

# ЭЛЕКТРОКАПИЛЛЯРНЫЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПРОВОДЯЩЕГО ЖИДКОГО ЦИЛИНДРА

*А. Б. Петрин\**

*Объединенный институт высоких температур Российской академии наук  
125412, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 15 октября 2007 г.

Рассматриваются электрокапиллярные неустойчивости жидкого проводящего цилиндра. Исследуются точные решения линеаризованных уравнений Навье–Стокса с учетом вязкости жидкости. Находятся скорости роста неустойчивостей различных мод, как осесимметричных, так и неосесимметричных. Особое внимание уделяется влиянию электрического поля на временной рост и пространственные размеры неустойчивостей. Показывается, что в отличие от капиллярной неустойчивости в отсутствие электрического поля, при которой только осесимметричная мода является неустойчивой, в присутствии электрического поля на поверхности цилиндра неосесимметричные моды также становятся неустойчивыми, растущими во времени. Обнаружено, что с ростом электрического поля последовательно включаются (т. е. начинают расти во времени) угловые моды, причем максимальная скорость временного роста всех возникших мод монотонно увеличивается с ростом электрического поля.

PACS: 68.03.Cd

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Известно, что жидкий цилиндр под действием сил поверхностного натяжения, даже без учета силы тяжести, неустойчив и распадается на отдельные капли. Это связано с тем, что при локальном уменьшении диаметра цилиндра силы поверхностного натяжения выталкивают жидкость из узкого места, что ведет к дальнейшему уменьшению диаметра цилиндра в этом месте вплоть до его разрыва. Динамика капиллярной неустойчивости жидкого цилиндра была впервые рассмотрена в работе Рэлея [1] в рамках теории невязкой жидкости, где было найдено дисперсионное уравнение малых возмущений и длина волны моды с максимальной скоростью роста неустойчивости. Было показано [2], что длина волны моды с максимальной скоростью нарастания неустойчивости весьма точно соответствует наблюдаемой в эксперименте пространственной периодичности капель жидкости, образованных после распада цилиндра. Кроме того, Рэлеем был проанализирован случай большой вязкости жидкости [3] на основе уравнения Стокса. Задача устойчивости при произ-

вольной вязкости была впервые решена Чандрасекаром [4]. Со времени пионерских работ Рэлея анализ линеаризованной задачи устойчивости жидкого цилиндра использовался во многих других физических ситуациях. Так, в работе [5] была рассмотрена неустойчивость жидкого цилиндра с учетом влияния внешней жидкости с конечными плотностью и вязкостью. Движение обеих жидкостей внутри и снаружи цилиндра описывалось квазистатическим уравнением Стокса. Полный исторический обзор решения задачи капиллярной неустойчивости жидкого цилиндра можно найти в обзоре [6].

Данная работа призвана ответить на следующие вопросы: будет ли осесимметричное возмущение наиболее неустойчивым при больших электрических полях и не будут ли при этом неосесимметричные угловые гармоники возмущения расти быстрее осесимметричной гармоники. Предлагается общий подход, который позволит в рамках единого метода рассмотреть как осесимметричные, так и неосесимметричные электрокапиллярные возмущения жидких цилиндрических проводников. Исследованы точные решения линеаризованных уравнений Навье–Стокса с учетом вязкости жидкости.

\*E-mail: a\_petrin@mail.ru

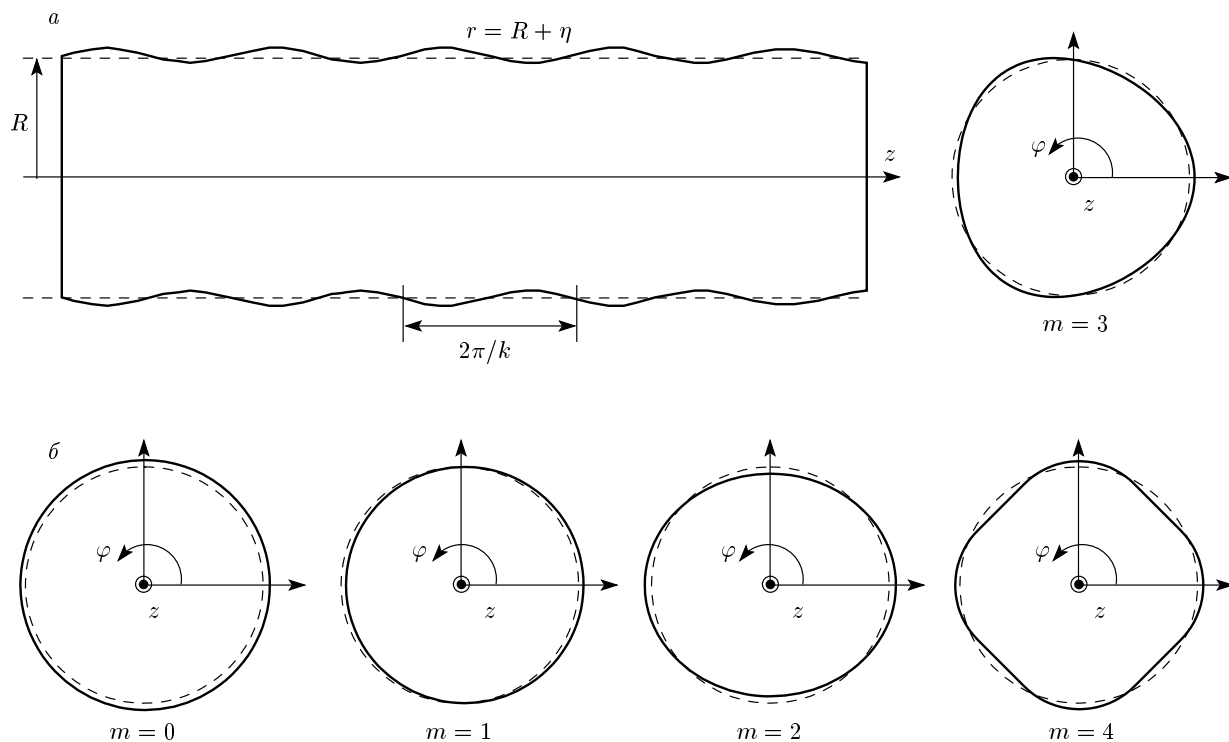


Рис. 1. а) Геометрия задачи: жидкий цилиндр радиуса  $R$ , поверхность которого возмущена функцией вида  $\eta = a \exp(\omega t + ikz + im\varphi)$ . Показана неосесимметричная мода  $m = 3$ . б) Сечения цилиндра, возмущенного различными модами:  $m = 0$  — осесимметричная мода;  $m = 1, 2, 4$  — неосесимметричные моды

## 2. ЛИНЕАРИЗОВАННЫЕ УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОКАПИЛЛЯРНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

Рассмотрим стабильность жидкого цилиндра радиуса  $R$ . Вязкость и плотность жидкости соответственно равны  $\mu$  и  $\rho$ . Предположим, что снаружи цилиндра находится вещество с пренебрежимо малыми значениями вязкости и плотности. Коэффициент поверхностного натяжения жидкости на границе сред положим равным  $\sigma$ . Анализ возмущений проведем в цилиндрической системе координат  $(r, \varphi, z)$  (геометрия задачи показана на рис. 1).

Линеаризованные уравнения Навье–Стокса [7] и граничные условия приведем к безразмерному виду, используя следующие масштабы физических величин задачи:

$$[\text{длина}] = D, \quad [\text{скорость}] = U = \sqrt{\sigma/\rho D},$$

$$[\text{время}] = D/U = \sqrt{\rho D^3/\sigma},$$

$$[\text{давление}] = \rho U^2,$$

$$[\text{напряженность электрического поля}] = E_s,$$

где  $D = 2R$  — диаметр цилиндра,  $E_s$  — модуль напряженности электрического поля на невозмущенной поверхности цилиндра.

