \delta_{\alpha\beta}, \quad (9)$$

где коэффициенты разложения S_i — измеряемые на опыте величины, а именно параметры Стокса [22, 38, 39]:

$$\hat{S} = \begin{pmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I \\ Q \\ U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle E_{||} E_{||}^* + E_{\perp} E_{\perp}^* \rangle \\ \langle E_{||} E_{||}^* - E_{\perp} E_{\perp}^* \rangle \\ \langle E_{||} E_{\perp}^* + E_{||}^* E_{\perp} \rangle \\ i \langle E_{||} E_{\perp}^* - E_{||}^* E_{\perp} \rangle \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Как показано в работах [26–28], для описания многократного рассеяния света в средах с крупными неоднородностями вместо базиса (6) удобнее использовать циркулярный базис

$$\mathbf{e}_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_{||} \mp i \mathbf{e}_{\perp}), \quad \mathbf{n}. \quad (11)$$

В этом базисе вектор напряженности электрического поля есть суперпозиция напряженностей полей

волн с левой (+) и правой (-) круговыми поляризациями

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_+ E_+ + \mathbf{e}_- E_- \quad (12)$$

Преимущество циркулярного базиса по сравнению с базисом (6) состоит в том, что матрица поворота вокруг вектора \mathbf{n} на угол α оказывается диагональной (в отличие от соответствующей матрицы поворота в базисе (6)) [39]:

$$\begin{pmatrix} E'_- \\ E'_+ \end{pmatrix} = \hat{M}(\alpha) \begin{pmatrix} E_- \\ E_+ \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_- \\ E_+ \end{pmatrix} \quad (13)$$

Матрица плотности в циркулярном представлении связана с параметрами Стокса соотношением

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} \langle |E_-|^2 \rangle & \langle E_- E_+^* \rangle \\ \langle E_+^* E_- \rangle & \langle |E_+|^2 \rangle \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I + V & Q - iU \\ Q + iU & I - V \end{pmatrix} \quad (14)$$

На практике обычно вместо матрицы плотности (14) используется образованный из ее элементов вектор-столбец [22, 40]

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \hat{I} = \begin{pmatrix} \langle E_- E_+^* \rangle \\ \langle |E_+|^2 \rangle \\ \langle |E_-|^2 \rangle \\ \langle E_+^* E_- \rangle \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} Q - iU \\ I - V \\ I + V \\ Q + iU \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I_2 \\ I_0 \\ I_{-0} \\ I_{-2} \end{pmatrix}, \quad (15)$$

который является аналогом вектора (10) для циркулярного представления. Связь вектора \hat{I} рассеянного излучения с вектором $\hat{I}^{(0)}$ падающего излучения имеет вид

$$\hat{I} = \hat{G} \hat{I}^{(0)}, \quad (16)$$

где

$$\hat{G} = \begin{pmatrix} G_{22} & G_{20} & G_{2-0} & G_{2-2} \\ G_{02} & G_{00} & G_{0-0} & G_{0-2} \\ G_{-02} & G_{-00} & G_{-0-0} & G_{-0-2} \\ G_{-22} & G_{-20} & G_{-2-0} & G_{-2-2} \end{pmatrix} \quad (17)$$

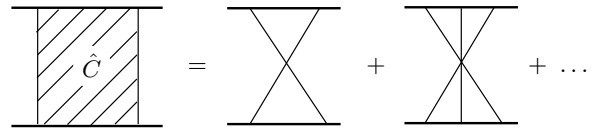


Рис. 3

— поляризационная матрица Грина в циркулярном представлении.

Если функцию Грина G_{ijkl} рассматривать в базисе (11), $G_{ijkl} = G_{\alpha\beta\gamma\delta}$ (индексы $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ принимают два значения, «+» или «-»), то нетрудно найти ее связь с матрицей (17) (см. Приложение А):

$$G_{mn}(\mathbf{r}, \mathbf{n} | \mathbf{r}', \mathbf{n}') = \Sigma_{\alpha\beta}^m G_{\alpha\beta\gamma\delta}(\mathbf{r}, \mathbf{n} | \mathbf{r}', \mathbf{n}') \Sigma_{\gamma\delta}^n, \quad (18)$$

где $\hat{\Sigma}$ — матричные единицы второго ранга [41].

Если в матрице $G_{mn}(\mathbf{r}, \mathbf{n} | \mathbf{r}', \mathbf{n}')$ положить $z = z' = 0$ и выполнить интегрирование по $\mathbf{r}_{\parallel} - \mathbf{r}'_{\parallel}$, то получим искомую величину, описывающую поляризацию отраженного излучения для источника в виде плоской волны:

$$G_{mn}(\mathbf{n} | \mathbf{n}_0) = \int d(\mathbf{r}_{\parallel} - \mathbf{r}'_{\parallel}) \times G_{mn}(z = 0, \mathbf{r}_{\parallel} - \mathbf{r}'_{\parallel}, \mathbf{n} | z' = 0, \mathbf{n}_0). \quad (19)$$

При вычислении углового распределения волн в окрестности направления точно назад в выражении (1) для $\hat{\Gamma}$ помимо лестничных диаграмм необходимо учитывать вклад веерных (максимально перекрестных) диаграмм (рис. 3) [2]. Эти диаграммы описывают интерференционный вклад в обратнорассеянное излучение. В условиях симметрии относительно обращения времени сумму веерных диаграмм \hat{C} можно выразить через «лестничный» вклад. Связь между \hat{C} и \hat{G} получается перестановкой аргументов и индексов [15]:

$$C_{ijkl}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2) = G'_{ilkj}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2), \quad (20)$$

здесь и ниже матрица \hat{G}' отличается от \hat{G} тем, что из нее исключен вклад однократного рассеяния.

Используя соотношение (20) и связь суммы веерных диаграмм в координатном представлении с угловым распределением обратнорассеянных волн [10], получаем равенство

$$C_{ijkl}(\mathbf{n} | \mathbf{n}_0) = \int d(\mathbf{r}_{\parallel} - \mathbf{r}'_{\parallel}) \times \exp \left[ik_0(\mathbf{n} + \mathbf{n}_0) \cdot (\mathbf{r}_{\parallel} - \mathbf{r}'_{\parallel}) \right] \times G'_{ilkj}(z = 0, \mathbf{r}_{\parallel} - \mathbf{r}'_{\parallel}, -\mathbf{n}_0 | z' = 0, \mathbf{n}_0), \quad (21)$$

при выводе которого учтено, что угловая зависимость матрицы \hat{C} определяется фурье-образом функции \hat{G}' по медленной переменной $\mathbf{r}_{\parallel} - \mathbf{r}'_{\parallel}$ и поэтому является резкой функцией величины $k_0(\mathbf{n}_0 + \mathbf{n})$ (на таких угловых масштабах в выражении для $\hat{G}'(\mathbf{r}, \mathbf{n} | \mathbf{r}', \mathbf{n}_0)$ можно положить $\mathbf{n} = -\mathbf{n}_0$).

