

СВЕРХКОРОТКИЕ РЕЛЯТИВИСТСКИ СИЛЬНЫЕ СОЛИТОНЫ В ПЛАЗМЕ

*В. А. Миронов, Д. А. Фадеев**

*Институт прикладной физики Российской академии наук
603950, Нижний Новгород, Россия*

Поступила в редакцию 22 октября 2007 г.

Исследовано уравнение, описывающее безотражательное распространение неоднородных релятивистски сильных электромагнитных волновых пакетов в плазме. Найдено семейство трехмерных солитонов и аналитически обоснована их устойчивость. Проведено численное исследование динамики формирования солитонов и их взаимодействия.

PACS: 05.45.Yv, 72.20.Ht

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время достигнуты существенные успехи как в создании лазеров, генерирующих сверхкороткие импульсы большой мощности, так и в исследованиях взаимодействия таких импульсов с веществом. Большое число возможных приложений (ускорение заряженных частиц, генерация гармоник и др.) и очевидные сейчас перспективы развития делают необходимыми дальнейшие исследования в этой области (см. работы [1, 2] и цитируемую там литературу). Мощности фемтосекундных лазеров уверенно превосходят тераваттный уровень, а создаваемые ими поля достигли значений, при которых скорость осцилляций электрона приближается к скорости света. В таких релятивистски сильных полях ионизация среды происходит на переднем фронте. Таким образом, в рамках общей проблемы взаимодействия электромагнитного излучения с плазмой нелинейный режим определяется конкуренцией релятивистской нелинейности, связанной с зависимостью массы электрона от скорости, и стрикции (перераспределения электронной плотности в области, занятой волновым пакетом) [3–8].

Особый интерес в проблеме нелинейного распространения мощных электромагнитных импульсов представляет формирование трехмерных структур, сохраняющих свою локализацию по всем направле-

ниям в процессе распространения, называемых также «оптическими пулями». Существование и устойчивость таких структур в рамках нелинейного уравнения Шредингера были подробно исследованы в многочисленных работах (см., например, [9, 10] и цитируемую там литературу). В большинстве работ для стабилизации модуляционной неустойчивости и последующего коллапса используется подход, связанный с феноменологическим учетом насыщения нелинейности. В предлагаемой работе мы продолжим исследование особенностей динамики самовоздействия релятивистски сильного лазерного излучения в плазме. В рассматриваемой модели нелинейности, учитывающей релятивистскую зависимость массы электронов от скорости их движения, насыщение нелинейного отклика возникает естественным образом. Кроме того, в этом случае удается отказаться от приближения плавной огибающей (медленно меняющихся амплитуд) и провести обобщение нелинейного уравнения Шредингера для описания импульсов с малыми числами заполнения. В разд. 2 мы представим соответствующее уравнение и обсудим условия применимости рассматриваемой модели. В разд. 3 проведем качественное исследование динамики самовоздействия. В разд. 4 найдены трехмерные структуры солитонного типа и доказана их устойчивость. В разд. 5 результаты качественного исследования подтверждены численным моделированием эволюции системы.

*E-mail: prgdn@mail.ru

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Для описания пространственно-временной эволюции циркулярно поляризованного релятивистски сильного лазерного излучения в разреженной плазме воспользуемся волновым уравнением в безотражательном приближении:

$$\frac{2}{c} \frac{\partial^2 A}{\partial \tau \partial z} - \Delta_{\perp} A + \frac{\omega_p^2}{c^2} \frac{A}{\sqrt{1 + \frac{e^2}{c^4 m^2} |A|^2}} = 0, \quad (2.1)$$

где $\omega_p = 4\pi N e^2 / m$ — электронная плазменная частота, а N — концентрация плазмы. Данное уравнение записано в системе координат, связанной со скоростью света:

$$\tau = t - \frac{1}{c} z. \quad (2.2)$$

Реальный векторный потенциал A здесь представлен в виде комплексной функции, действительная часть которой отвечает компоненте A_x , а мнимая — A_y . Продольная компонента A_z мала в рассматриваемом приближении (характерный поперечный размер волнового поля $L_{\perp} \gg \lambda$, где λ — длина волны). Рассмотрение циркулярно поляризованного излучения позволяет исключить эффекты генерации высоких гармоник за счет нелинейного отклика среды.

Как и в работе [11], мы воспользовались приближением безотражательного распространения импульсов в разреженной плазме:

$$\omega \gg \omega_p, \quad (2.3)$$

где ω — частота лазерного излучения. Нелинейное слагаемое получено на основе уравнений гидродинамики для холодного газа электронов в приближении невозмущенной плотности плазмы. При этом из модели были исключены как эффекты усредненного ухода частиц из области взаимодействия в направлении, перпендикулярном направлению распространения волнового пакета (стрикция, образование пузырей), так и процессы возбуждения продольных колебаний плазмы (возбуждение кильватерных волн). Эффектами поперечной стрикции можно пренебречь в случае квазиплоского распространения [8]:

$$\left(\frac{A}{A_0} \right)^3 \ll \frac{L_{\perp}}{L_{\parallel}}, \quad (2.4)$$

где $A_0 = c^2 m / e$ — характерное релятивистское значение векторного потенциала, L_{\parallel} и L_{\perp} — характерные продольный и поперечный масштабы огибающей волнового пакета.

Анализ моделей, учитывающих возбуждение кильватерных волн, показал, что источником нелинейных продольных колебаний плазмы является огибающая комплексного векторного потенциала. Таким образом, условие пренебрежения кильватерными волнами принимает вид

$$\frac{L_{\parallel}}{c} \gg \omega_p. \quad (2.5)$$

Заметим, что импульсы с предельно малым числом заполнения не удовлетворяют системе условий (2.3) и (2.5). Проведенное исследование представляет собой начальный этап рассмотрения более полных (в смысле учета кильватерных волн и эффектов стрикции) моделей взаимодействия сильного лазерного излучения с плазмой.