Тогда линеаризованные уравнения Навье–Стокса для движений в жидкости можно записать в следующем безразмерном виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_r}{\partial t} &= -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{\text{Re}} \left( \nabla^2 v_r - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right), \\ \frac{\partial v_\varphi}{\partial t} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \frac{1}{\text{Re}} \left( \nabla^2 v_\varphi - \frac{v_\varphi}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} \right), \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 v_z. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $\text{Re} = \sqrt{\rho \sigma D/\mu^2}$  — число Рейнольдса данной задачи,  $v_r, v_\varphi$  и  $v_z$  — составляющие возмущений скорости в цилиндрической системе координат,  $p$  — возмущение давления.

Считаем жидкость несжимаемой, поэтому уравнение непрерывности можно записать в виде

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \quad (2)$$

В безразмерных переменных граница возмущенного цилиндра описывается формулой  $r = R + \eta =$

$= 1/2 + \eta$ , где  $\eta$  — смещение поверхности за счет возмущения. На границе можно записать линейризованное кинематическое условие:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = v_r|_{r=R}. \quad (3)$$

Нормальная и тангенциальные компоненты напряжения,  $\sigma_{rr}$  и  $\sigma_{zz}$ ,  $\sigma_{z\varphi}$ , [7], с учетом электрического и капиллярного давлений на поверхность имеют вид

$$\left(-p + \frac{2}{\text{Re}} \frac{\partial v_r}{\partial r}\right)_{r=R} = (2\delta H + El p_e)|_{r=R}, \quad (4)$$

$$\left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r}\right)_{r=R} = 0, \quad (5)$$

$$\left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r}\right)_{r=R} = 0, \quad (6)$$

где  $El = \varepsilon_0 E_s^2 D / \sigma$ ,  $p_e$  — безразмерное возмущение давления электрического поля на поверхности,  $\delta H$  — вариация средней кривизны поверхности жидкости, возмущение которой описывается функцией  $\eta$ ,  $\varepsilon_0$  — диэлектрическая проницаемость вакуума.

Чтобы найти  $p_e$ , рассмотрим подробнее электрический потенциал и электрическое поле вокруг возмущенного проводящего цилиндра. Сначала используем размерные величины. Пусть радиальное смещение точек поверхности при таком возмущении имеет вид

$$\eta = a \exp(\omega t + ikz + im\varphi),$$

причем амплитуда возмущения  $a \gg R$  и  $m$  — целое число большее или равное нулю.

Если поверхность невозмущенная, то напряженность поля над ней равна  $E_r = RE_s/r$ , а его потенциал  $\varphi(r)$  определяется из уравнения

$$\varphi(R) - \varphi(r) = RE_s \int_R^r \frac{dr}{r} = RE_s \ln \frac{r}{R},$$

откуда

$$\varphi(r) = -RE_s \ln \frac{r}{R},$$

причем потенциал проводника равен нулю,  $\varphi(R) = 0$ . Потенциал поля над возмущенной поверхностью запишем в виде  $\varphi = -RE_s \ln(r/R) + \varphi_1$ , где  $\varphi_1$  — малая поправка, удовлетворяющая уравнению Лапласа  $\Delta \varphi_1 = 0$  и обращающаяся в нуль при  $r \rightarrow \infty$ .

Ищем решение уравнения Лапласа  $\Delta \varphi_1 = 0$  в виде

$$\varphi_1 = \text{const} \cdot f(r) \exp(\omega t + ikz + im\varphi).$$

Тогда, учитывая, что

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2},$$

получим для радиальной функции уравнение

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} - \left(k^2 + \frac{m^2}{r^2}\right) f = 0.$$

Делая замену  $\zeta = kr$ , получим

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \zeta^2} + \frac{1}{\zeta} \frac{\partial f}{\partial \zeta} - \left(1 + \frac{m^2}{\zeta^2}\right) f = 0.$$

Решением данного уравнения, стремящимся к нулю на бесконечности, является модифицированная функция Бесселя  $m$ -го порядка:  $f = K_m(\zeta) = K_m(kr)$ . Поэтому

$$\varphi_1 = \text{const} \cdot K_m(kr) \exp(\omega t + ikz + im\varphi).$$

Вдоль возмущенной поверхности проводника потенциал должен иметь постоянное значение, которое принимаем за нуль. Отсюда

$$-RE_s \ln[(R + \eta)/R] + \varphi_1|_{r=R} = 0,$$

или  $\varphi_1|_{r=R} = E_s \eta$ . Подставляя сюда  $\varphi_1 = \text{const} \cdot K_m(kr) \exp(\omega t + ikz + im\varphi)$  и находя константу, получаем

$$\varphi_1 = E_s \frac{K_m(kr)}{K_m(kR)} \eta. \quad (7)$$

На заряженную единицу площади поверхности жидкости действует электрическая сила

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} &\approx \frac{\varepsilon_0 E_r^2}{2} = \\ &= \frac{\varepsilon_0}{2} \left\{ -\frac{\partial}{\partial r} \left[ -RE_s \ln\left(\frac{r}{R}\right) + \varphi_1 \right] \right\}^2 \Bigg|_{r=R} \approx \\ &\approx \frac{\varepsilon_0 E_s^2}{2} - \frac{\varepsilon_0}{2} 2E_s \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} \Bigg|_{r=R}. \end{aligned}$$

Подставляя сюда соотношение (7), получаем

$$\frac{\varepsilon_0 E^2}{2} \approx \frac{\varepsilon_0 E_s^2}{2} - k \frac{K'_m(kR)}{K_m(kR)} \varepsilon_0 E_s^2 \eta.$$

Переходя снова к безразмерным величинам, находим

$$\frac{e^2}{2} \approx \frac{1}{2} - k \frac{K'_m(kR)}{K_m(kR)} \eta,$$

где  $e$  — безразмерный модуль напряженности электрического поля на поверхности цилиндра. Тогда

$$p_e \approx k \frac{K'_m(kR)}{K_m(kR)} \eta, \quad (8)$$

причем коэффициент перед возмущением  $\eta$  является отрицательной величиной (под поверхностью в жидкости электрическое поле создает дополнительное отрицательное давление).

При подстановке формулы (8) в граничное условие (4) с использованием выражения для вариации средней кривизны  $\delta H$  при рассматриваемом гармоническом возмущении поверхности  $\eta = a \exp(\omega t + ikz + im\varphi)$  (подробности вычисления  $\delta H$  приведены в Приложении) получим

$$-p + \frac{2}{\text{Re}} \frac{\partial v_r}{\partial r} \Big|_{r=R} = \eta \left[ -k^2 + kEl \frac{K'_m(kR)}{K_m(kR)} + \frac{1-m^2}{R^2} \right]_{r=R}. \quad (9)$$

Будем искать решение уравнений движения (1), (2) в виде

$$\begin{aligned} v_r &= w_r(r) \exp(\omega t + ikz + im\varphi), \\ v_\varphi &= w_\varphi(r) \exp(\omega t + ikz + im\varphi), \\ v_z &= w_z(r) \exp(\omega t + ikz + im\varphi), \\ p &= P(r) \exp(\omega t + ikz + im\varphi). \end{aligned}$$