Когерентный вклад в отражение, как и соотношение (18), может быть записан в циркулярном представлении:

$$C_{mn} = \Sigma_{\alpha\beta}^m C_{\alpha\beta\gamma\delta} \Sigma_{\gamma\delta}^n. \quad (22)$$

Учитывая связь \hat{C} и \hat{G}' (20), представляем $C_{\alpha\beta\gamma\delta}$ в виде

$$C_{\alpha\beta\gamma\delta} = \Sigma_{\alpha\delta}^m G'_{mn} \Sigma_{\gamma\beta}^n \quad (23)$$

и, подставляя (22) в (23) (см. Приложение А), находим

$$C_{kl} = T_{\beta\delta}^{ki} G'_{ij} T_{\beta\delta}^{jl}, \quad (24)$$

где

$$T_{\alpha\beta}^{ik} = \Sigma_{\delta\alpha}^i \Sigma_{\delta\beta}^k. \quad (25)$$

Из соотношений (24) и (76) в Приложении А следует, что матрица \hat{C} когерентного вклада в отражение в циркулярном представлении связана с \hat{G}' следующим образом:

$$\hat{C} = \begin{pmatrix} G'_{22} & G'_{20} & G'_{-02} & G'_{-00} \\ G'_{02} & G'_{00} & G'_{-22} & G'_{-20} \\ G'_{2-0} & G'_{2-2} & G'_{-0-0} & G'_{-0-2} \\ G'_{0-0} & G'_{0-2} & G'_{-2-0} & G'_{-2-2} \end{pmatrix}. \quad (26)$$

Здесь предполагается, что каждый матричный элемент G'_{mn} представляет собой интегральное выражение:

$$G'_{mn} = \int d(\mathbf{r}_{\parallel} - \mathbf{r}'_{\parallel}) \exp[ik_0(\mathbf{n} + \mathbf{n}_0) \cdot (\mathbf{r}_{\parallel} - \mathbf{r}'_{\parallel})] \times G'_{mn}(z = 0, \mathbf{r}_{\parallel} - \mathbf{r}'_{\parallel}, -\mathbf{n}_0 | z' = 0, \mathbf{n}_0). \quad (27)$$

Полученные соотношения составляют основу для вычисления интенсивности поляризованных составляющих обратнорассеянного света с учетом интерференции волн в окрестности направления точно назад.

Формулы (17), (26) существенно упрощаются в случае, когда излучение падает по нормали к поверхности статистически изотропной среды. Именно эта

ситуация характерна для большинства экспериментов. Согласно [22, 40], в этом случае для рассеяния в направлении назад справедливы равенства

$$G_{\pm 2 \pm 0} = G_{\pm 2 \mp 0} = G_{\pm 0 \pm 2} = G_{\mp 0 \pm 2} = G_{\pm 2 \pm 2} = 0, \quad (28)$$

и матрица (17) приобретает вид

$$\hat{G} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & G_{-22} \\ 0 & G_{00} & G_{0-0} & 0 \\ 0 & G_{-00} & G_{-0-0} & 0 \\ G_{2-2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (29)$$

Для интерференционного вклада находим

$$\hat{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & G'_{-00} \\ 0 & G'_{00} & G'_{-22} & 0 \\ 0 & G'_{2-2} & G'_{-0-0} & 0 \\ G'_{0-0} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (30)$$

Отметим, что азимутальная зависимость матричных элементов G_{2-2} и G_{-22} в случае нормального падения имеет вид [26]

$$G_{2-2} = G_{-22}^* = w e^{-2i\varphi} \quad (31)$$

и в плоскости рассеяния $G_{2-2} = G_{-22}^* = w$.

Для направления точно назад ($\mathbf{n} = -\mathbf{n}_0$) формулы, аналогичные (29), (30), были выведены ранее для рэлеевского случая [15] и с помощью теоремы взаимности для произвольных рассеивателей [20].

Используя матрицы (29) и (30), можно определить интенсивности поляризованных составляющих отраженного излучения при различных поляризациях падающего пучка.

При нормальном падении линейно поляризованного света единичной интенсивности имеем

$$I^{(0)} = I_{\parallel}^{(0)} + I_{\perp}^{(0)} = 1, \quad Q^{(0)} = I_{\parallel}^{(0)} - I_{\perp}^{(0)} = 1, \quad (32) \\ U^{(0)} = V^{(0)} = 0.$$

Согласно формулам (29), (30), некогерентный ($I_{\parallel, \perp}^L$) и когерентный ($I_{\parallel, \perp}^C$) вклады в интенсивности компонент, поляризованных в направлениях $\mathbf{e}_{\parallel, \perp}$ в плоскости рассеяния, определяются выражениями

$$I_{\parallel, \perp}^L = \frac{1}{4} (G_{00} + G_{-0-0} + G_{-00} + G_{0-0} \pm 2w), \quad (33)$$

$$I_{\parallel, \perp}^C(\mathbf{q}) = \frac{1}{4} [G'_{00}(\mathbf{q}) + G'_{-0-0}(\mathbf{q}) \pm G'_{-00}(\mathbf{q}) \pm G'_{0-0}(\mathbf{q}) + 2w'(\mathbf{q})], \quad (34)$$

где \mathbf{q} — параллельная поверхности среды составляющая вектора $k_0(\mathbf{n} + \mathbf{n}_0)$.

В случае когерентного обратного рассеяния циркулярно поляризованного света исходные параметры Стокса равны (падающую волну считаем поляризованной против часовой стрелки)

$$I^{(0)} = V^{(0)} = 1, \quad Q^{(0)} = U^{(0)} = 0. \quad (35)$$

Тогда для компонент $I_{\pm}^{L,C}$ имеем

$$\begin{aligned} I_{-}^L &= \frac{1}{2}(G_{00} + G_{-0-0}), \\ I_{+}^L &= \frac{1}{2}(G_{-00} + G_{0-0}), \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} I_{-}^C(\mathbf{q}) &= \frac{1}{2}[G'_{00}(\mathbf{q}) + G'_{-0-0}(\mathbf{q})], \\ I_{+}^C(\mathbf{q}) &= w'(\mathbf{q}). \end{aligned} \quad (37)$$

При падении неполяризованного пучка исходные значения параметров Стокса есть

$$I^{(0)} = 1, \quad Q^{(0)} = U^{(0)} = V^{(0)} = 0. \quad (38)$$

В этом случае интенсивности поляризованных компонент отраженного излучения равны между собой:

$$\begin{aligned} I_{\parallel}^L &= I_{\perp}^L = I_{+}^L = I_{-}^L = \\ &= \frac{1}{4}(G_{00} + G_{-0-0} + G_{-00} + G_{0-0}), \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} I_{\parallel}^C(\mathbf{q}) &= I_{\perp}^C(\mathbf{q}) = I_{+}^C(\mathbf{q}) = I_{-}^C(\mathbf{q}) = \\ &= \frac{1}{4}[G'_{00}(\mathbf{q}) + G'_{-0-0}(\mathbf{q}) + 2w'(\mathbf{q})]. \end{aligned} \quad (40)$$

Приведенные выше формулы (33), (34), (36), (37) и (39), (40) позволяют вычислить интенсивности поляризованных компонент обратнорассеянного излучения, если известно решение векторного уравнения переноса для элементов $G_{mn}(\mathbf{r}, \mathbf{n}|\mathbf{r}, \mathbf{n}_0)$.