Масштабная инвариантность уравнения (2.1) позволяет переписать его в следующем безразмерном виде:

$$2 \frac{\partial^2 A}{\partial \tau \partial z} - \Delta_{\perp} A + \frac{A}{\sqrt{1 + |A|^2}} = 0, \quad (2.6)$$

где x, y, z измеряются в единицах c/ω_p , τ — в $1/2\omega_p$, а A — в $c^2 m / e$. Далее мы будем рассматривать цилиндрически симметричные решения, поэтому оператор Δ_{\perp} следует заменить на оператор

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right),$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

3. ИНТЕГРАЛЫ ЗАДАЧИ. ЭВОЛЮЦИЯ МОМЕНТОВ

Пользуясь гамильтоновым формализмом [12], можно получить следующие интегралы уравнения (2.6):

$$H = \int \left(\left| \frac{\partial A}{\partial r} \right|^2 + 2\sqrt{1 + |A|^2} - 2 \right) r dr d\tau, \quad (3.1)$$

$$I = \int \left| \frac{\partial A}{\partial \tau} \right|^2 r dr d\tau. \quad (3.2)$$

Подобные интегралы были приведены ранее [11]. Они являются обобщением хорошо известных интегралов для квазимонохроматических пакетов: H — гамильтониан, I — энергия (число квантов).

Волновое уравнение (2.6) имеет еще один интеграл, полезный как для контроля численных расчетов,

так и для аналитических выкладок по обоснованию устойчивости (см. п. 4.2):

$$P = i \int \left(\frac{\partial A}{\partial \tau} A^* - \frac{\partial A^*}{\partial \tau} A \right) r dr d\tau. \quad (3.3)$$

Этот интеграл характеризует скорость движения волнового пакета вдоль координаты τ . Для квазимонохроматических пакетов такой интеграл свидетельствует о сохранении средней частоты импульса. Заметим, что этот интеграл не следует непосредственно из процедуры, описанной в работе [12]. Аналогично тому, как это было сделано в работе [11], можно определить законы эволюции моментов первого и второго порядков: центра масс импульса в сопутствующем времени,

$$\bar{\tau} = \frac{1}{I} \int \tau \left| \frac{\partial A}{\partial \tau} \right|^2 r dr d\tau, \quad (3.4)$$

квадрата характерной длительности,

$$\overline{\tau^2} = \frac{1}{I} \int (\tau - \bar{\tau})^2 \left| \frac{\partial A}{\partial \tau} \right|^2 r dr d\tau, \quad (3.5)$$

и квадрата эффективной поперечной ширины,

$$\overline{r^2} = \frac{1}{I} \int r^2 \left| \frac{\partial A}{\partial \tau} \right|^2 r dr d\tau. \quad (3.6)$$

Начнем с анализа поведения центра масс:

$$\frac{d\bar{\tau}}{dz} = -\frac{H}{I}. \quad (3.7)$$

На основании положительной определенности интеграла H можно заметить, что все волновые пакеты движутся в сопутствующей системе в одном направлении. Видно также, что линейный вклад среды уменьшает скорость пакета в исходной системе отсчета, а первый нелинейный член разложения релятивистской нелинейности в ряд Тейлора, наоборот, увеличивает скорость пакета. Видно также, что при уменьшении амплитуды с одновременным поперечным уширением импульса его скорость стремится к скорости света в вакууме.

Далее рассмотрим поведение поперечной ширины пакета. В результате приходим к следующему выражению для второй производной от квадрата поперечной ширины по эволюционной координате:

$$\frac{\partial \overline{r^2}}{\partial z^2} = \frac{8}{I} \times \int \left(|A_r|^2 - \frac{2 + |A|^2 - 2\sqrt{1 + |A|^2}}{\sqrt{1 + |A|^2}} \right) r dr d\tau. \quad (3.8)$$

В отличие от случая кубической нелинейности, уравнение (3.8) не представляется в виде комбинации интегралов задачи. Это выражение может быть полезно лишь для анализа начального характера эволюции волнового поля, описываемого некоторыми пробными функциями (гауссовым импульсом, например). Выражение (3.8) позволяет получить системы дифференциальных уравнений для параметров класса пробных функций. Для сильных импульсов ($A \gg 1$) уравнение (3.8) несколько упрощается. В этом случае основной вклад в интеграл дает приосевая часть волнового поля и вместо (3.8) можно воспользоваться асимптотическим выражением

$$\frac{\partial \overline{r^2}}{\partial z^2} \approx \frac{8}{I} \int (|A_r|^2 - |A|) r dr d\tau. \quad (3.9)$$

Первое слагаемое приводит к уширению импульса, второе слагаемое обусловлено нелинейным членом уравнения (2.6) и составляет конкуренцию первому слагаемому. В работе [11] продемонстрирована тенденция к коллапсу волновых пакетов в задачах, описываемых подобными (2.6) уравнениями с фокусирующей нелинейностью. Однако анализ выражения (3.9) показывает, что при значительном росте величины векторного потенциала в некоторой области пространства нелокальное слагаемое $|A_r|$ (пропорциональное $|A|^2$ при сохранении поперечного масштаба) превысит нелинейное слагаемое $|A|$ и коллапс прекратится. Такое поведение является следствием насыщения нелинейности, присущего рассматриваемой системе.

Анализ уравнения (3.8) для слабых полей эквивалентен анализу выражения (2.6) с квадратичной нелинейностью, который был проведен ранее [11]. Заметим, что на основании разложения подынтегрального выражения в (3.8) для слабых полей не удастся получить критерий «выживания» импульсов. Ясно, однако, что уменьшение амплитуды импульса без изменения его пространственного масштаба будет приводить к тому, что импульс будет расплываться на начальном этапе эволюции.