Тогда получим уравнения движения (1) в виде

$$\begin{aligned} \omega w_r &= -\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{\text{Re}} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial w_r}{\partial r} \right) - \frac{m^2}{r^2} w_r - k^2 w_r - \frac{w_r}{r^2} - \frac{2im}{r^2} w_\varphi \right], \\ \omega w_\varphi &= -\frac{im}{r} P + \frac{1}{\text{Re}} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial w_\varphi}{\partial r} \right) - \frac{m^2}{r^2} w_\varphi - k^2 w_\varphi - \frac{w_\varphi}{r^2} + \frac{2im}{r^2} w_r \right], \\ \omega w_z &= -ikP + \frac{1}{\text{Re}} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial w_z}{\partial r} \right) - \frac{m^2}{r^2} w_z - k^2 w_z \right]. \end{aligned} \quad (10)$$

Уравнение непрерывности (2) примет вид:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r w_r) + \frac{im}{r} w_\varphi + ikw_z = 0. \quad (11)$$

Кинематическое условие на границе (3) можно записать в виде

$$\omega a = w_r|_{r=R}, \quad (12)$$

а силовые граничные условия принимают вид

$$-P + \frac{2}{\text{Re}} \frac{\partial w_r}{\partial r} \Big|_{r=R} = a \left[ -k^2 + \frac{1-m^2}{R^2} + Elk \frac{K'_m(kR)}{K_m(kR)} \right]_{r=R}, \quad (13)$$

$$\left( ikw_r + \frac{\partial w_z}{\partial r} \right)_{r=R} = 0, \quad (14)$$

$$\left( \frac{im}{r} w_r + \frac{\partial w_\varphi}{\partial r} - \frac{w_\varphi}{r} \right)_{r=R} = 0. \quad (15)$$

### 3. ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ЭЛЕКТРОКАПИЛЛЯРНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

Запишем систему уравнений движения (10), (11) в более удобном и компактном виде, сделав замену  $\lambda^2 = \omega \text{Re} + k^2$ . Введем также операторы

$$\hat{\mathfrak{D}} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) - \left( \frac{m^2}{r^2} + \lambda^2 \right),$$

$$\hat{\mathfrak{A}} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) - \left( \frac{1+m^2}{r^2} + \lambda^2 \right).$$

Тогда система уравнений (10), (11) примет вид

$$\begin{aligned} -\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{\text{Re}} \left( \hat{\mathfrak{A}} w_r - \frac{2im}{r^2} w_\varphi \right) &= 0, \\ -\frac{im}{r} P + \frac{1}{\text{Re}} \left( \hat{\mathfrak{A}} w_\varphi + \frac{2im}{r^2} w_r \right) &= 0, \\ -ikP + \frac{1}{\text{Re}} \hat{\mathfrak{D}} w_z &= 0, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r w_r) + \frac{im}{r} w_\varphi + ikw_z &= 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Выразим давление из третьего уравнения,  $P = \hat{\mathfrak{D}} w_z / ik \text{Re}$ , и подставим в первые два:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{ik} \frac{\partial}{\partial r} \left( \hat{\mathfrak{D}} w_z \right) + \hat{\mathfrak{A}} w_r - \frac{2im}{r^2} w_\varphi &= 0, \\ -\frac{1}{r} \frac{m}{k} \hat{\mathfrak{D}} w_z + \hat{\mathfrak{A}} w_\varphi + \frac{2im}{r^2} w_r &= 0, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r w_r) + \frac{im}{r} w_\varphi + ikw_z &= 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Введем оператор  $\hat{\mathfrak{J}} = (1/r)(\partial/\partial r)r$ , тогда система (17) переписется в виде

$$\begin{aligned} -\frac{1}{ik} \frac{\partial}{\partial r} \left( \hat{\mathfrak{D}} w_z \right) + \hat{\mathfrak{A}} w_r - \frac{2im}{r^2} w_\varphi &= 0, \\ -\frac{1}{r} \frac{m}{k} \hat{\mathfrak{D}} w_z + \hat{\mathfrak{A}} w_\varphi + \frac{2im}{r^2} w_r &= 0, \\ \hat{\mathfrak{J}} w_r + \frac{im}{r} w_\varphi + ikw_z &= 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Выразим из последнего уравнения величину  $m w_\varphi = ir \hat{\mathfrak{J}} w_r - kr w_z$  и подставим ее в первые два уравнения системы (18). В результате элементарных преобразований получим

$$\begin{aligned} \left(\frac{i}{k} \frac{\partial}{\partial r} \hat{\mathfrak{D}} + \frac{2ik}{r}\right) w_z + \left(\hat{\mathfrak{A}} + \frac{2}{r} \hat{\mathfrak{J}}\right) w_r &= 0, \\ \left(\frac{im^2}{kr} \hat{\mathfrak{D}} + ik \hat{\mathfrak{A}} r\right) w_z + \left(\hat{\mathfrak{A}} r \hat{\mathfrak{J}} + \frac{2m^2}{r^2}\right) w_r &= 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Будем искать решение системы уравнений (19) в виде рядов

$$w_z(r) = \sum_{i=0}^{\infty} s_i r^i, \quad w_r(r) = \sum_{i=0}^{\infty} t_i r^i.$$

Тогда, подставляя эти выражения в левую часть уравнений и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $r$  нулю, получим систему уравнений для коэффициентов ряда.

Для первого уравнения системы (19) получим уравнения для нахождения коэффициентов рядов:

$$\frac{2im^2}{k} s_0 = 0, \quad (20)$$

$$-\frac{i(1^2 - m^2)}{k} s_1 + (1^2 - m^2)t_0 = 0, \quad (21)$$

$$2iks_0 + (2^2 - m^2)t_1 = 0, \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \frac{i}{k}(3^2 - m^2)s_3 + \left(2ik - \frac{i\lambda^2}{k}\right) s_1 + \\ + (3^2 - m^2)t_2 - \lambda^2 t_0 = 0, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \frac{2i}{k}(4^2 - m^2)s_4 + \left(2ik - \frac{2i\lambda^2}{k}\right) s_2 + \\ + (4^2 - m^2)t_3 - \lambda^2 t_1 = 0, \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \frac{3i}{k}(5^2 - m^2)s_5 + \left(2ik - \frac{3i\lambda^2}{k}\right) s_3 + \\ + (5^2 - m^2)t_4 - \lambda^2 t_2 = 0 \end{aligned} \quad (25)$$

и т. д.

В общем случае для уравнения с максимальным индексом « $q$ » у коэффициента  $s_q$  получим

$$\begin{aligned} A(q, m, k, \lambda) s_q + B(q, m, k, \lambda) s_{q-2} + \\ + C(q, m, k, \lambda) t_{q-1} + D(q, m, k, \lambda) t_{q-3} = 0, \end{aligned} \quad (26)$$

где

$$A(q, m, k, \lambda) = \frac{i(q-2)}{k}(q^2 - m^2),$$

$$B(q, m, k, \lambda) = 2ik - i \frac{(q-2)\lambda^2}{k},$$

$$C(q, m, k, \lambda) = q^2 - m^2, \quad D(q, m, k, \lambda) = -\lambda^2.$$

Для второго уравнения системы (19) получим следующие уравнения для нахождения коэффициентов рядов:

$$-\frac{im^4}{k} s_0 = 0, \quad (27)$$

$$\frac{im^2}{k}(1^2 - m^2)s_1 - (1^2 - m^2)t_0 = 0, \quad (28)$$

$$\frac{im^2}{k}(2^2 - m^2)s_2 - \frac{im^2}{k}(\lambda^2 + k^2)s_0 = 0, \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \frac{im^2}{k}(3^2 - m^2)s_3 + \left(3ik - ikm^2 - \frac{im^2\lambda^2}{k}\right) s_1 + \\ + (3^2 - m^2)t_2 - \lambda^2 t_0 = 0, \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \frac{im^2}{k}(4^2 - m^2)s_4 + \left(8ik - ikm^2 - \frac{im^2\lambda^2}{k}\right) s_2 + \\ + (-ik\lambda^2)s_0 + 2(4^2 - m^2)t_3 - (2\lambda^2)t_1 = 0, \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \frac{im^2}{k}(5^2 - m^2)s_5 + \left(15ik - ikm^2 - \frac{im^2\lambda^2}{k}\right) s_3 - \\ - ik\lambda^2 s_1 + 3(5^2 - m^2)t_4 - 3\lambda^2 t_2 = 0 \end{aligned} \quad (32)$$

и т. д.