3. ВЕКТОРНОЕ УРАВНЕНИЕ ПЕРЕНОСА

Векторное уравнение переноса для элементов G_{mn} матрицы Грина выглядит следующим образом [22, 40]:

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{n} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + n_0 \sigma_{tot} \right) G_{mn}(\mathbf{r}, \mathbf{n}|\mathbf{r}', \mathbf{n}') &= \\ = n_0 \int d\mathbf{n}'' d_{mk}(\mathbf{n}, \mathbf{n}'') G_{kn}(\mathbf{r}, \mathbf{n}''|\mathbf{r}', \mathbf{n}'), \end{aligned} \quad (41)$$

где $\sigma_{tot} = \sigma + \sigma_a$ — полное сечение рассеяния, σ и σ_a — сечения упругого рассеяния и поглощения, n_0 — число рассеивателей в единице объема. Матрица рассеяния \hat{d} равна [22, 40]

$$d_{mn} = \begin{pmatrix} a_{+} e^{2i\chi_{+}} & b_{+} e^{-2i\beta} & b_{+} e^{-2i\beta} & a_{-} e^{2i\chi_{-}} \\ b_{+} e^{-2i\beta'} & a_{+} & a_{-} & b_{-} e^{2i\beta'} \\ b_{-} e^{-2i\beta'} & a_{-} & a_{+} & b_{+} e^{2i\beta'} \\ a_{-} e^{-2i\chi_{-}} & b_{-} e^{2i\beta} & b_{-} e^{2i\beta} & a_{+} e^{-2i\chi_{+}} \end{pmatrix}, \quad (42)$$

где

$$\begin{aligned} \chi_{\pm} &= \pi - (\beta \pm \beta'), \\ \cos 2\beta &= 1 - \frac{2(1 - \mu'^2)(1 - \cos^2 \psi)}{1 - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}')^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin 2\beta &= \\ &= \frac{2\sqrt{1 - \mu'^2}(\mu' \sqrt{1 - \mu'^2} - \mu \sqrt{1 - \mu'^2} \cos \psi) \sin \psi}{1 - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}')^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}' &= \mu \mu' + \sqrt{(1 - \mu^2)(1 - \mu'^2)} \cos \psi, \quad \mu = \cos \theta, \\ \mu' &= \cos \theta', \quad \psi = \varphi - \varphi'. \end{aligned}$$

Функции $\cos 2\beta'$ и $\sin 2\beta'$ отличаются от $\cos 2\beta$, $\sin 2\beta$ заменой μ на μ' (см. рис. 2).

Входящие в матрицу (42) дифференциальные сечения a_{\pm} и b_{\pm} можно выразить через амплитуды $A_{\parallel, \perp}$ однократно рассеянных волн, поляризованных параллельно и перпендикулярно плоскости рассеяния [39]:

$$\begin{aligned} a_{\pm}(\cos \gamma) &= \frac{1}{4} |A_{\parallel}(\cos \gamma) \pm A_{\perp}(\cos \gamma)|^2, \\ b_{\pm}(\cos \gamma) &= \frac{1}{4} [A_{\parallel}(\cos \gamma) \mp A_{\perp}(\cos \gamma)] \times \\ &\times [A_{\parallel}^*(\cos \gamma) \pm A_{\perp}^*(\cos \gamma)]. \end{aligned} \quad (43)$$

В среде с крупными (размер больше длины волны) неоднородностями однократное рассеяние на отдельной неоднородности происходит преимущественно на малые углы и решение векторного уравнения (41) можно искать с помощью метода последо-

вательных приближений [26–28]. В первом приближении можно пренебречь недиагональными элементами матрицы \hat{d} . Тогда уравнение (41) распадается на три независимых уравнения для трех основных мод — скалярной моды,

$$I_{scal} = G_{00} + G_{0-0}, \quad (44)$$

циркулярно поляризованной моды (четвертого параметра Стокса),

$$V = G_{00} - G_{0-0}, \quad (45)$$

и основной моды линейной поляризации,

$$W = G_{22}e^{-2i\varphi}. \quad (46)$$

В приближении основных поляризационных мод имеем

$$G_{00} = G_{-0-0}, \quad G_{-00} = G_{0-0}.$$

В следующем приближении учет недиагональных элементов матрицы \hat{d} приводит к появлению дополнительных мод («обертонов»), подробнее см. работы [26–28].

Скалярная, циркулярно поляризованная и линейно поляризованная моды удовлетворяют соответственно уравнениям [26–28]

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{n} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + n_0 \sigma_{tot} \right) I_{scal}(\mathbf{r}, \mathbf{n} | \mathbf{r}', \mathbf{n}') = \\ = n_0 \int d\mathbf{n}'' a_1(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}'') I_{scal}(\mathbf{r}, \mathbf{n}'' | \mathbf{r}', \mathbf{n}'), \end{aligned} \quad (47)$$

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{n} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + n_0 \sigma_{tot} \right) V(\mathbf{r}, \mathbf{n} | \mathbf{r}', \mathbf{n}') = \\ = n_0 \int d\mathbf{n}'' a_2(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}'') V(\mathbf{r}, \mathbf{n}'' | \mathbf{r}', \mathbf{n}'), \end{aligned} \quad (48)$$

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{n} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + n_0 \sigma_{tot} \right) W(\mathbf{r}, \mathbf{n} | \mathbf{r}', \mathbf{n}_0) = \\ = n_0 \int d\mathbf{n}'' a_+(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}'') \times \\ \times \exp \{ 2i [\chi_+(\mathbf{n}, \mathbf{n}'') - (\varphi - \varphi'')] \} W(\mathbf{r}, \mathbf{n}'' | \mathbf{r}', \mathbf{n}_0), \end{aligned} \quad (49)$$

где $a_{1,2} = a_+ \pm a_-$. Уравнение (44) совпадает со скалярным уравнением переноса для интенсивности.

При нормальном падении вкладом моды W в окрестности направления назад можно пренебречь, $G_{22} = G_{-2-2} = 0$ [22, 26–28], и в интенсивности поляризованных составляющих обратного рассеяния дают вклад только две основные моды, I_{scal} и V .

Хотя в направлении назад $W = 0$, величину W необходимо знать при вычислении значений элементов G_{2-2} , G_{-22} . Эти элементы имеют дополнительную малость по сравнению с $G_{\pm 0 \pm 0}$ и $G_{\pm 0 \mp 0}$.

Они возникают при учете недиагональных элементов матрицы \hat{d} и являются «обертонами» по отношению к основным модам.

В случае нормального падения величины G_{2-2} , G_{-22} выражаются через функцию w (см. соотношение (31)), которая подчиняется следующему уравнению [26–28]:

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{n} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + n_0 \sigma_{tot} \right) w(\mathbf{r}, \mathbf{n} | \mathbf{r}', \mathbf{n}_0) = \\ = n_0 \int d\mathbf{n}'' a_+(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}'') \times \\ \times \exp \{ 2i [\chi_+(\mathbf{n}, \mathbf{n}'') + (\varphi - \varphi'')] \} \times \\ \times w(\mathbf{r}, \mathbf{n}'' | \mathbf{r}', \mathbf{n}_0) + \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{n} | \mathbf{r}', \mathbf{n}_0). \end{aligned} \quad (50)$$

В среде с крупными неоднородностями главный вклад в источник $\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{n} | \mathbf{r}', \mathbf{n}_0)$ дает основная мода линейной поляризации W [26–28]:

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{n} | \mathbf{r}', \mathbf{n}_0) = n_0 \int d\mathbf{n}'' a_-(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}'') \times \\ \times \exp \{ 2i [\chi_-(\mathbf{n}, \mathbf{n}'') + (\varphi - \varphi'')] \} \times \\ \times W(\mathbf{r}, \mathbf{n}'' | \mathbf{r}', \mathbf{n}_0). \end{aligned} \quad (51)$$

Существенное упрощение в расчетах для среды с крупными неоднородностями состоит в том, что вместо системы связанных между собой уравнений (41) мы имеем три независимых уравнения, (47), (48) и (50). Согласно работам [26–28], малый параметр, который позволяет построить метод последовательного расщепления системы уравнений (41), есть отношение сечений

$$\sigma_{dep} / \sigma_{tr} \ll 1, \quad (52)$$

где

$$\sigma_{dep} = 2 \int d\mathbf{n}' a_-(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}')$$

— сечение деполяризации, а

$$\sigma_{tr} = \int d\mathbf{n}' (1 - \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}') a_1(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}')$$

— транспортное сечение упругого рассеяния. В частности, формула (51) для источника $\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{n} | \mathbf{r}', \mathbf{n}_0)$ есть первое приближение по малому параметру $\sigma_{dep} / \sigma_{tr}$. Поправки к формулам (44), (45), связывающим элементы матрицы \hat{G} с величинами I_{scal} и V , имеют более высокий порядок малости, $(\sigma_{dep} / \sigma_{tr})^2$.

