

О МЕТОДЕ КИРХГОФА ДЛЯ ПЕРЕХОДНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ОТ ПЛОСКИХ И ИЗОГНУТЫХ МИШЕНЕЙ

Д. В. Карловец, А. П. Потылицын*

*Томский политехнический университет
634050, Томск, Россия*

Поступила в редакцию 16 ноября 2007 г.

Рассмотрен процесс переходного излучения при наклонном падении заряда на идеально проводящую поверхность. Предложен метод, позволяющий проводить расчеты характеристик излучения «назад» на конечном расстоянии, в том числе в так называемой предволновой зоне. Рассмотрены частные случаи плоской мишени, а также мишени, представляющей собой цилиндрическую поверхность, ось которой перпендикулярна траектории частицы. В первом случае характеристики излучения в волновой зоне, вычисленные по предложенной модели, находятся в полном согласии с полученными ранее результатами. Во втором случае при расположении детектора в предволновой зоне наблюдается фокусировка излучения. Обсуждается зависимость свойств излучения от формы поверхности мишени, угла падения частицы и расстояния до детектора.

PACS: 41.60.-m, 41.75.Ht

1. ВВЕДЕНИЕ

Большинство методов расчета характеристик переходного излучения (ПИ) и дифракционного излучения (ДИ) основываются на том известном факте, что поле равномерно движущегося релятивистского заряда можно представить как пакет монохроматических плоских волн. Дифракционные явления для таких волн часто рассматривают, используя аппарат классической оптики. Например, в задаче о ДИ частицы, пролетающей сквозь круглое отверстие в проводящем экране, Тер-Микаеляном и Хачатрянном был применен принцип Гюйгенса [1–3]. Данный метод также использовался Болотовским и др. для расчета ДИ и ПИ [4], а также ДИ от периодических поверхностей (излучения Смита–Парселла) [5]. В недавних работах [6–8] подобный подход использовался для расчета характеристик ПИ и ДИ релятивистских частиц от плоских и изогнутых мишеней в так называемой «предволновой» зоне.

Понятие предволновой зоны (pre-wave zone) для ПИ было введено в работе [9] в связи с необходимостью учета конечных размеров источника излучения, которым в данном случае являются поверхностные токи, возбужденные полем движущейся заряженной частицы на поверхности проводя-

щей мишени. Поскольку поле движущегося заряда $\mathbf{E}^0(\mathbf{r}, \omega)$ убывает в перпендикулярном вектору скорости направлении с расстоянием h по закону $\exp[-2\pi h/\beta\gamma\lambda]$ (γ — лоренц-фактор), эффективная площадь рассеяния псевдофотонов частицы имеет радиус порядка $\gamma\lambda$ и может составлять макроскопическую величину для ПИ и ДИ в миллиметровом диапазоне длин волн. В работе [9] показано, что при расположении детектора на расстоянии до мишени ближе, чем $\gamma^2\lambda$, источник излучения нельзя рассматривать как точечный, а угловые распределения излучения в этом случае заметно отличаются от таковых в волновой зоне. Данное явление имеет место как для излучения «вперед», так и для излучения «назад», в отличие от эффекта, обусловленного конечной длиной формирования, которая в последнем случае не превышает нескольких длин волн [3, 4]. Отметим, что впервые эффект предволновой зоны для ПИ «назад» экспериментально наблюдался во Фраскати группой Каstellано [10] (см. также недавнюю работу [11]).

В связи с возросшим в последние годы интересом к когерентному ПИ и ДИ в миллиметровом диапазоне как методам слабовозмущающей диагностики релятивистских пучков ускорителей (см. [12–15]) актуальным представляется решение задачи об излучении при наклонном падении частицы на поверх-

*E-mail: karlovets@tpu.ru

ность произвольной формы с учетом возможного эффекта предволновой зоны. Использование плоских и изогнутых мишеней, ориентированных под некоторым углом к траектории пучка, облегчает постановку соответствующих экспериментов ввиду того, что поле релятивистского заряда отражается от проводящей поверхности практически по законам геометрической оптики, т. е. под углом зеркального отражения [10–12]. Решение данной задачи может быть получено методом Кирхгофа, являющимся по аналогии с классической оптикой обобщением принципа Гюйгенса на случай наклонного падения заряда на мишень заданной формы и не имеющим ограничений применимости по энергии частицы. Разработке такого метода и посвящена данная статья.