В общем случае для уравнения с максимальным индексом « $q$ » у коэффициента  $s_q$  получим

$$\begin{aligned} E(q, m, k, \lambda) s_q + F(q, m, k, \lambda) s_{q-2} + \\ + G(q, m, k, \lambda) s_{q-4} + \\ + H(q, m, k, \lambda) t_{q-1} + I(q, m, k, \lambda) t_{q-3} = 0, \end{aligned} \quad (33)$$

где

$$E(q, m, k, \lambda) = \frac{im^2}{k}(q^2 - m^2),$$

$$F(q, m, k, \lambda) = ik[q(q-2) - m^2] - i \frac{m^2\lambda^2}{k},$$

$$G(q, m, k, \lambda) = -ik\lambda^2,$$

$$H(q, m, k, \lambda) = (q-2)(q^2 - m^2),$$

$$I(q, m, k, \lambda) = -(q-2)\lambda^2.$$

Решение уравнений (20)–(33) будем исследовать, рассматривая сначала осесимметричный случай при  $m = 0$ , а затем неосесимметричный при  $m \geq 1$ .

В осесимметричном случае ( $m = 0$ ) из уравнений (20)–(22) и (27)–(29) следует, что  $t_0 = 0$ ,  $s_1 = 0$ ,  $t_1 = -iks_0/2$ . Нетрудно видеть, что существуют только два линейно независимых нетривиальных решения с начальными коэффициентами:

$$s_0 = 1, \quad s_1 = 0, \quad s_2 = 0, \quad t_0 = 0, \quad t_1 = -ik/2$$

и

$$s_0 = 0, \quad s_1 = 0, \quad s_2 = 1, \quad t_0 = 0, \quad t_1 = 0.$$

Остальные коэффициенты этих двух решений можно вычислить рекуррентно из последующих уравнений. Так, при  $q > 2$  можно однозначно вычислить  $s_q$  и  $t_{q-1}$  из системы уравнений

$$\begin{aligned} &A(q, m, k, \lambda)s_q + B(q, m, k, \lambda)s_{q-2} + \\ &+ C(q, m, k, \lambda)t_{q-1} + D(q, m, k, \lambda)t_{q-3} = 0, \\ &E(q, m, k, \lambda)s_q + F(q, m, k, \lambda)s_{q-2} + \\ &+ G(q, m, k, \lambda)s_{q-4} + H(q, m, k, \lambda)t_{q-1} + \\ &+ I(q, m, k, \lambda)t_{q-3} = 0. \end{aligned} \quad (34)$$

Для неосесимметричного случая, действуя аналогично, нетрудно найти для каждой несимметричной моды (каждого  $m \geq 1$ ) по три линейно независимых нетривиальных решения. Так, при  $m = 1$  три линейно независимых нетривиальных решения определяются тремя наборами начальных коэффициентов рядов:

$$\begin{aligned} 1) & s_0 = 0, \quad t_0 = 1, \quad s_1 = 0, \quad t_1 = 0, \quad s_2 = 0, \\ 2) & s_0 = 0, \quad t_0 = 0, \quad s_1 = 1, \quad t_1 = 0, \quad s_2 = 0, \\ 3) & s_0 = 0, \quad t_0 = 0, \quad s_1 = 0, \quad t_1 = 0, \\ & s_2 = 0, \quad t_2 = 1, \quad s_3 = ik. \end{aligned}$$

Остальные коэффициенты этих решений можно вычислить рекуррентно из последующих уравнений. Так, при  $q \geq 3$  коэффициенты  $s_q$  и  $t_{q-1}$  однозначно вычисляются из системы уравнений (34).

Если  $m = 2$ , то, аналогично, три линейно независимых нетривиальных решения определяются как

$$\begin{aligned} 1) & s_0 = 0, \quad t_0 = 0, \quad s_1 = 0, \quad t_1 = 1, \quad s_2 = 0, \\ 2) & s_0 = 0, \quad t_0 = 0, \quad s_1 = 0, \quad t_1 = 0, \quad s_2 = 1, \\ 3) & s_0 = 0, \quad t_0 = 0, \quad s_1 = 0, \quad t_1 = 0, \\ & s_2 = 0, \quad t_2 = 0, \quad s_3 = 0, \quad t_3 = 1, \quad s_4 = ik/2. \end{aligned}$$

Остальные коэффициенты этих решений вычисляются рекуррентно из последующих уравнений. При  $q \geq 4$  можно однозначно определить  $s_q$  и  $t_{q-1}$  из системы уравнений (34).

Для случая  $m = 3$  приведем три линейно независимых нетривиальных решения:

$$\begin{aligned} 1) & s_0 = 0, \quad t_0 = 0, \quad s_1 = 0, \quad t_1 = 0, \\ & s_2 = 0, \quad t_2 = 1, \quad s_3 = 0, \\ 2) & s_0 = 0, \quad t_0 = 0, \quad s_1 = 0, \quad t_1 = 0, \\ & s_2 = 0, \quad t_2 = 0, \quad s_3 = 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) & s_0 = 0, \quad t_0 = 0, \quad s_1 = 0, \quad t_1 = 0, \\ & s_2 = 0, \quad t_2 = 0, \quad s_3 = 0, \quad t_3 = 0, \\ & s_4 = 0, \quad t_4 = 1, \quad s_5 = ik/3. \end{aligned}$$

Анализируя решения системы уравнений (19), можно заметить и с помощью математической индукции доказать, что при  $m = N$ , где  $N \geq 2$  — натуральное число, три линейно независимых решения определяются начальными коэффициентами

$$\begin{aligned} 1) & s_0 = 0, \quad t_0 = 0, \quad s_1 = 0, \quad t_1 = 0, \dots, \\ & s_{N-1} = 0, \quad t_{N-1} = 1, \quad s_N = 0, \\ 2) & s_0 = 0, \quad t_0 = 0, \quad s_1 = 0, \quad t_1 = 0, \dots, \\ & s_{N-1} = 0, \quad t_{N-1} = 0, \quad s_N = 1, \\ 3) & s_0 = 0, \quad t_0 = 0, \quad s_1 = 0, \quad t_1 = 0, \dots, \\ & s_{N-1} = 0, \quad t_{N-1} = 0, \quad s_N = 0, \quad t_N = 0, \\ & t_{N+1} = 1, \quad s_{N+1} = 0, \quad s_{N+2} = ik/N. \end{aligned}$$

Остальные коэффициенты этих решений вычисляются рекуррентно из системы уравнений (34). Следует отметить, что, решая систему (34) относительно  $s_q$  и  $t_{q-1}$ , при нахождении первых двух линейно независимых решений возникают тривиальные трудности, так как при  $q = m + 2$  детерминант

$$\begin{aligned} &E(q, m, k, \lambda)C(q, m, k, \lambda) - \\ &- A(q, m, k, \lambda)H(q, m, k, \lambda) = 0. \end{aligned}$$

В этом случае полагалось, что  $t_{q-1} = t_{m+1} = 0$  и продолжалось решение системы.