Ниже на основе приближенного решения уравнений (47), (48) и (50) вычислены интенсивности поляризованных компонент излучения, отраженного в окрестности направления точно назад.

4. ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕНСИВНОСТИ ПОЛЯРИЗОВАННЫХ СОСТАВЛЯЮЩИХ ОБРАТНОГО РАССЕЯНИЯ

Среду будем считать непоглощающей. В этой ситуации при малых углах отклонения $\vartheta = \pi - \theta$ от направления точно назад, $\vartheta < \lambda/l_{tr}$ ($l_{tr} = (n_0\sigma_{tr})^{-1}$ — транспортная длина), основной вклад в угловой спектр дают длинные (диффузионные) траектории [10]. В среде с крупными неоднородностями изменение направления движения фотонов после каждого акта рассеяния мало. Чтобы повернуть назад, волна должна пройти в среде путь больше транспортной длины.

Интенсивность I_{scal} и величина V в рассматриваемой ситуации слабо зависят от угловых переменных, и уравнения (47), (48) можно записать в приближении пространственной диффузии [25]. Переход к диффузионному приближению проводится по обычной схеме [9, 10, 38]. В условиях слабой анизотропии углового распределения можно написать

$$\begin{aligned} I_{scal}(\mathbf{r}, \mathbf{n}|\mathbf{r}', \mathbf{n}') &\approx \\ &\approx \frac{1}{4\pi} [1 - 3l_{tr}\mathbf{n} \cdot \nabla + \dots] I_{scal}(\mathbf{r}|\mathbf{r}'), \\ V(\mathbf{r}, \mathbf{n}|\mathbf{r}', \mathbf{n}') &\approx \\ &\approx \frac{1}{4\pi} [1 - 3l_{tr}^{(V)}\mathbf{n} \cdot \nabla + \dots] V(\mathbf{r}|\mathbf{r}'), \end{aligned} \quad (53)$$

где величины $I_{scal}(\mathbf{r}|\mathbf{r}')$, $V(\mathbf{r}|\mathbf{r}')$ подчиняются диффузионным уравнениям

$$\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}^2} I_{scal}(\mathbf{r}|\mathbf{r}') + \frac{3}{l_{tr}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = 0, \quad (54)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}^2} - \frac{3}{l_{dep}l_{tr}^{(V)}} \right) V(\mathbf{r}|\mathbf{r}') + \frac{3}{l_{tr}^{(V)}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = 0, \quad (55)$$

а

$$l_{dep} = (n_0\sigma_{dep})^{-1},$$

$$l_{tr}^{(V)} = \left(n_0 \int d\mathbf{n}' (1 - \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}') a_2(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}') \right)^{-1}$$

— длина деполаризации и транспортная длина для циркулярно поляризованной моды [25–28, 42]. Уравнение (55) для $V(\mathbf{r}|\mathbf{r}')$ совпадает с уравнением для скалярной интенсивности $I(\mathbf{r}|\mathbf{r}')$ в среде со слабым поглощением. Роль длины поглощения играет длина деполаризации l_{dep} ; уравнение (55) справедливо при $l_{tr}^{(V)} \ll l_{dep}$. Пространственный масштаб затухания циркулярно поляризованной моды V определяется длиной [25–28]

$$l_{circ} = \sqrt{l_{tr}^{(V)} l_{dep}/3}. \quad (56)$$

Для полубесконечной среды условия на границе имеют вид

$$\begin{aligned} I_{scal}(z = -z_0, \mathbf{r}_{\parallel}|z' > 0, \mathbf{r}'_{\parallel}) &= \\ &= V(z = -z_0, \mathbf{r}_{\parallel}|z' > 0, \mathbf{r}'_{\parallel}) = 0, \end{aligned} \quad (57)$$

где z_0 — экстраполированная длина [38]. Точное значение z_0 зависит от особенностей однократного рассеяния, однако в пределах процентной погрешности $z_0 \approx 0.71l_{tr}$ [38].

В диффузионном приближении выражение для интенсивности обратного рассеяния, полученное на основе уравнений (53)–(55), хорошо известно [9]:

$$\begin{aligned} I_{scal}(\vartheta) &\approx \frac{3}{8\pi} \frac{1}{(1 + \nu)^2} \times \\ &\times \left[1 + \frac{1 - \exp(-2\nu z_0/l_{tr})}{\nu} \right], \end{aligned} \quad (58)$$

где

$$\nu = ql_{tr} = 2\pi l_{tr}\vartheta/\lambda. \quad (59)$$

Согласно уравнению (55), соответствующее выражение для V должно совпадать с выражением для интенсивности обратного рассеяния от поглощающей среды. В случае слабого «эффективного поглощения» ($l_{tr}^{(V)} \ll l_{dep}$), оно получается из выражения (58) заменой ν^2 на [9]

$$\left(ql_{tr}^{(V)} \right)^2 + \left(\frac{l_{tr}^{(V)}}{l_{circ}} \right)^2 \equiv \left(\nu^{(V)} \right)^2 + \left(\frac{l_{tr}^{(V)}}{l_{circ}} \right)^2.$$

В результате для V получаем

$$\begin{aligned} V(\vartheta) &\approx \frac{3}{8\pi} \left[1 + \sqrt{\left(\nu^{(V)} \right)^2 + \left(\frac{l_{tr}^{(V)}}{l_{circ}} \right)^2} \right]^{-2} \times \\ &\times \left\{ 1 + \frac{1 - \exp \left[-2 \sqrt{\left(\nu^{(V)} \right)^2 + \left(\frac{l_{tr}^{(V)}}{l_{circ}} \right)^2} \frac{z_0}{l_{tr}^{(V)}} \right]}{\sqrt{\left(\nu^{(V)} \right)^2 + \left(l_{tr}^{(V)}/l_{circ} \right)^2}} \right\}. \end{aligned} \quad (60)$$

Отметим, что в рассматриваемом случае рассеяния на крупномасштабных неоднородностях значения транспортных длин l_{tr} и $l_{tr}^{(V)}$ близки,

$$\frac{l_{tr}^{(V)} - l_{tr}}{l_{tr}} \sim \frac{l_{tr}}{l_{dep}} \ll 1,$$

и $\nu^{(V)} \approx \nu$.