Аналогичным образом можно ввести зависимость, описывающую поведение длительности импульса:

$$\frac{d^2 \bar{\tau}^2}{dz^2} = \frac{2}{I} \int \left| \frac{1}{r} (rq_r)_r + p \right|^2 r dr d\tau - 2 \frac{H^2}{I^2}, \quad (3.10)$$

где

$$q_r = -A, \quad p_r = \frac{A}{\sqrt{1 + |A|^2}}.$$

В сочетании с методом вариации параметров пробных функций это выражение также может быть

использовано для определения классов распределений, сохраняющих продольную локализацию на начальном этапе эволюции.

4. СОЛИТОНЫ

Перейдем к рассмотрению солитонных решений исследуемого волнового уравнения. Будем искать решения, бегущие по τ и не меняющие форму огибающей в процессе эволюции. Заметим, что в рассматриваемой модели фазовая и групповая скорости совпадают по значению и противоположны по направлению в выбранной системе отсчета. На основании этого факта вид солитона был выбран следующим образом:

$$A_{sol}(r, \tau, z) = f(\tau - Vz, r)e^{i\phi(\tau + Vz)}, \quad f, \phi \in \mathbb{R}. \quad (4.1)$$

Далее перейдем к определению семейства подобных решений уравнения (2.6).

4.1. Уравнение для солитонов

Далее удобно перейти в новую систему координат

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{|V|}}(\tau - Vz), \quad \xi = \frac{1}{\sqrt{|V|}}(\tau + Vz), \quad (4.2)$$

которая, как видно из (4.1), связана с огибающей и фазой солитона. Ясно, что огибающая солитона движется со скоростью меньшей скорости света в вакууме, поэтому, учитывая (4.1) и переход к сопутствующей системе координат, в дальнейших выкладках величину V будем считать положительно определенной. В новых координатах (ξ, η) волновое уравнение принимает вид

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{\sqrt{1 + |A|^2}} \right] A = 0. \quad (4.3)$$

Следуя формальной процедуре поиска стационарных решений, получаем обыкновенные дифференциальные уравнения для фазы и действительной амплитуды локализованного распределения:

$$-\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - \left(\frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right)^2 f - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{f}{\sqrt{1 + f^2}} = 0, \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} = 0. \quad (4.5)$$

Решение уравнения (4.5) очевидно:

$$\phi = a\xi. \quad (4.6)$$

Подстановка решения (4.6) в уравнение (4.4) позволяет получить обыкновенные дифференциальные уравнения для $f(\eta, r)$ с одним параметром a . Интервал для параметра a , в котором имеется локализованное решение, легко определяется разложением нелинейности в ряд Тейлора:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) = f(1 - a^2) - \frac{1}{2} f^3. \quad (4.7)$$

Тогда неравенство, определяющее допустимые значения параметра a , примет вид

$$-1 < a < 1. \quad (4.8)$$

Перейдем к поиску сферически-симметричных решений уравнения (4.4):

$$f(r, \eta) = f(\rho), \quad \rho = \sqrt{\eta^2 + r^2}. \quad (4.9)$$

Легко видеть, что в этом случае дифференциальный оператор в уравнении (4.4) заменяется на радиальную компоненту сферического лапласиана:

$$\frac{1}{\rho^2} \frac{d}{d\rho} \left(\rho^2 \frac{df}{d\rho} \right) + a^2 f - \frac{f}{\sqrt{1 + f^2}} = 0. \quad (4.10)$$

Для определения локализованного состояния мы использовали метод «пристрелки», состоящий в решении задачи Коши с начальными условиями $f(\rho = 0) = f_0$, $(df(\rho)/d\rho)_{\rho=0} = 0$. Значение f_0 подбиралось таким образом, чтобы $f(\rho \rightarrow \infty) \rightarrow 0$.

На рис. 1 приведены зависимости от параметра a энергии солитонов

$$I = 2\pi \int \left| \frac{\partial A}{\partial \eta} \right|^2 r dr d\eta$$

и характеристики

$$W = 2\pi \int |A|^2 r dr d\eta,$$

полезной как для исследования устойчивости, так и для сравнения с аналогичными структурами в уравнении Шредингера [9]. На рис. 2 приведены вещественные части $\text{Re } A$ солитонных решений для трех значений параметра $a = 0.95, 0.97, 0.99$.

Итак, мы получили двухпараметрическое (a, V) семейство солитонов. Параметр a определяет амплитуду солитона и число заполнения, причем, как видно из рис. 2, зависимость числа заполнения и амплитуды от a в области $a \sim 1$ «резкая». При изменении несущей частоты на 4% длительность и амплитуда локализованного распределения меняются

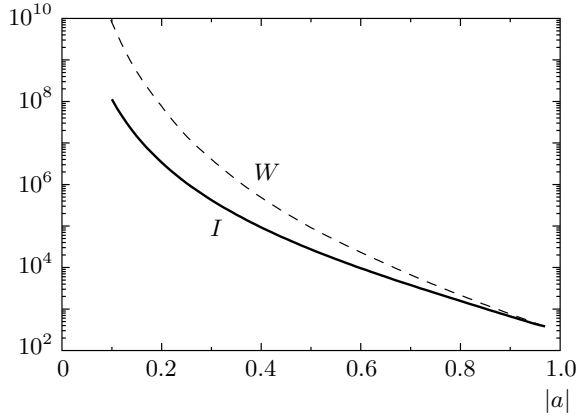


Рис. 1. Зависимость энергии солитона от a . Сплошная линия — $I = 2\pi \int |\partial A / \partial \eta|^2 r dr d\eta$, штриховая линия — $W = 2\pi \int |A|^2 r dr d\eta$