После того как найдены коэффициенты  $s_j$  и  $t_j$ ,  $j = 0, \dots, \infty$ , можно вычислить ряды

$$w_z(r) = \sum_{i=0}^{\infty} s_i r^i, \quad w_r(r) = \sum_{i=0}^{\infty} t_i r^i.$$

Если  $m = 0$ , то существуют только два линейно независимых нетривиальных решения. Обозначим полученные решения как:

$$\xi_1 = \begin{vmatrix} w_r \\ w_z \end{vmatrix}_1 = \begin{vmatrix} \xi_{1r} \\ \xi_{1z} \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad \xi_2 = \begin{vmatrix} w_r \\ w_z \end{vmatrix}_2 = \begin{vmatrix} \xi_{2r} \\ \xi_{2z} \end{vmatrix}.$$

При  $m = 0$  нет вариации по углу  $\varphi$ , поэтому  $w_\varphi = 0$  и общее решение исходной системы линеаризованных уравнений примет вид

$$\begin{vmatrix} w_r \\ w_z \end{vmatrix} = C_1 \xi_1 + C_2 \xi_2,$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — константы. При  $m \neq 0$  из уравнения непрерывности

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r w_r) + \frac{im}{r} w_\varphi + ik w_z = 0$$

можем найти  $w_\varphi$ . Подставляя полученные выше ряды для  $w_r$  и  $w_z$  в выражение

$$w_\varphi = - \left( \frac{1}{im} \frac{\partial}{\partial r}(r w_r) + \frac{kr}{m} w_z \right),$$

получим  $w_\varphi$  в виде ряда,

$$w_\varphi(r) = \sum_{i=0}^{\infty} g_i r^i,$$

причем коэффициенты этого ряда вычисляются через коэффициенты рядов для  $w_r$  и  $w_z$  по формулам

$$g_0 = -\frac{1}{im} t_0, \quad g_j = -\frac{k}{m} s_{j-1} - \frac{j+1}{im} t_j, \quad j = 1, \dots, \infty.$$

Полученные три линейно независимых решения представим в следующем виде:

$$\vartheta_1 = \begin{vmatrix} w_r \\ w_\varphi \\ w_z \end{vmatrix}_1 = \begin{vmatrix} \vartheta_{1r} \\ \vartheta_{1\varphi} \\ \vartheta_{1z} \end{vmatrix},$$

$$\vartheta_2 = \begin{vmatrix} w_r \\ w_\varphi \\ w_z \end{vmatrix}_2 = \begin{vmatrix} \vartheta_{2r} \\ \vartheta_{2\varphi} \\ \vartheta_{2z} \end{vmatrix},$$

$$\vartheta_3 = \begin{vmatrix} w_r \\ w_\varphi \\ w_z \end{vmatrix}_3 = \begin{vmatrix} \vartheta_{3r} \\ \vartheta_{3\varphi} \\ \vartheta_{3z} \end{vmatrix}.$$

Тогда любое решение системы уравнений можно выразить через их линейную комбинацию:

$$\begin{vmatrix} w_r \\ w_\varphi \\ w_z \end{vmatrix} = C_1 \vartheta_1 + C_2 \vartheta_2 + C_3 \vartheta_3,$$

где  $C_1$ ,  $C_2$  и  $C_3$  — константы. Подставляя полученные выражения в граничные условия (12)–(15) и

при этом подставляя в (13) выражение для давления  $P = \hat{\mathcal{D}} w_z / ik \text{Re}$ , получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \omega a &= \vartheta_{1r} C_1 + \vartheta_{2r} C_2 + \vartheta_{3r} C_3, \\ \frac{i}{k \text{Re}} \hat{\mathcal{D}}(\vartheta_{1z} C_1 + \vartheta_{2z} C_2 + \vartheta_{3z} C_3) &+ \\ &+ \frac{2}{\text{Re}} \left( \frac{\partial \vartheta_{1r}}{\partial r} C_1 + \frac{\partial \vartheta_{2r}}{\partial r} C_2 + \frac{\partial \vartheta_{3r}}{\partial r} C_3 \right) = \\ &= \left( -k^2 + kEl \frac{K'_m(kR)}{K_m(kR)} + \frac{1-m^2}{R^2} \right) a, \\ ik(\vartheta_{1r} C_1 + \vartheta_{2r} C_2 + \vartheta_{3r} C_3) + \frac{\partial}{\partial r} \vartheta_{1z} C_1 &+ \\ &+ \frac{\partial}{\partial r} \vartheta_{2z} C_2 + \frac{\partial}{\partial r} \vartheta_{3z} C_3 = 0, \\ \frac{im}{r}(\vartheta_{1r} C_1 + \vartheta_{2r} C_2 + \vartheta_{3r} C_3) &+ \\ &+ \left( \frac{\partial}{\partial r} \vartheta_{1\varphi} C_1 + \frac{\partial}{\partial r} \vartheta_{2\varphi} C_2 + \frac{\partial}{\partial r} \vartheta_{3\varphi} C_3 \right) - \\ &- \frac{1}{r}(\vartheta_{1\varphi} C_1 + \vartheta_{2\varphi} C_2 + \vartheta_{3\varphi} C_3) = 0, \end{aligned} \quad (35)$$

где предполагается, что все функции и их производные взяты при  $r = R = 1/2$ .

Подставляя выражение  $a = (\vartheta_{1r} C_1 + \vartheta_{2r} C_2 + \vartheta_{3r} C_3) / \omega$ , полученное из первого уравнения, в оставшиеся уравнения системы (35), получим три уравнения относительно неизвестных констант  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ , которые можно представить в матричной форме:

$$\begin{vmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} & \Psi_{13} \\ \Psi_{21} & \Psi_{22} & \Psi_{23} \\ \Psi_{31} & \Psi_{32} & \Psi_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{vmatrix} = 0, \quad (36)$$

где

$$\begin{aligned} \Psi_{11} &= \frac{i}{k \text{Re}} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \vartheta_{1z}}{\partial r} \right) - \left( \frac{m^2}{R^2} + \lambda^2 \right) \vartheta_{1z} \right] + \\ &+ \frac{2}{\text{Re}} \frac{\partial \vartheta_{1r}}{\partial r} + \left( k^2 - kEl \frac{K'_m(kR)}{K_m(kR)} - \frac{1-m^2}{R^2} \right) \frac{\vartheta_{1r}}{\omega}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi_{12} &= \frac{i}{k \text{Re}} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \vartheta_{2z}}{\partial r} \right) - \left( \frac{m^2}{R^2} + \lambda^2 \right) \vartheta_{2z} \right] + \\ &+ \frac{2}{\text{Re}} \frac{\partial \vartheta_{2r}}{\partial r} + \left( k^2 - kEl \frac{K'_m(kR)}{K_m(kR)} - \frac{1-m^2}{R^2} \right) \frac{\vartheta_{2r}}{\omega}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi_{13} &= \frac{i}{k \text{Re}} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \vartheta_{3z}}{\partial r} \right) - \left( \frac{m^2}{R^2} + \lambda^2 \right) \vartheta_{3z} \right] + \\ &+ \frac{2}{\text{Re}} \frac{\partial \vartheta_{3r}}{\partial r} + \left( k^2 - kEl \frac{K'_m(kR)}{K_m(kR)} - \frac{1-m^2}{R^2} \right) \frac{\vartheta_{3r}}{\omega}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi_{21} &= ik\vartheta_{1r} + \frac{\partial}{\partial r}\vartheta_{1z}, & \Psi_{22} &= ik\vartheta_{2r} + \frac{\partial}{\partial r}\vartheta_{2z}, \\ \Psi_{23} &= ik\vartheta_{3r} + \frac{\partial}{\partial r}\vartheta_{3z}, \\ \Psi_{31} &= \frac{im}{r}\vartheta_{1r} + \frac{\partial}{\partial r}\vartheta_{1\varphi} - \frac{1}{r}\vartheta_{1\varphi}, \\ \Psi_{32} &= \frac{im}{r}\vartheta_{2r} + \frac{\partial}{\partial r}\vartheta_{2\varphi} - \frac{1}{r}\vartheta_{2\varphi}, \\ \Psi_{33} &= \frac{im}{r}\vartheta_{3r} + \frac{\partial}{\partial r}\vartheta_{3\varphi} - \frac{1}{r}\vartheta_{3\varphi}. \end{aligned}$$

Заметим, что в выражениях для элементов матрицы использовалось явное выражение для оператора

$$\hat{\mathcal{D}} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) - \left( \frac{m^2}{r^2} + \lambda^2 \right).$$

Условие разрешимости системы уравнений (36) приводит к дисперсионному уравнению

$$\det \begin{vmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} & \Psi_{13} \\ \Psi_{21} & \Psi_{22} & \Psi_{23} \\ \Psi_{31} & \Psi_{32} & \Psi_{33} \end{vmatrix} = 0, \quad (37)$$

которое в неявном виде дает зависимость  $\omega = \omega(k)$ .