Что касается величины $w(\vartheta)$, то она может быть найдена как решение уравнения (50) с источником (51). Используя результаты работы [43], для величины $w(\vartheta)$ получаем выражение

$$w(\vartheta) \approx n_0 \int_0^\infty dz \int_{-1}^1 d\mu' \int_0^{2\pi} d\varphi' W(z, -\mathbf{q}, \mu') \times \int_{-1}^1 d\mu'' \int_0^{2\pi} d\varphi'' a_-(\mu', \varphi' + \pi; \mu'', \varphi'') \times \exp\{2i[\chi_-(\mu', \varphi' + \pi; \mu'', \varphi'') - \varphi' - \varphi'']\} \times W(z, \mathbf{q}, \mu''), \quad (61)$$

где $W(z, \mathbf{q}, \mu)$ — фурье-образ решения уравнения (49) для случая нормального падения пучка на поверхность среды.

В средах с крупными ($a > \lambda$) неоднородностями линейно поляризованная мода W затухает на расстояниях порядка транспортной длины l_{tr} упругого рассеяния [28], и основной вклад в интеграл (61) дают $z < l_{tr}$. На таких расстояниях волны распространяются по почти прямым траекториям и значения $W(z, \mathbf{q}, \mu)$, входящие в (61), можно найти в рамках малоуглового приближения [27, 44]. Учитывая, что сечение a_- (усредненное по осцилляциям дифракционной природы с периодом порядка $1/ka$, т.е. \bar{a}_- [42]) и фазовый множитель в (61) являются плавными функциями угловых переменных (в отличие от W), вынесем их из-под знака интеграла в направлении максимума функций $W(z, \mathbf{q}, \mu')$ и $W(z, \mathbf{q}, \mu'')$. Тогда значение w будет пропорционально сечению однократного рассеяния в направлении точно назад ($a_-(\mu = -1) = a_1(\mu = -1)$), а фазовый множитель окажется равным единице.

Такой подход к вычислению w соответствует известному приближению квазиоднократного рассеяния [38, 45], которое уже использовалось в работе [46] для расчета углового спектра когерентного обратного рассеяния скалярных волн от поглощающей среды с крупными неоднородностями.

Выполняя в выражении (61) интегрирование по угловым переменным, получаем (см. Приложение Б)

$$w(\vartheta) = \frac{\overline{a_1(-1)}}{\sigma_{tr}} f(\nu), \quad (62)$$

где

$$f(\nu) = \int_0^\infty d\xi \frac{\exp\left\{-\frac{\nu^2}{4} [(\xi^2 - 1)\text{th}\xi + \xi]\right\}}{\text{ch}^2 \xi}. \quad (63)$$

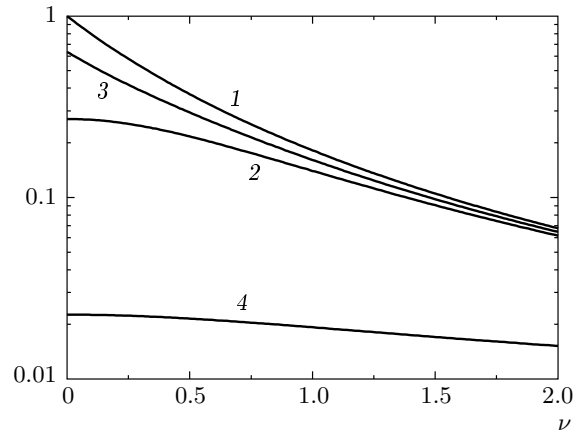


Рис. 4. Угловая зависимость интенсивности поляризованных компонент в окрестности направления точно назад: 1 — I_{\parallel}^C/I ; 2 — I_{\perp}^C/I ; 3 — I_{-}^C/I ; 4 — I_{+}^C/I , где $I = I_{scal}(\nu = 0)$ (см. (58)). Водная суспензия частиц латекса, $ka = 5$

При $\nu \ll 1$ имеем

$$f(\nu \ll 1) \approx 1 - \frac{\nu^2}{8} (4\ln 2 - 1). \quad (64)$$

В области $\nu \gg 1$ функция $f(\nu)$ убывает по степенному закону:

$$f(\nu \gg 1) \approx \left(\frac{1}{3}\right)^{2/3} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \frac{1}{\nu^{2/3}}. \quad (65)$$

Для рассеивателей заданного радиуса усредненное по осцилляциям значение $\overline{a_1(-1)}$ можно, используя «резерфордовскую» параметризацию величины a_1 [27, 42], связать с сечением деполяризации:

$$\overline{a_1(-1)} = \sigma_{dep}/8\pi.$$

Поэтому, в отличие от выражений (58), (60), значение w оказывается пропорциональным малой величине σ_{dep}/σ_{tr} ; для крупных частиц латекса в воде (показатель преломления $n = 1.2$, $2\pi an/\lambda = 10$) это отношение составляет $\sigma_{dep}/\sigma_{tr} \approx 0.2$ [28].

Подстановка соотношений (58), (60), (62) в формулы (33), (34), (36), (37) и (39), (40) позволяет вычислить интенсивности поляризованных компонент отраженного излучения. Для иллюстрации поляризационных эффектов, возникающих при когерентном обратном рассеянии, на рис. 4 показаны результаты расчетов угловых зависимостей величин $I_{\parallel, \perp}^C$ и I_{\pm}^C (водная суспензия частиц латекса, $ka = 5$).

Используя полученные выше результаты, проанализируем зависимость формы пика в угловом

распределении отраженного излучения от состояния поляризации падающего света.

В случае падения линейно поляризованной волны в главном по малому параметру $\sigma_{dep}/\sigma_{tr} \ll 1$ приближении компоненты когерентного вклада в интенсивность при малых углах отклонения от направления назад ($\vartheta \ll \lambda/l_{tr}$) определяются выражениями

$$I_{\parallel}^C(\vartheta) \approx \frac{3}{16\pi} \left[\left(1 + \frac{2z_0}{l_{tr}}\right) - 2\nu \left(1 + \frac{z_0}{l_{tr}}\right)^2 \right], \quad (66)$$

$$I_{\perp}^C(\vartheta) \approx \frac{3}{16\pi} \left[\left(1 + \frac{2z_0}{l_{tr}}\right) - \left(1 + \frac{z_0}{l_{tr}}\right)^2 \sqrt{\nu^2 + \left(\frac{l_{tr}}{l_{circ}}\right)^2} \right], \quad (67)$$

из которых видно, что при относительно больших углах отклонения ($\lambda/l_{circ} < \vartheta < \lambda/l_{tr}$) величина I_{\perp}^C так же, как и I_{\parallel}^C , линейно убывает с ростом ϑ . В ближайшей окрестности направления назад ($\vartheta \ll \lambda/l_{circ}$) пик в угловом распределении ортогонально поляризованного излучения имеет параболическую форму,

$$I_{\perp}^C \approx \frac{3}{16\pi} \left[\left(1 + \frac{2z_0}{l_{tr}}\right) - \left(1 + \frac{z_0}{l_{tr}}\right)^2 \left(\frac{l_{tr}}{l_{circ}} + \frac{\nu^2 l_{circ}}{2l_{tr}}\right) \right]. \quad (68)$$

Это связано с тем, что максимальная длина траекторий, дающих вклад в I_{\perp}^C , ограничена значением l_{circ} — масштабом затухания моды V [25].

Отметим, что в случае рассеивателей малого радиуса ($a \ll \lambda$) циркулярная мода V разрушается на длинах порядка длины свободного пробега ($l_{circ} \approx l_{tr} \approx l$). В связи с этим когерентный вклад I_{\perp}^C в интенсивность ортогонально поляризованной компоненты формируется волнами, испытавшими малое число столкновений на коротких — недиффузионных — траекториях (см., например, работы [17, 18]). Диффузионным приближением [16] для расчета I_{\perp}^C в случае малых рассеивателей пользоваться нельзя.