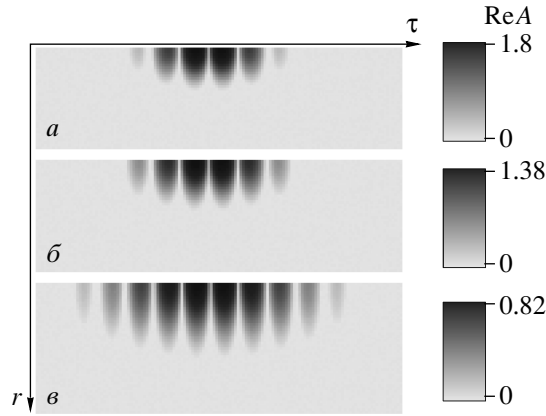


Рис. 2. Вещественная часть распределения поля $A(r, \tau)$ в солитоне при $a = 0.95$ (а), 0.97 (б), 0.99 (в)

в два раза. Параметр V определяет скорость движения солитона и масштабирует его полное поле по продольной координате. В сопутствующей системе координат более вытянутый солитон движется быстрее, т. е. центр масс волнового пакета сильнее отстает от пакетов, распространяющихся в вакууме. Размерная скорость солитона в исходной системе координат выражается через параметр V следующим образом:

$$v_g = \frac{c}{1 + V}. \tag{4.11}$$

Параметр V является калибровочным. Он следует из масштабной инвариантности уравнения (2.6). Таким образом, любые начальные условия можно пере-

считать с помощью простого преобразования (продольного сжатия либо растяжения), и такой пересчет приведет соответственно лишь к замедлению либо ускорению темпа эволюции. Поэтому численный счет оказывается корректным в смысле условий применимости модели и для $V \sim 1$.

4.2. Устойчивость солитонов

Покажем устойчивость полученных солитонов на основании обобщения второго (интегрального) критерия Ляпунова на случай уравнений в частных производных (см. также работу [13] и цитируемую там литературу). Составим функционал Ляпунова и докажем, что солитон реализует экстремум этого функционала типа минимума или максимума.

Рассмотрим функционал, составленный из интегралов (3.1) и (3.2),

$$U = H + I = \int \left(\left| \frac{\partial A}{\partial \tau} \right|^2 + \left| \frac{\partial A}{\partial r} \right|^2 + 2\sqrt{1 + |A|^2} - 2 \right) r dr d\tau, \tag{4.12}$$

при фиксированном импульсе (3.3)

$$P = i \int \left(\frac{\partial A}{\partial \tau} A^* - \frac{\partial A^*}{\partial \tau} A \right) r dr d\tau = P_0. \tag{4.13}$$

Легко показать, что

$$U \geq \Omega \equiv \int \left(\left| \frac{\partial A}{\partial \tau} \right|^2 + \frac{2|A|^2}{2 + |A|^2} \right) r dr d\tau. \tag{4.14}$$

Представление комплексной функции A в виде амплитуда-фаза: $A = f e^{i\phi}$, где $f, \phi \in \mathbb{R}$, позволяет получить неравенства, связывающие величины I, P и W :

$$I = \int \left(\left(\frac{\partial f}{\partial \tau} \right)^2 + \left(f \frac{\partial \phi}{\partial \tau} \right)^2 \right) r dr d\tau \geq \int \left(f \frac{\partial \phi}{\partial \tau} \right)^2 r dr d\tau, \tag{4.15}$$

$$2WI \geq \frac{1}{4} P^2, \tag{4.16}$$

$$\int \frac{|A|^2}{2 + |A|^2} \geq \frac{W}{1 + \sqrt{W}}. \tag{4.17}$$

Таким образом, для U справедлива оценка

$$H + I = U > 8 \frac{P^2}{W} + 2 \frac{W}{1 + \sqrt{W}}. \tag{4.18}$$

Анализ неравенства (4.18) показывает, что для каждого значения P есть один минимум, и он положительный. Если минимум реализуется при $W = W_0(P)$, то для минимизируемого функционала $H + I$ имеем окончательное неравенство

$$H + I > 8 \frac{P^2}{W_0(P)} + 2\sqrt{W_0(P)} \equiv G(P). \quad (4.19)$$

Далее составим функционал Ляпунова

$$F[A] = H + I - \lambda G(P). \quad (4.20)$$

Подстановка солитонного распределения в вариацию такого функционала с условием

$$\lambda \frac{dG(P)}{dP} = -a \quad (4.21)$$

обращает вариацию в нуль.

Таким образом, мы построили функционал с требуемыми свойствами. Это означает, что исследуемые солитоны обладают безразличной устойчивостью к возмущениям. Можно также заметить, что данный подход представляет достаточное, но не необходимое условие устойчивости. Поэтому в случае, когда солитон реализует экстремум построенного функционала Ляпунова типа точки перегиба, следует применять другие методы исследования устойчивости (например, первый дифференциальный критерий Ляпунова).

5. ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ

Для численного исследования задачи был использован метод расщепления с преобразованием Фурье (split-step Fourier). В рамках этого метода сначала рассматривается уравнение

$$\frac{\partial^2 A}{\partial z \partial \tau} - \Delta_{\perp} A = 0, \quad (5.1)$$

которое удобно решать в фурье-представлении ($\tilde{A} = \hat{F}A = \int A e^{i\omega\tau} d\tau$):

$$i\omega \frac{\partial \tilde{A}}{\partial \tau} - \Delta_{\perp} \tilde{A} = 0. \quad (5.2)$$

Для решения уравнения (5.1) в численной схеме применен метод Кранка–Никольсона. Консервативность этой схемы позволила избежать проблем в окрестности нулевой частоты. Простота вычислений по данной схеме позволила создать эффективный код для параллельных вычислений несмотря на сложности, связанные с неявностью метода.

Вторая часть численной схемы также оперирует с уравнением для спектров:

$$i\omega \frac{\partial A}{\partial \tau} + \hat{F} \frac{A}{\sqrt{1 + |A|^2}} = 0. \quad (5.3)$$

Эту часть схемы реализовать с помощью неявных методов не удалось. Мы использовали для решения уравнения (5.3) метод Рунге–Кутты второго порядка точности. Методом деления дискретных величин численной аппроксимации (эволюционный шаг, размер сетки) пополам была проведена оптимизация точности и скорости вычислений. Численный код был разработан для кластерных систем, содержащих 2^p машин с отдельной памятью (соединение через LAN), каждая из которых включает 2^q ядер, работающих в модели общей памяти. Расчеты проводились на кластерных системах ИПФ РАН.