В частном случае  $m = 0$  (осесимметричные возмущения) количество граничных условий уменьшается, остаются только условия (12)–(14). Подставляя в (13) выражение для давления

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{ik \operatorname{Re}} \hat{\mathcal{D}} w_z \Big|_{m=0} = \\ &= \frac{1}{ik \operatorname{Re}} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial w_z}{\partial r} \right) - \lambda^2 w_z \right], \end{aligned}$$

получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \omega a &= \xi_{1r} C_1 + \xi_{2r} C_2, \\ \frac{i}{k \operatorname{Re}} \hat{\mathcal{D}} (\xi_{1z} C_1 + \xi_{2z} C_2) &+ \\ &+ \frac{2}{\operatorname{Re}} \left( \frac{\partial \xi_{1r}}{\partial r} C_1 + \frac{\partial \xi_{2r}}{\partial r} C_2 \right) = \quad (38) \\ &= a \left( -k^2 + kEl \frac{K'_0(kR)}{K_0(kR)} + \frac{1}{R^2} \right), \end{aligned}$$

$$ik(\xi_{1r} C_1 + \xi_{2r} C_2) + \frac{\partial \xi_{1z}}{\partial r} C_1 + \frac{\partial \xi_{2z}}{\partial r} C_2 = 0,$$

причем предполагается, что все функции и их производные взяты при  $r = R = 1/2$ .

Подставляя выражение  $a = (\xi_{1r} C_1 + \xi_{2r} C_2)/\omega$ , полученное из первого уравнения, в оставшиеся уравнения системы (38), получим два уравнения относительно неизвестных констант  $C_1$  и  $C_2$ , которые можно представить в матричной форме

$$\begin{vmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} C_1 \\ C_2 \end{vmatrix} = 0, \quad (39)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_{11} &= \frac{i}{k \operatorname{Re}} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \xi_{1z}}{\partial r} \right) - \lambda^2 \xi_{1z} \right] + \frac{2}{\operatorname{Re}} \frac{\partial \xi_{1r}}{\partial r} + \\ &+ \left( k^2 - kEl \frac{K'_0(kR)}{K_0(kR)} - \frac{1}{R^2} \right) \frac{\xi_{1r}}{\omega}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_{12} &= \frac{i}{k \operatorname{Re}} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \xi_{2z}}{\partial r} \right) - \lambda^2 \xi_{2z} \right] + \frac{2}{\operatorname{Re}} \frac{\partial \xi_{2r}}{\partial r} + \\ &+ \left( k^2 - kEl \frac{K'_0(kR)}{K_0(kR)} - \frac{1}{R^2} \right) \frac{\xi_{2r}}{\omega}, \end{aligned}$$

$$\Phi_{21} = ik\xi_{1r} + \frac{\partial \xi_{1z}}{\partial r}, \quad \Phi_{22} = ik\xi_{2r} + \frac{\partial \xi_{2z}}{\partial r}.$$

Условие разрешимости системы уравнений (39) приводит к дисперсионному уравнению

$$\det \begin{vmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} \end{vmatrix} = 0, \quad (40)$$

которое в неявном виде дает зависимость  $\omega = \omega(k)$  для случая  $m = 0$ .

#### 4. ВЛИЯНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ НА ЭЛЕКТРОКАПИЛЛЯРНУЮ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ И НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ ТЕОРИИ

В качестве конкретного примера был рассмотрен цилиндр из жидкой платины. Параметры платины в зависимости от абсолютной температуры  $T$  принимались следующими [8]:

$$\rho \text{ [кг/м}^3\text{]} = 19.2 \cdot 10^3 - 0.96(T - T_m),$$

$$\sigma \text{ [Н/м]} = 1.80 - 0.14(T - T_m) \cdot 10^{-3},$$

$$\mu \text{ [Па} \cdot \text{с]} = 0.25 \exp[4.99 \cdot 10^4/RT] \cdot 10^{-3},$$

где  $T_m = 2041$  К.

Для конкретного рассмотрения возьмем жидкий проводник диаметром  $D = 15$  мкм, помещенный в коаксиальный цилиндр диаметром  $D_c = 2.3$  см, как в опытах работы [9]. Пусть проводник находится под напряжением  $V = 30$  кВ. Тогда напряженность электрического поля на его поверхности будет равна

$$E_s = \frac{2V}{D \ln(D_c/D)} = 5.45 \cdot 10^8 \text{ В/м.}$$

Пусть температура проводника равна  $T = 2200$  К, тогда  $\rho = 19.15$  г/см<sup>3</sup>,  $\sigma = 1.78$  Н/м,  $\mu = 3.83 \cdot 10^{-3}$  Па · с. В этом случае получим

$$\operatorname{Re} = \sqrt{\rho\sigma D/\mu^2} = 186.6, \quad El = \varepsilon_0 E_s^2 D/\sigma = 22.2.$$



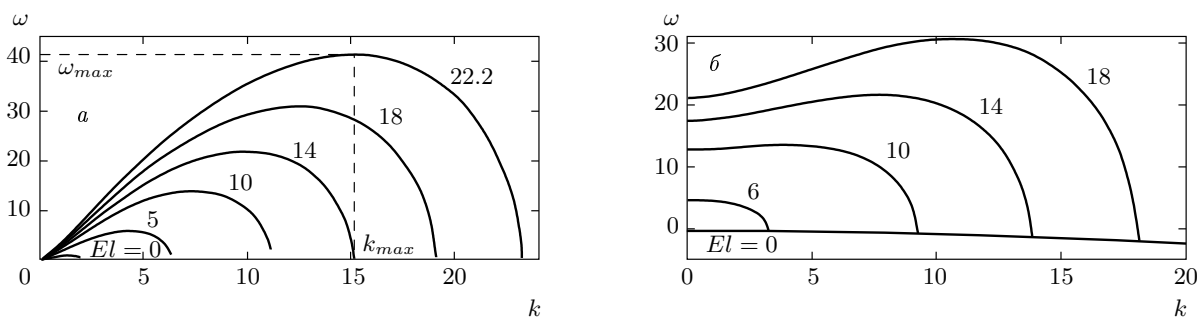


Рис. 2. Зависимости  $\omega(k)$ , полученные из уравнения (40) для моды с  $m = 0$  (а) и из уравнения (37) для моды с  $m = 3$  (б) при  $Re = 186.6$  и различных значениях  $El$ , указанных около кривых

Зависимости  $\omega(k)$  для различных мод возмущения поверхности находились численно из неявных уравнений (37) и (40) соответственно для неосесимметричных ( $m \neq 0$ ) и осесимметричных ( $m = 0$ ) возмущений. Чтобы проиллюстрировать зависимость дисперсионной кривой от параметра  $El$ , характеризующего влияние электрического поля, было построено семейство кривых для осесимметричных возмущений (рис. 2а) и для неосесимметричного возмущения с  $m = 3$  (рис. 2б) для различных значений  $El$ . При этом число Рейнольдса принималось равным  $Re = 186.6$ . На рис. 2а также показан график зависимости  $\omega(k)$  для приведенных выше значений параметров с  $El = 22.2$ , на котором приведены величины  $\omega_{max}$  — максимальная скорость роста неустойчивостей и  $k_{max}$  — волновое число, соответствующее этой максимальной скорости роста.