Обратное рассеяние излучения, поляризованного по кругу, характеризуется следующими особенностями. Когерентный пик ($\vartheta \ll \lambda/l_{tr}$) волн, рассеянных без изменения поляризации, описывается формулой

$$I_{\perp}^C \approx \frac{3}{16\pi} \left[\left(1 + \frac{2z_0}{l_{tr}}\right) - \left(1 + \frac{z_0}{l_{tr}}\right)^2 \left(\nu + \sqrt{\nu^2 + \left(\frac{l_{tr}}{l_{circ}}\right)^2}\right) \right], \quad (69)$$

согласно которой в угловом распределении можно выделить два масштаба. В ближайшей окрестности направления назад ($\vartheta < \lambda/l_{circ}$) пик имеет треугольную форму. Однако в отличие от (66), угол раствора пика оказывается в два раза больше (т. е. пик оказывается более тупым) в отличие от случая, описываемого выражением (66). В области больших углов ($\lambda/l_{circ} < \vartheta$) зависимости (69) для I_{\perp}^C и (66) для I_{\parallel}^C совпадают.

Когерентное усиление обратного рассеяния волн с противоположной («+») поляризацией описывается формулами (37), (62) и определяется интерференцией волн на коротких (длиной порядка l_{tr}) траекториях. Поэтому на масштабах рассмотренных выше малых углов отклонения от направления назад ($\vartheta \ll \lambda/l_{tr}$) величину I_{+}^C можно считать постоянной.

Для неполяризованного падающего света зависимости $I_{\parallel,\perp}^C$ и I_{\pm}^C в пренебрежении слагаемыми порядка σ_{dep}/σ_{tr} в два раза меньше, чем величина I_{\perp}^C (69).

5. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Основные закономерности когерентного усиления обратного рассеяния поляризованного света от сред с крупными неоднородностями состоят в следующем.

Как показано в работах [26–28], многократное рассеяние электромагнитных волн в средах с крупными неоднородностями можно рассматривать как распространение основных мод — скалярной, линейно поляризованной и циркулярно поляризованной мод. Взаимодействие между модами обусловлено различием между амплитудами A_{\parallel} и A_{\perp} . Учет этого взаимодействия приводит к возбуждению обертонов основных мод.

В средах с крупными неоднородностями однократное рассеяние происходит преимущественно вперед, где амплитуды A_{\parallel} и A_{\perp} мало отличаются друг от друга. Если пренебречь этим различием (т. е. учитывать только геометрический механизм деполаризации, обусловленный рытовским поворотом плоскости поляризации [29, 30]), то $I = V$ и матрицы

\hat{G} (29) и \hat{C} (30) с точностью до вклада однократно рассеянного излучения совпадут друг с другом:

$$\hat{G} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (70)$$

$$\hat{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В этом случае интенсивности поляризованных компонент отраженного излучения будут определяться выражениями (см. (33), (34), (36), (37))

$$I_{\parallel,\perp}^L = \frac{I}{2}, \quad I_{\parallel,\perp}^C = \frac{I'}{2}, \quad (71)$$

$$I_-^L = I, \quad I_-^C = I', \quad I_+^L = I_+^C = 0. \quad (72)$$

При падении неполяризованного света из соотношений (39), (40) следует

$$I_{\parallel,\perp}^L = \frac{I}{2}, \quad I_{\parallel,\perp}^C = \frac{I'}{2}, \quad I_{\pm}^L = \frac{I}{2}, \quad I_{\pm}^C = \frac{I'}{2}. \quad (73)$$

Таким образом, в приближении $A_{\parallel} = A_{\perp}$ векторная природа света не сказывается на обратном рассеянии излучения и интенсивности поляризованных компонент отраженных волн не отличаются друг от друга.

Поляризационные эффекты при обратном рассеянии света возникают только благодаря различию между амплитудами A_{\parallel} и A_{\perp} (благодаря динамическому механизму деполяризации по терминологии работ [26–28]).

Согласно выражению (34), угловая зависимость интенсивности I_{\parallel}^C параллельно поляризованной компоненты в окрестности направления назад обусловлена вкладами скалярной интенсивности I_{scal} и обертона w . Основной вклад в I_{\parallel}^C по параметру σ_{dep}/σ_{tr} дает интерференция волн в скалярной моде. Поэтому эффект когерентного усиления компоненты I_{\parallel}^C при $\sigma_{dep}/\sigma_{tr} \ll 1$ удовлетворительно описывается в рамках приближения пространственной диффузии скалярной теории (см., например, [38, 40]).

Эффект когерентного усиления интенсивности I_{\perp}^C ортогонально поляризованной компоненты обусловлен вкладами циркулярно поляризованной моды и обертона w (см. (34)). В среде с крупными неоднородностями (например, в суспензии частиц латекса в воде [32–34]) длина затухания циркулярной моды превышает транспортную длину, $l_{circ} > l_{tr}$ [26]. С

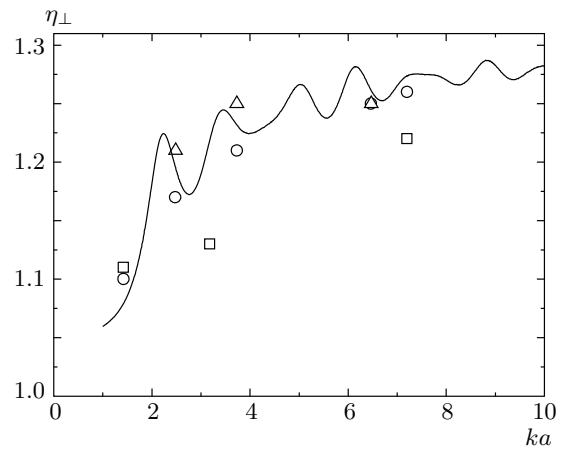


Рис. 5. Зависимость коэффициента усиления рассеяния назад ортогонально поляризованной компоненты интенсивности от радиуса рассеивающих частиц (водная суспензия частиц латекса). Сплошная кривая — расчет по формулам (33), (34) и (58), (60); \circ — результат численного интегрирования векторного уравнения переноса [20]; \triangle и \square — экспериментальные данные [7, 8]

ростом радиуса a рассеивающей частицы отношение l_{circ}/l_{tr} растет [32–34]. Поэтому интенсивность ортогонально поляризованной компоненты с увеличением размеров рассеивателей также увеличивается. В качестве иллюстрации на рис. 5 показана рассчитанная по формулам (33), (34) и (58), (60) зависимость коэффициента усиления

$$\eta_{\perp} = 1 + I_{\perp}^C / I_{\perp}^L$$

рассеяния точно назад от радиуса неоднородностей. Для сравнения приведены данные численного расчета [20] и экспериментальные данные [7, 8].

При рассеянии циркулярно поляризованного света когерентный вклад волн, отраженных без изменения поляризации, определяется скалярной и циркулярно поляризованной модами. Пик в направлении назад при углах $\vartheta < \lambda/l_{circ}$ определяется скалярной модой I_{scal} и угол его раствора оказывается в два раза больше, чем предсказывает скалярная теория. В области $\lambda/l_{circ} < \vartheta < \lambda/l_{tr}$ интерференция волн в обеих модах дает одинаковый вклад в угловую зависимость, которая описывается тем же законом, что и в скалярной теории.