Солитоны: устойчивость, взаимодействие

Обсудим некоторые аспекты распространения солитонов, их взаимодействия, а также «развала» произвольных распределений на солитоны. Прежде всего необходимо отметить, что численные эксперименты подтвердили устойчивость солитонов, показанную аналитически в разд. 4. Было проведено численное моделирование с начальными условиями в виде суперпозиции найденных солитонов и возмущений, не превышающих 3–5 % от амплитуды солитона. В процессе эволюции таких распределений поля происходило формирование солитона из того же семейства с параметрами, близкими к параметрам исходного возмущенного солитона.

В рассматриваемой модели процессы взаимодействия солитонов и распада произвольных импульсов происходят со значительным смещением распределений вдоль продольной координаты по сравнению с их продольными масштабами. В контексте этой проблемы периодические граничные условия, заложенные в численную схему, позволяют значительно уменьшить размер рассматриваемого продольного интервала, что значительно увеличивает скорость расчетов. Поэтому анализ мгновенных снимков распределения поля в пространстве, представленных ниже, следует проводить с учетом периодичности граничных условий.

При сильных отклонениях импульса от солитонной формы возможен его распад на солитонные распределения. Широкие импульсы гауссовой формы имеют тенденцию к простому распаду на солитоны с близкими скоростями, которые распространяются, непрерывно удаляясь друг от друга. Для су-

пергауссовых импульсов характерен распад, проходящий в несколько этапов. В наших численных экспериментах на первом этапе появлялась пара догоняющих друг друга солитонов, далее происходило взаимодействие этих распределений с образованием трех-четырех локализованных импульсов, которые на некоторой трассе снова сталкивались.

Распад импульса на солитоны может также сопровождаться генерацией распределений типа кольца (вторая поперечная мода). Такая ситуация проиллюстрирована на рис. 3 (мгновенные снимки 4 и 8). Переходный процесс заканчивался формированием солитонов, определяемых уравнением (4.4). Ниже приведены некоторые численные результаты, характеризующие процесс взаимодействия солитонов с малыми числами заполнения ($a = 0.95$, см. рис. 2). В рамках модели, описываемой уравнением (2.6), на процесс столкновения импульсов влияют не только параметры огибающих импульсов и скорости их центров масс, но и фаза высокочастотного заполнения в каждом из взаимодействующих волновых пакетов.

Результаты исследования взаимодействия солитонов с одинаковыми амплитудами и числами заполнения в зависимости от начальной фазы, заданной у одного из солитонов, представлены на рис. 4б. С помощью параметра V мы задавали различные скорости у сталкивающихся солитонов. В представленных экспериментах были выбраны скорости солитонов V_1 и V_2 , различающиеся в два раза, $V_1/V_2 = 2$. После взаимодействия солитоны преобразовывались в импульсы, двигавшиеся со скоростями, близкими к заданным у начальных солитонов. Эти волновые пакеты мы далее будем различать по скоростям их движения вдоль продольной координаты τ .

Для построения подобных графиков мы снимали распределение амплитуды на оси системы на одинаковом расстоянии $z = 130$ в зависимости от начальной фазы. Соответствующее значение z было выбрано так, чтобы процесс взаимодействия к этому моменту полностью закончился; заметим, что при выбранных скоростях солитонов столкновение центров масс происходит при $z = 50$. На рис. 4 представлены графики для всех начальных разностей фаз (от 0 до 2π) с шагом 0.1.

Рисунки 4а и 4в показывают, что происходит с быстрым и медленным распределениями поля, представленными на рис. 4б, при их дальнейшем распространении до расстояний $z = 260$. Эти графики иллюстрируют формирование солитонов либо несамоканализированных (расплывающихся в дальнейшем) распределений поля из импульсов, полученных в мо-