Из полученных зависимостей видно, что влияние электрического поля приводит для всех мод к увеличению максимальной скорости роста неустойчивостей  $\omega_{max}$  (значения  $\omega_{max}$  растут с ростом  $El$ ) и к уменьшению длины волны наиболее неустойчивой моды (которая в размерном виде определяется формулой  $\lambda_{max} = (2\pi/k_{max})D$ , где  $k_{max}$  — волновое безразмерное число, соответствующее  $\omega_{max}$ ,  $D$  — диаметр цилиндра).

На рис. 3а показаны зависимости  $\omega_{max}(El)$  для первых пяти гармоник возмущения ( $m = 0, 1, 2, 3, 4$ ). Приблизительно полученные зависимости при больших  $El$  стремятся к кривой  $\omega_{max} = 0.655(El)^{1.33}$ . Из рис. 3 видно, что неосесимметричные моды начинают расти только при достижении полем некоторого критического значения, которое увеличивается с ростом  $m$ . Можно сказать, что растущее электрическое поле последовательно включает угловые моды. Скорость максимального роста величины  $\omega_{max}$  при фиксированном  $m$  при увеличении  $El$  стремится к зависимости  $\omega_{max} = \omega_{max}(El)$  для осесиммет-

ричной моды ( $m = 0$ ). Это означает, что при большом электрическом поле все моды с не слишком большими  $m$  растут практически одинаково и при таких больших полях на поверхности проводника будет сложная структура многомодового возмущения, которое, тем не менее, можно охарактеризовать некоторым значением  $\lambda_{max}$ , определяемым осесимметричной модой. Это подтверждает зависимость  $k_{max}(El)$  для различных мод, показанная на рис. 3б, из которой видно, что с ростом поля все кривые сближаются. На основании результатов расчета зависимостей  $k_{max}(El)$  была получена для больших  $El$  асимптотическая зависимость для длины волны наиболее неустойчивой моды  $\lambda_{max} = 5.874/(El)^{0.854}$  в безразмерных единицах.

Зависимости, показанные на рис. 3, имеют любопытные особенности.

1) В малых полях (см. рис. 3а) при  $El \geq 0.3$  возмущения, соответствующие изгибной неустойчивости с  $m = 1$ , растут быстрее всех мод, включая осесимметричную (так называемую сосисочную неустойчивость). Мода с  $m = 2$  при  $El \geq 5.6$  растет едва заметно быстрее осесимметричной моды, но медленнее моды с  $m = 1$ .

2) Инкременты роста всех мод, начиная с моды  $m = 3$ , растут медленнее осесимметричной моды при любых полях.

3) Когда с увеличением поля начинается рост несимметричных мод (см. рис. 3б для  $m \geq 1$ ) существует некоторый диапазон значений  $El$ , на котором  $k_{max} = 0$ , т. е. преимущественно эти моды растут без изменения по координате  $z$ .

Из полученных зависимостей можно определить характерное размерное время роста наиболее неустойчивой моды возмущений в приведенном выше примере с платиновым цилиндром. Оно вычисляется по формуле  $\tau = \sqrt{\rho D^3 / \sigma} / \omega_{max}$ . Для напряжения  $V = 30$  кВ было получено значение

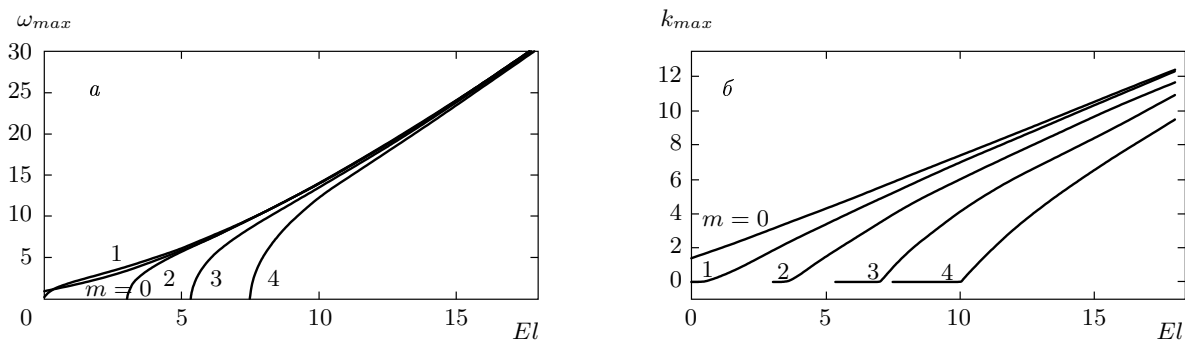


Рис. 3. Зависимости  $\omega_{max}$  (а) и  $k_{max}$  (б) от  $El$  при  $Re = 186.6$  для пяти первых мод

$\omega_{max} \approx 40.5$ , поэтому  $\tau \approx 6 \cdot 10^{-6}c/40.5 \approx 148$  нс и  $\lambda_{max} \approx 6.24$  мкм. Если напряжение увеличить до значения 34.9 кВ, то  $\omega_{max} \approx 60.5$  и, следовательно,  $\tau \approx 6 \cdot 10^{-6}c/60.5 \approx 99.2$  нс и  $\lambda_{max} \approx 4.8$  мкм. А скачок напряжения до 82 кВ даст значение  $\tau = 6 \cdot 10^{-6}c/587 = 10.2$  нс и  $\lambda_{max} \approx 1.1$  мкм.

Хотя приведенный анализ электрокапиллярных неустойчивостей и не претендует на объяснение главных неустойчивостей в задаче о взрыве проводников, тем не менее хочется обратить внимание на следующее. В опытах по электровзрыву проводников напряжение на проводнике уменьшается линейно от значительных (после его плавления) величин до нуля на заземленном конце, при этом для большей части проводника разность потенциалов между поверхностью проводника и заземленным коаксиалом значительна. Результаты полученных оценок позволяют сделать предположение, что на указанной части поверхности жидкого проводника из-за сильных электрических полей возникают коротковолновые неустойчивости, которые на линейной стадии развития приближенно описываются изложенной выше теорией, а в результате нелинейного развития этих неустойчивостей из них могут образоваться конусы Тэйлора. Отметим, что только электрокапиллярные неустойчивости могут приводить к образованию конусов Тэйлора, причем, как известно в сильных полях из конусов Тэйлора берут начало микроструи и их вершины становятся источниками ионов [10]. Таким образом, можно предположить, что эрозия указанной поверхности жидкого проводника в электрическом поле должна быть совершенно отлична от простого испарения. Такая эрозия может играть существенную роль в создании шунтирующей плазменной рубашки при электровзрыве проводников в вакууме.

### 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе найдено точное решение линеаризованных уравнений, описывающих электрокапиллярную неустойчивость жидкого проводящего цилиндра. Найдены точные дисперсионные уравнения в рамках линейной задачи. Показано, что максимальные скорости роста неустойчивостей быстро возрастают при увеличении электрического поля на поверхности невозмущенного проводника, а длины волн наиболее неустойчивых мод всех гармоник уменьшаются. Обнаружено, что с ростом электрического поля последовательно включаются (т.е. начинают расти во времени) угловые моды, причем максимальная скорость временного роста всех возникших мод монотонно увеличивается с ростом электрического поля.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 05-08-33713-а).