Вклад в угловое распределение интенсивности волн, поляризованных против часовой стрелки (компонента «+»), дает только обертон w линейно поляризованной моды. Поэтому справедливо неравен-

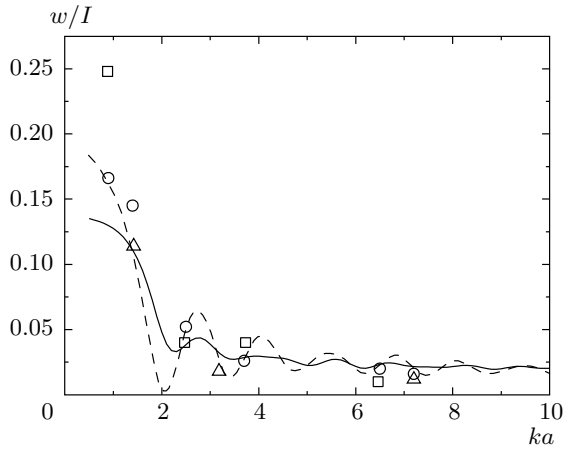


Рис. 6. Зависимость обортона w в направлении назад от радиуса рассеивающих частиц (водная суспензия частиц латекса): сплошная кривая — расчет по формуле (62); \circ — результат численного интегрирования векторного уравнения переноса [15]; Δ и \square — экспериментальные данные [7, 8]; штриховая кривая — расчет по формуле (81) (см. Приложение Б); $I = I_{scat}(\nu = 0)$, см. (58)

ство $I_+^C \ll I_-^C$ и угловая зависимость I_+^C оказывается значительно более плавной, чем I_-^C (см. рис. 4). Пик угловой зависимости I_+^C имеет параболическую форму. С ростом размеров рассеивателей высота пика уменьшается. На рис. 6 приведены результаты расчета значения w для направления назад по формуле (62). Эти результаты удовлетворительно согласуются с данными экспериментов [7, 8], численного интегрирования векторного уравнения переноса [20] и с результатами вычисления w непосредственно с помощью выражения (81) (см. Приложение Б).

При обратном рассеянии неполяризованного света угловые зависимости $I_{\parallel,\perp}^C(\vartheta)$ и $I_{\pm}^C(\vartheta)$ аналогичны угловому распределению поляризованного по кругу излучения, отраженного без изменения поляризации.

Полученные в работе результаты устанавливают взаимосвязь между угловым распределением рассеянного назад излучения заданной поляризации и характеристиками среды и могут представлять интерес для оптических исследований различных многократно рассеивающих сред.

Авторы благодарны В. Д. Муру и В. С. Ремизовичу за интерес к работе и полезные замечания. Работа выполнена при частичной поддержке Министерства образования РФ (проект № Е02-3.2-203), Программы «Развитие научного потенциала выс-

шей школы» (грант № РНП.2.1.1.1972) и гранта Президента РФ для поддержки ведущих научных школ (НШ-320.2006.2).

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Введем матрицы $\hat{\Sigma}^m$ (матричные единицы [41]), которые определяются равенствами

$$\begin{aligned} \hat{\Sigma}^0 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & \hat{\Sigma}^{-0} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \hat{\Sigma}^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & \hat{\Sigma}^{-2} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (74)$$

и подчиняются правилам умножения, приведенным в таблице (в левом столбце стоит первый, а в верхней строке — второй сомножители произведения).

Из определений (74) и таблицы следует, что матрицы $\hat{\Sigma}^m$ обладают свойством ортогональности,

$$\begin{aligned} \Sigma_{\alpha\beta}^m \Sigma_{\alpha\beta}^n &= \Sigma_{\alpha\beta}^m (\Sigma^n)_{\beta\alpha}^T = \\ &= \text{Sp} \left(\hat{\Sigma}^m (\hat{\Sigma}^n)^T \right) = \delta_{mn}, \end{aligned} \quad (75)$$

а матрицу \hat{T} , определенную соотношением (25), можно представить в виде

$$\hat{T} = \begin{pmatrix} \hat{\Sigma}^0 & 0 & \hat{\Sigma}^{-2} & 0 \\ 0 & \hat{\Sigma}^0 & 0 & \hat{\Sigma}^{-2} \\ \hat{\Sigma}^2 & 0 & \hat{\Sigma}^{-0} & 0 \\ 0 & \hat{\Sigma}^2 & 0 & \hat{\Sigma}^{-0} \end{pmatrix}. \quad (76)$$

Разложение по $\hat{\Sigma}^m$ матрицы плотности (14) имеет вид

$$\rho_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Sigma_{\alpha\beta}^m I_m(\mathbf{r}, \mathbf{n}). \quad (77)$$

Матрицы $\hat{\Sigma}$ являются аналогами матриц Паули в разложении (9).

Обобщая разложение (77), для функции Грина $G_{\alpha\beta\gamma\delta}$, связывающей матрицы плотности падающего и рассеянного света, получаем соотношение (18).

Таблица умножения матриц Σ

	$\hat{\Sigma}^2$	$\hat{\Sigma}^0$	$\hat{\Sigma}^{-0}$	$\hat{\Sigma}^{-2}$
$\hat{\Sigma}^2$	0	$\hat{\Sigma}^2$	0	$\hat{\Sigma}^{-0}$
$\hat{\Sigma}^0$	0	$\hat{\Sigma}^0$	0	$\hat{\Sigma}^{-2}$
$\hat{\Sigma}^{-0}$	$\hat{\Sigma}^2$	0	$\hat{\Sigma}^{-0}$	0
$\hat{\Sigma}^{-2}$	$\hat{\Sigma}^0$	0	$\hat{\Sigma}^{-2}$	0

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

При вычислении w по формуле (61) можно воспользоваться величиной $W(z, \mathbf{q}, \mu)$, найденной в малоугловом диффузионном приближении (или приближении Фоккера–Планка) [44]. Это приближение с логарифмической точностью описывает многократное рассеяние на малые углы для рассеивателей заданного радиуса [47].

Входящие в (61) интегралы по угловым переменным от W в малоугловом диффузионном приближении выглядят следующим образом [44]:

$$\int d\mathbf{n} W(z, \mathbf{q}, \mu) = \frac{1}{A_0^{(W)}(z)} \exp\left(-\frac{A_3^{(W)}(z)\mathbf{q}^2}{4}\right), \quad (78)$$

где в случае непоглощающей среды

$$A_0^{(W)}(z) = \text{ch} \frac{z}{l_{tr}},$$

$$A_3^{(W)}(z) = \frac{l_{tr}^2}{2} \left[\left(\frac{z^2}{l_{tr}^2} - 1 \right) \text{th} \frac{z}{l_{tr}} + \frac{z}{l_{tr}} \right]. \quad (79)$$

Подставляя выражения (78), (79) в (61), приходим к результату (62).

Выражение (62) дает качественное представление о вкладе w в угловое распределение интенсивности волн при когерентном обратном рассеянии. Для сравнения с экспериментальными данными и численным расчетом величины $w(\vartheta = 0)$ [7, 8, 20] формулу (62) можно уточнить, учитывая зависимость $a_-(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}') \exp\{2i[\chi_-(\mathbf{n}, \mathbf{n}') - \varphi - \varphi']\}$ от угловой переменной.