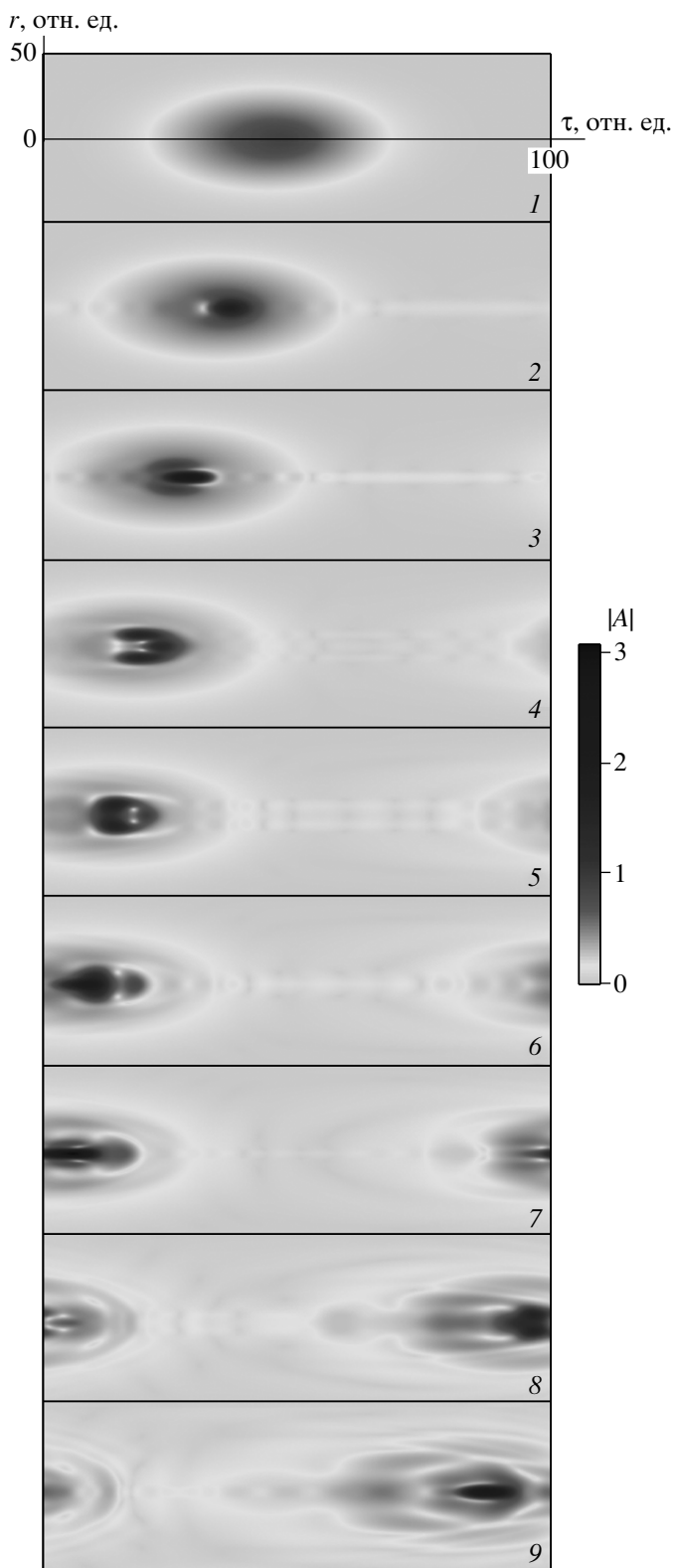


Рис. 3. Распад волнового пакета гауссовой формы с образованием полого распределения

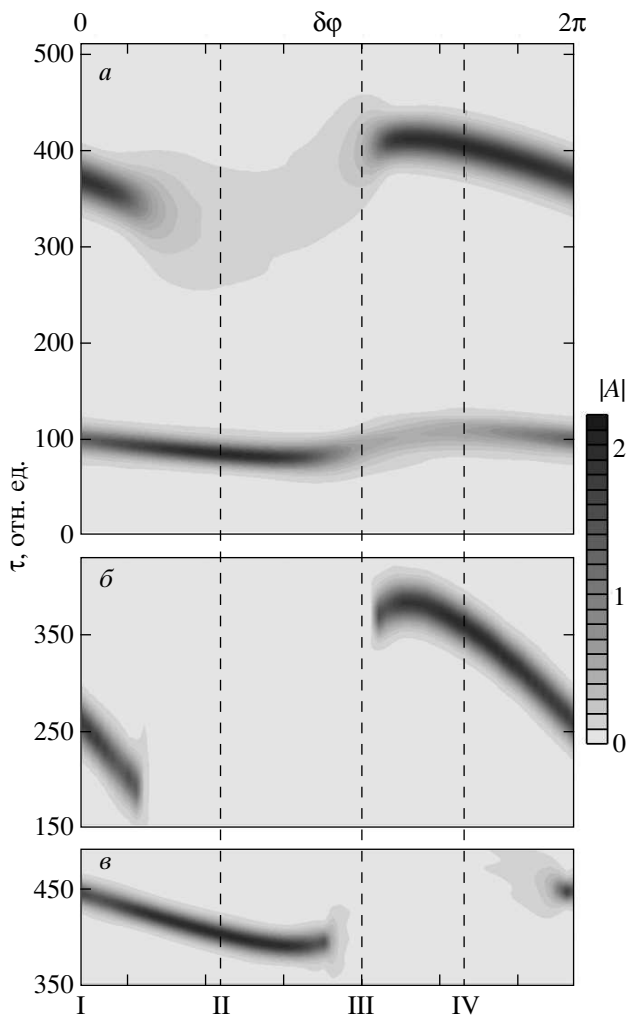


Рис. 4. Распределение $|A(\tau)|$ на оси системы ($r = 0$) в зависимости от разности фаз между взаимодействующими солитонами: *а* и *в* — распределения $|A(\tau, z = 260)|$ соответственно быстрого и медленного волновых пакетов, сформировавшихся после взаимодействия; *б* — распределение $|A(\tau, z = 130)|$ после взаимодействия солитонов

мент $z = 130$. Из рис. 4 видно, что после взаимодействия, в зависимости от разности фаз начальных распределений, результирующие импульсы приобретают слабые поправки к скорости. Об этом свидетельствует появление изгиба кривых, образованных максимумами амплитуд результирующих волновых пакетов на плоскости время–фаза.

Важно отметить, что существуют интервалы фаз, в которых результатом взаимодействия может являться дальнейшее распространение либо двух солитонов, либо одного быстрого солитона, либо одного медленного, либо отсутствие на конечной стадии