### ПРИЛОЖЕНИЕ

#### Вычисление вариации средней кривизны поверхности при изменении ее формы

Пусть гладкая поверхность задается векторным параметрическим представлением:  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ . Средней кривизной  $H$  поверхности в данной точке называется полусумма ее главных кривизн  $k_1$  и  $k_2$ ,

$$H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2),$$

которая может быть выражена через коэффициенты первой и второй квадратичных форм поверхности следующим образом [11, 12]:

$$H = \frac{1}{2} \frac{EN - 2FM + GL}{EG - F^2}.$$

По определению, первой квадратичной формой поверхности называется выражение

$$I = d\mathbf{r}^2 = Edu^2 + 2F du dv + G dv^2,$$

где  $E = \mathbf{r}_u^2$ ,  $F = \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_v$ ,  $G = \mathbf{r}_v^2$ .

Вторая квадратичная форма поверхности определяется следующим образом:

$$II = d^2\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} = L du^2 + 2M du dv + N dv^2,$$

где

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{\sqrt{EG - F^2}}$$

— единичный вектор нормали к поверхности, а коэффициенты выражаются формулами

$$L = \mathbf{r}_{uu} \cdot \mathbf{n} = \frac{(\mathbf{r}_{uu}, \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v)}{\sqrt{EG - F^2}},$$

$$M = \mathbf{r}_{uv} \cdot \mathbf{n} = \frac{(\mathbf{r}_{uv}, \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v)}{\sqrt{EG - F^2}},$$

$$N = \mathbf{r}_{vv} \cdot \mathbf{n} = \frac{(\mathbf{r}_{vv}, \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v)}{\sqrt{EG - F^2}},$$

где  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$  — смешанное произведение.

В данной работе радиус-вектор возмущенной поверхности жидкости может быть представлен в действительном представлении следующей формулой:

$$\mathbf{r} = (B + \eta)\mathbf{e}_r + 0\mathbf{e}_\varphi + z\mathbf{e}_z,$$

где  $\eta = \varepsilon \cos(kz + m\varphi)$  — гармоническое возмущение поверхности,  $\varepsilon = ae^{\omega t}$  — амплитуда возмущения поверхности, которая считается малой ( $\varepsilon \ll R$ ),  $m \geq 0$  — целое число,  $\mathbf{e}_r$ ,  $\mathbf{e}_\varphi$  и  $\mathbf{e}_z$  — орты цилиндрической системы координат. Здесь роль параметров в параметрическом задании поверхности  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$  играют координаты  $u = \varphi$  и  $v = z$ . Учитывая, что в цилиндрической системе координат

$$\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \varphi} \equiv (\mathbf{e}_r)_\varphi = \mathbf{e}_\varphi, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial \varphi} \equiv (\mathbf{e}_\varphi)_\varphi = -\mathbf{e}_r,$$

получим

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_u = \mathbf{r}_\varphi &= [R + \varepsilon \cos(kz + m\varphi)]_\varphi \mathbf{e}_r + \\ &+ [R + \varepsilon \cos(kz + m\varphi)] (\mathbf{e}_r)_\varphi = \\ &= -m\varepsilon \sin(kz + m\varphi)\mathbf{e}_r + [R + \varepsilon \cos(kz + m\varphi)] \mathbf{e}_\varphi, \end{aligned}$$

$$\mathbf{r}_v = \mathbf{r}_z = -k\varepsilon \sin(kz + m\varphi)\mathbf{e}_r + \mathbf{e}_z.$$

Из полученных выражений следует, что с точностью до линейных членов по  $\varepsilon$  коэффициенты первой квадратичной формы имеют вид

$$\begin{aligned} E = \mathbf{r}_u^2 &= [m\varepsilon \sin(kz + m\varphi)]^2 + \\ &+ [R + \varepsilon \cos(kz + m\varphi)]^2 \approx \\ &\approx R^2 \left[ 1 + \frac{2\varepsilon}{R} \cos(kz + m\varphi) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F = (\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v) &= \{-m\varepsilon \sin(kz + m\varphi)\mathbf{e}_r + \\ &+ [R + \varepsilon \cos(kz + m\varphi)] \mathbf{e}_\varphi, \\ &- k\varepsilon \sin(kz + m\varphi)\mathbf{e}_r + \mathbf{e}_z\} = \\ &= mk\varepsilon^2 \sin^2(kz + m\varphi) \approx 0, \end{aligned}$$

$$G = \mathbf{r}_v^2 = 1 + [k\varepsilon \sin(kz + m\varphi)]^2 \approx 1.$$

Нетрудно также проверить, что с точностью до линейных членов по  $\varepsilon$  имеем

$$\mathbf{n} \approx \mathbf{e}_r + \frac{m\varepsilon}{R} \sin(kz + m\varphi)\mathbf{e}_\varphi + k\varepsilon \sin(kz + m\varphi)\mathbf{e}_z,$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{uu} = \mathbf{r}_{\varphi\varphi} &= -[R + \varepsilon(1 + m^2) \cos(kz + m\varphi)] \mathbf{e}_r - \\ &- 2m\varepsilon \sin(kz + m\varphi)\mathbf{e}_\varphi, \end{aligned}$$

$$\mathbf{r}_{uv} = \mathbf{r}_{\varphi z} = -km\varepsilon \cos(kz + m\varphi)\mathbf{e}_r - k\varepsilon \sin(kz + m\varphi)\mathbf{e}_\varphi,$$

$$\mathbf{r}_{vv} = \mathbf{r}_{zz} = -k^2\varepsilon \cos(kz + m\varphi)\mathbf{e}_r.$$

Коэффициенты второй квадратичной формы в том же приближении имеют вид

$$L = \mathbf{r}_{uu} \cdot \mathbf{n} \approx -[R + \varepsilon(1 + m^2) \cos(kz + m\varphi)],$$

$$M = \mathbf{r}_{uv} \cdot \mathbf{n} \approx -km\varepsilon \cos(kz + m\varphi),$$

$$N = \mathbf{r}_{vv} \cdot \mathbf{n} \approx -k^2\varepsilon \cos(kz + m\varphi).$$

Используя полученные выражения, получаем

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \frac{EN - 2FM + GL}{EG - F^2} \approx \\ &\approx \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{R} - k^2\eta + \frac{1 - m^2}{R^2} \eta \right), \end{aligned}$$

откуда следует, что вариация средней кривизны равна

$$\delta H = \frac{1}{2} \left( -k^2 + \frac{1 - m^2}{R^2} \right) \eta.$$

## ЛИТЕРАТУРА

1. Lord Rayleigh, Proc. Lond. Math. Soc. **10**, 4 (1878).
2. Lord Rayleigh, Proc. Roy. Soc. London A **29**, 94 (1879).
3. Lord Rayleigh, Phil. Mag. **34**, 145 (1892).
4. S. Chandrasekhar, *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*, Clarendon Press, Oxford (1961).
5. S. Tomotika, Proc. Roy. Soc. London A **150**, 322 (1935).
6. J. Eggers, Rev. Mod. Phys. **69**, 865 (1997).
7. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Гидродинамика*, Наука, Москва (1986).
8. T. Ishikawa, P.-F. Paradis, and N. Koike, in *JAXA Research and Development Report*, Japan Aerospace Exploration Agency, January 6 (2006), <http://www.jaxa.jp>.
9. A. D. Rakhel and G. S. Sarkisov, Int. J. Thermophys. July **25**, 1215 (2004).
10. М. Д. Габович, УФН **140**, 137 (1983).
11. М. М. Постников, *Линейная алгебра и дифференциальная геометрия*, Наука, Москва (1979).
12. Э. Г. Позняк, Е. В. Шикин, *Дифференциальная геометрия*, Изд-во МГУ, Москва (1990).