Раскладывая $a_-(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}') \exp\{2i[\chi_-(\mathbf{n}, \mathbf{n}') - \varphi - \varphi']\}$ по обобщенным сферическим функциям P_{2-2}^l [48], из соотношения (61) получаем

$$w(\vartheta = 0) = n_0 \int_0^\infty dz \int_{-1}^1 d\mu' \int_0^{2\pi} d\varphi' W(z, -\mu') \times$$

$$\times \int_{-1}^1 d\mu'' \int_0^{2\pi} d\varphi'' \left[\sum_{l=2}^\infty \frac{2l+1}{4\pi} a_-(l) P_{2-2}^l(\mu') P_{2-2}^l(\mu'') \right] \times$$

$$\times W(z, \mu''), \quad (80)$$

где [43, 44]

$$W(z, \mu) = \frac{1}{\pi A_0^{(W)}(z) A_1^{(W)}(z)} \exp\left(-\frac{\theta^2}{A_1(z)}\right) \approx$$

$$\approx \frac{1}{\pi A_0^{(W)}(z) A_1^{(W)}(z)} \exp\left(-\frac{2(1-\mu)}{A_1(z)}\right),$$

$$A_1^{(W)}(z) = 2 \text{th}(z/l_{tr}),$$

а функция $A_0^{(W)}(z)$ определена равенством (79). Первые слагаемые разложения (80) для $w(\vartheta = 0)$ имеют вид

$$w(\vartheta = 0) \approx \frac{1}{\pi \sigma_{tr}} \times \left[\frac{7}{12} a_-(l=2) - \frac{11}{30} a_-(l=3) + \dots \right], \quad (81)$$

где коэффициенты разложения $a_-(l)$ вычисляются с помощью формул Ми.

ЛИТЕРАТУРА

1. К. М. Watson, J. Math. Phys. **10**, 688 (1969).
2. Ю. Н. Барабаненков, Изв. вузов, радиофизика **16**, 88 (1973).
3. А. Г. Виноградов, Ю. А. Кравцов, В. И. Татарский, Изв. вузов, радиофизика **16**, 1064 (1973).
4. Y. Kuga and A. Ishimaru, J. Opt. Soc. Amer. A **1**, 831 (1984).
5. M. P. van Albada and A. Lagendijk, Phys. Rev. Lett. **55**, 2692 (1985).
6. P. E. Wolf and G. Maret, Phys. Rev. Lett. **55**, 2696 (1985).
7. M. P. van Albada, M. B. van der Mark, and A. Lagendijk, Phys. Rev. Lett. **58**, 361 (1987).
8. P. E. Wolf, G. Maret, E. Akkermans, and R. Maynard, J. de Phys. **49**, 63 (1988).
9. E. Akkermans, P. E. Wolf, R. Maynard, and G. Maret, J. de Phys. **49**, 77 (1988).
10. Ю. Н. Барабаненков, В. Д. Озрин, ЖЭТФ **94**(6), 56 (1988).
11. Е. Е. Городничев, С. Л. Дударев, Д. В. Рогозкин, ЖЭТФ **96**, 847 (1989); Е. Е. Gorodnichev, S. L. Dudarev, and D. V. Rogozkin, Phys. Lett. **144A**, 48 (1990).
12. Yu. N. Barabanenkov, Yu. A. Kravtsov, V. D. Ozrin, and A. I. Saichev, Progr. Opt. **29**, 64 (1991).
13. В. Л. Кузьмин, В. П. Романов, УФН **166**, 247 (1996).
14. C. E. Mandt, L. Tsang, and A. Ishimaru, J. Opt. Soc. Amer. A **7**, 585 (1990).

15. А. А. Голубенцев, Изв. вузов, радиофизика **27**, 734 (1984); ЖЭТФ **86**, 47 (1984).
16. M. J. Stephen and G. Cwilich, Phys. Rev. B **34**, 7564 (1986).
17. V. D. Ozrin, Waves in Random Media **2**, 141 (1992).
18. E. Amic, J. M. Luck, and Th. M. Nieuwenhuizen, J. de Phys. I **7**, 445 (1997).
19. M. I. Mischenko, J. M. Luck, and T. M. Nieuwenhuizen, J. Opt. Soc. Amer. A **17**, 888 (2000).
20. M. I. Mischenko, Phys. Rev. B **44**, 12597 (1991); J. Opt. Soc. Amer. A **9**, 978 (1992).
21. K. Muinonen, Waves in Random Media **14**, 365 (2004).
22. M. I. Mishchenko, L. D. Travis, and A. A. Lacis, *Multiple Scattering of Light by Particles*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (2006).
23. V. P. Tishkovets and M. I. Mischenko, J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer **86**, 161 (2004).
24. P. V. Litvinov, V. P. Tishkovets, and K. Ziegler, J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer **103**, 131 (2007).
25. Е. Е. Городничев, А. И. Кузовлев, Д. Б. Рогозкин, Письма в ЖЭТФ **68**, 21 (1998).
26. E. E. Gorodnichev, A. I. Kuzovlev, and D. B. Rogozkin, Opt. Comm. **260**, 30 (2006).
27. E. E. Gorodnichev, A. I. Kuzovlev, and D. B. Rogozkin, in *Light Scattering Reviews*, ed. by A. A. Kokhanovsky, Springer-Praxis (2006), p. 291.
28. Е. Е. Городничев, А. И. Кузовлев, Д. Б. Рогозкин, ЖЭТФ **131**, 357 (2007).
29. С. М. Рытов, ДАН СССР **18**, 263 (1938).
30. Ю. А. Кравцов, Изв. вузов, радиофизика **13**, 281 (1970).
31. В. И. Татарский, Изв. вузов, радиофизика **10**, 1762 (1967).
32. F. C. MacKintosh, J. X. Zhu, D. J. Pine, and D. A. Weitz, Phys. Rev. B **40**, 9342 (1989).
33. D. Bicout, C. Brosseau, A. S. Martinez, and J. M. Schmitt, Phys. Rev. E **49**, 1767 (1994).
34. V. Sankaran, M. J. Everett, D. J. Maitland et al., Opt. Lett. **24**, 1044 (1999).
35. Е. Е. Городничев, А. И. Кузовлев, and Д. В. Рогозкин, in *Current Problems in Atmospheric Radiation*, ed. by W. L. Smith and Yu. M. Timofeev, A. Deepak Publ., Hampton, Virginia (2001), p. 287.
36. С. М. Рытов, Ю. А. Кравцов, В. И. Татарский, *Введение в статистическую радиофизику*, т. 2, Наука, Москва (1976).
37. Ю. Н. Барабаненков, УФН **117**, 49 (1975).
38. H. C. van de Hulst, *Multiple Light Scattering*, Academic Press, New York (1980).
39. Р. Ньютон, *Теория рассеяния волн и частиц*, Мир, Москва (1969).
40. I. Kuscer and M. Ribaric, Optica Acta **6**, 42 (1959).
41. Э. Б. Винберг, *Курс алгебры*, Факториал, Москва (1999).
42. Е. Е. Городничев, А. И. Кузовлев, Д. Б. Рогозкин, ЖЭТФ **115**, 769 (1999).
43. Е. Е. Городничев, А. И. Кузовлев, Д. Б. Рогозкин, Изв. РАН, ФАО **39**, 371 (2003).
44. E. E. Gorodnichev, A. I. Kuzovlev, and D. B. Rogozkin, Laser Phys. **10**, 1236 (2000).
45. H. R. Gordon, Appl. Opt. **12**, 2803 (1973).
46. D. B. Rogozkin, Laser Phys. **5**, 787 (1995).
47. Е. Е. Городничев, Д. Б. Рогозкин, ЖЭТФ **107**, 209 (1995).
48. И. М. Гельфанд, Р. А. Минлос, Э. Я. Шапиро, *Представления группы вращений и группы Лоренца*, Физматгиз, Москва (1958).