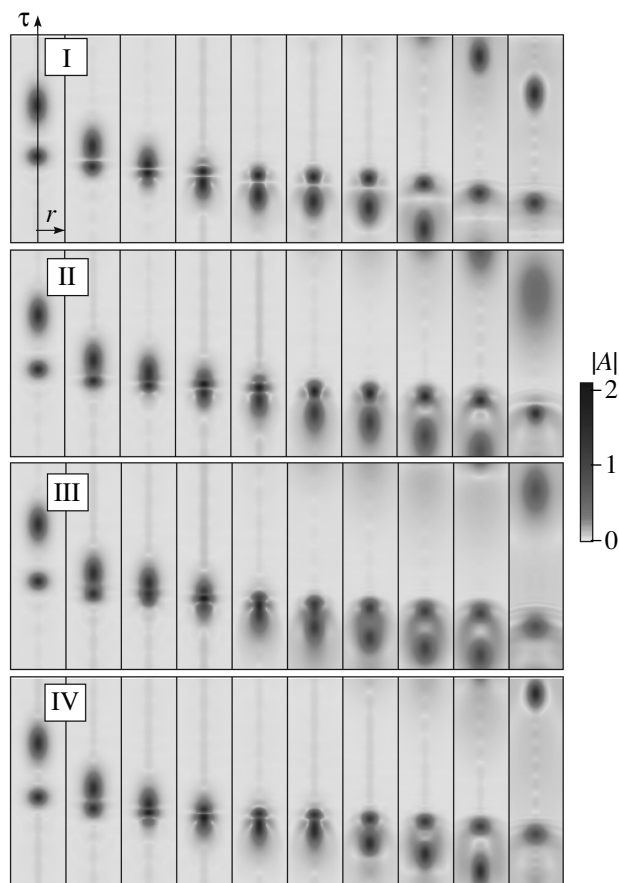


Рис. 5. Мгновенные снимки распределения $|A|^{0.6}$ в пространстве (r, τ) на разных расстояниях z для разных характерных фаз, представленных на рис. 4 (степень 0.6 позволяет анализировать процессы на уровне как больших, так и малых амплитуд)

локализованных структур. Фазы, для которых характерен каждый из перечисленных процессов, отмечены на рис. 4 римскими цифрами.

На рис. 5 представлены следующие сценарии взаимодействия: I — оба солитона остались после взаимодействия, изменив свою амплитуду и почти не изменив скорость; II — более медленный (в новой системе отсчета) солитон продолжил свое распространение, быстрый рассеялся; III — оба импульса рассеялись; IV — более быстрый (в новой системе отсчета) солитон продолжил свое распространение, медленный рассеялся.

Полученные выше результаты относятся к солитонам с малыми числами заполнения. В случае больших чисел заполнения особенности динамики представлены на рис. 6. Приведены данные исследования взаимодействия солитонов для трех соотно-

шений скоростей V_1/V_2 при $a = 0.995$. На рис. 6а скорости солитонов различались слабо, соответственно время взаимодействия было наибольшим. В результате длительного взаимодействия солитонные распределения расплывались полностью. На рис. 6б время взаимодействия наименьшее. В этом процессе оба солитона, преобразовавшись, как и в случае взаимодействия солитонов с малым числом заполнения, продолжали свое распространение. На рис. 6б отображена промежуточная ситуация, в которой остается либо один солитон, либо два в зависимости от разности фаз заполнения.

В целом рис. 6 показывает, что солитоны с большими числами заполнения менее чувствительны к разности фаз своих заполнений. Отметим также, что волновые пакеты, порожденные взаимодействующими солитонами с большими числами заполнения, получают малые добавки к скоростям исходных солитонов того же порядка, что и в случае взаимодействия солитонов с малыми числами заполнения.

6. ЗАМЕЧАНИЕ О СОЛИТОННЫХ СТРУКТУРАХ В ВОЛНОВОМ УРАВНЕНИИ

Покажем, что полученные выше солитоны редуцированного уравнения (2.6), удовлетворяют, с точностью до масштабных преобразований, волновому уравнению

$$2 \frac{\partial^2 A}{\partial \tau \partial z} - \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} - \Delta_{\perp} A + \frac{A}{\sqrt{1 + |A|^2}} = 0. \quad (6.1)$$

Далее будет удобно перейти к новому сопутствующему времени $\tilde{\tau} = t - zv$, которое на этот раз будет отслеживать огибающую солитона. С такой заменой волновое уравнение примет вид

$$(1 - v^2) \frac{\partial^2 A}{\partial \tilde{\tau}^2} - \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} + 2v \frac{\partial^2 A}{\partial z \partial \tilde{\tau}} - \Delta_{\perp} A + \frac{A}{\sqrt{1 + |A|^2}} = 0. \quad (6.2)$$

Общее выражение для солитона, с учетом выбранной системы координат, имеет вид

$$A = f(\tau) \exp [i(\tilde{a}\tau + bz)], \quad f, \tau, \tilde{a}, b \in \mathbb{R}. \quad (6.3)$$

Подстановка (6.3) в (6.2) дает уравнение для параметра b , а также обыкновенное уравнение для f :

$$b = -\frac{(1 - v^2)\tilde{a}}{v^2}, \quad (6.4)$$

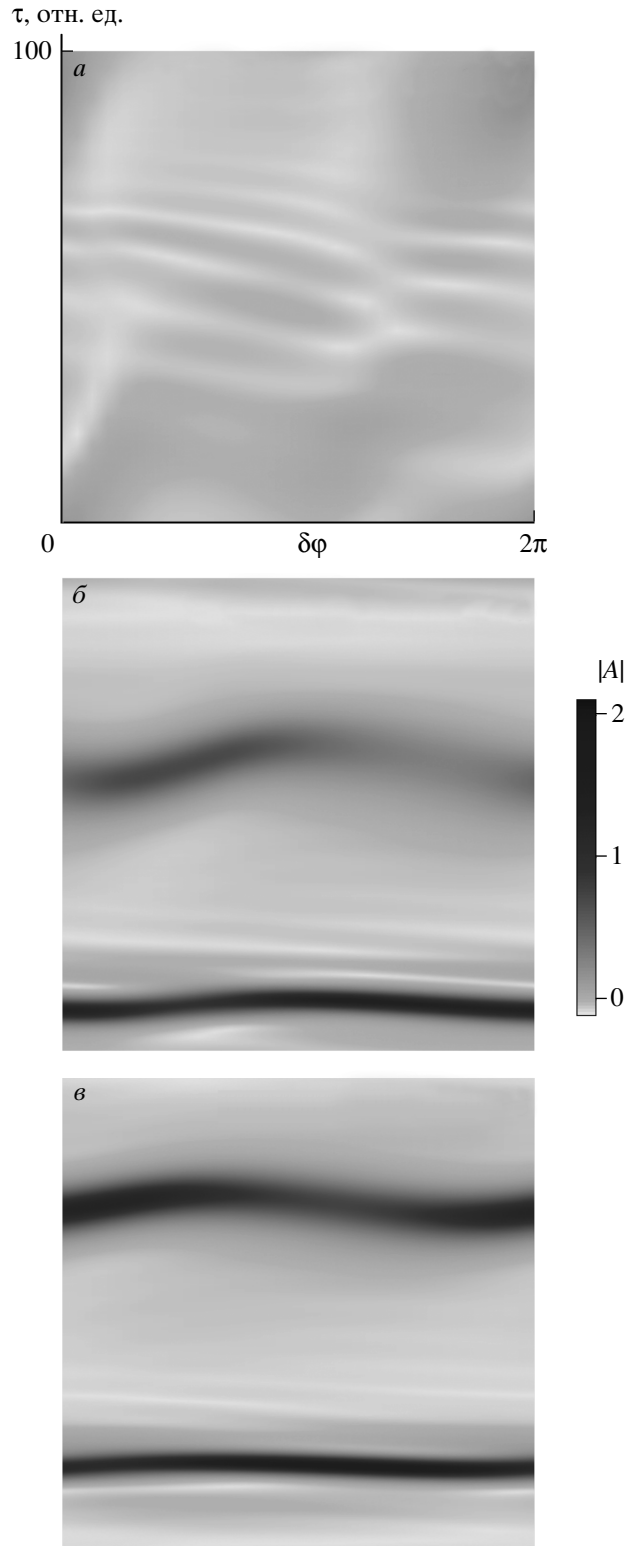


Рис. 6. Взаимодействие солитонов с большими числами заполнения ($a = 0.995$): а — $V_1 = 1.41, V_2 = 1$; б — $V_1 = 1.9, V_2 = 1$; в — $V_1 = 2, V_2 = 1$

$$(1 - v^2) \frac{\partial^2 f}{\partial \tau^2} + \frac{(1 - v^2) \tilde{a}^2}{v^2} f - \Delta_{\perp} f + \frac{f}{\sqrt{1 + f^2}} = 0. \quad (6.5)$$

Видно, что форма солитона не меняется и в случае полного волнового уравнения. Новые солитоны могут быть получены из старых путем простых масштабных преобразований. Для построения солитонов волнового уравнения достаточно растянуть огибающую старого солитона (взятого для некоторого допустимого a и $V = 1$) в продольном направлении на величину $\sqrt{1 - v^2}$, пересчитать параметр \tilde{a} по формуле

$$\tilde{a} = \frac{v}{\sqrt{1 - v^2}} a \quad (6.6)$$

и определить параметр b по формуле (6.4).

Обобщенные солитоны могут распространяться в разреженной, в плотной и, как показывает анализ соотношения (6.6), в закритической плазме. Однако отсутствие интегралов, подобных (3.1), (3.2), (3.3), не дает возможностей для аналитического исследования устойчивости данных структур. Моделирование уравнения (5.1) требует значительно больших численных ресурсов.

В заключение отметим следующее. Аналитическое и численное исследование волнового уравнения с релятивистской нелинейностью в безотражательном приближении показало существование устойчивых трехмерных локализованных структур, которые образуют двухпараметрическое семейство солитонов. С точностью до масштабных преобразований отдельно фазы и действительной огибающей эти структуры совпадают с солитонами неоднородного нелинейного уравнения Клейна–Гордона. Численное моделирование показало значительное влияние разности фаз заполнений сталкивающихся импульсов на процесс взаимодействия. Упругое взаимодействие солитонов оказывается возможным лишь в некотором интервале фаз, который расширяется по мере увеличения длительности импульсов. Вне этого интервала в результате столкновения оставался лишь один солитон. Кроме того, существует узкий интервал фаз, в котором взаимодействующие солитоны не образовывали локализованных распределений.

В долговременной пространственно-временной эволюции релятивистски сильного лазерного импульса, как показывают неравенства из разд. 2, необходимо учитывать возбуждение кильватерной волны. Вопрос устойчивости найденных солитонных распределений поля в этих условиях требует дополнительного исследования.

Авторы признательны Г. М. Фрайману, А. И. Смирнову, А. А. Балакину, С. А. Скобелеву, Д. И. Кулагину за обсуждение аналитических результатов и численных алгоритмов.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты №№ 08-02-01260-а, 08-02-00841-а).

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Joshi, *Phys. Plasmas* **14**, 055501 (2007).
2. М. Н. Key, *Phys. Plasmas* **14**, 055502 (2007).
3. В. А. Козлов, А. Г. Литвак, Е. В. Суворов, *ЖЭТФ* **76**, 148 (1979).
4. Л. А. Абрамян, А. Г. Литвак, В. А. Миронов, А. М. Сергеев, *ЖЭТФ* **102**, 1816 (1992).
5. P. Sprangle, E. Esarey, J. Krall et al., *Phys. Rev. Lett.* **69**, 2200 (1992).
6. Г. А. Аскарьян, С. В. Буланов, Ф. Пегораро, А. С. Пухов, *Физика плазмы* **21**, 884 (1995).
7. N. E. Andreev, L. M. Gorbunov, P. Mora, and R. R. Ramazashvili, *Phys. Plasmas* **14**, 083104 (2007).
8. А. Б. Борисов, А. В. Боровский, В. В. Коробкин и др., *ЖЭТФ* **101**, 1132 (1992).
9. Ю. С. Кившарь, Г. П. Агравал, *Оптические солитоны*, Физматлит, Москва (2005).
10. Н. Н. Ахмедиев, А. Анкевич, *Солитоны*, МАИК Наука/Интерпериодика, Москва (2003).
11. А. А. Балакин, В. А. Миронов, *Письма в ЖЭТФ* **75**, 741 (2002).
12. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория поля*, Наука, Москва (1967), с. 109.
13. Е. А. Кузнецов, *Изв. вузов. Радиофизика* **XLVI**, 5–6, 342 (2003).