В первой части работы рассмотрено излучение «назад» при наклонном падении заряда из вакуума на идеально проводящую плоскую поверхность. На основе полученных интегральных выражений для поля излучения формулируются критерии волновой, предволновой и ближней зон. Отдельно анализируются поля в волновой и предволновой зонах, причем показано, что в первом случае полученные угловые характеристики излучения соответствуют результатам Пафомова [16]. Во втором случае наблюдается деформация аналогичных зависимостей, при этом показано, что асимметрия в угловом распределении ПИ умеренно релятивистских частиц, характерная для волновой зоны, сохраняется и в предволновой зоне и обусловлена продольной (вдоль скорости) компонентой поля заряда.

Во второй части работы на основе развиваемого подхода предложен общий метод расчета поля излучения от идеально проводящих изогнутых поверхностей. Рассмотрен частный случай наклонного падения заряда на цилиндрическую поверхность. Показана эквивалентность полей излучения от плоской и изогнутой мишеней при стремлении радиуса кривизны последней к бесконечности. В случае расположения детектора в предволновой зоне по мере уменьшения радиуса кривизны цилиндрической поверхности наблюдается фокусировка излучения, причем эффект фокусировки выражен значительно сильнее при наклонном падении заряда.

2. ПЕРЕХОДНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ ПРИ НАКЛОННОМ ПАДЕНИИ ЧАСТИЦЫ НА ПОВЕРХНОСТЬ ПЛОСКОЙ МИШЕНИ

2.1. Метод Кирхгофа и общие замечания

Выражение для поля излучения, аналогичное векторному интегралу Кирхгофа в теории дифрак-

ции свободных электромагнитных волн, может быть получено из уравнений Максвелла и теоремы Остроградского–Гаусса. Действительно, выберем вектор, о котором идет речь в теореме Гаусса, в виде

$$\mathbf{A} = f\nabla g - g\nabla f,$$

где функции $f(\mathbf{r}, \omega)$ и $g(\mathbf{r}, \omega)$ непрерывны вместе со своими первыми и вторыми производными. После несложных преобразований получим

$$\int_V (f\Delta g - g\Delta f) dV = \oint_S \left(f \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} - g \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} \right) dS, \quad (1)$$

где \mathbf{n} — единичный вектор внешней нормали к замкнутой поверхности S , ограничивающей объем V , по которому ведется интегрирование в левой части равенства, а также использовано обозначение: $\partial g / \partial \mathbf{n} = \mathbf{n} \cdot \nabla g$. Выражение (1) часто называют скалярной теоремой Грина. Чтобы связать уравнение (1) с уравнениями Максвелла далее обычно поступают следующим образом: под знаком объемного интеграла в левой части можно прибавить и отнять постоянную величину $k^2 f g$, где $k = \omega/c$. Тогда левая часть теоремы Грина выразится через уравнения Гельмгольца для функций $f(\mathbf{r}, \omega)$ и $g(\mathbf{r}, \omega)$. Чтобы придать получившемуся уравнению физический смысл, в качестве функции f удобно выбрать любую из компонент поля излучения, а в качестве функции g — функцию Грина соответствующего уравнения Гельмгольца.

Пусть в полупространстве, ограниченном идеально проводящей поверхностью произвольной формы, движется со скоростью $v = \beta c$ заряженная частица. Уравнение для напряженности поля, создаваемого этим зарядом, имеет вид

$$(\Delta + k^2)\mathbf{E}^0(\mathbf{r}, \omega) = 4\pi \left(\nabla \rho_0(\mathbf{r}, \omega) - i \frac{k}{c} \mathbf{j}_0(\mathbf{r}, \omega) \right). \quad (2)$$

Для данного уравнения запишем функцию Грина, причем воспользуемся тем фактом, что сама функция может быть определена с точностью до произвольного решения однородного уравнения (2) (см., например, [17]) и, следовательно, можно потребовать выполнения определенных условий на границах рассматриваемого полупространства. В частности, для рассматриваемой задачи об идеально проводящем экране естественно требовать обращения в нуль функции g во всех точках граничной поверхности (что приведет также к обращению в нуль в соответствующих точках функции $\mathbf{E}^0(\mathbf{r}, \omega)$). В этом случае уравнение для функции Грина запишется как

$$(\Delta + k^2)g(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, \tilde{\mathbf{r}}_0, \omega) = 4\pi(\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) - \delta(\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}_0)), \quad (3)$$

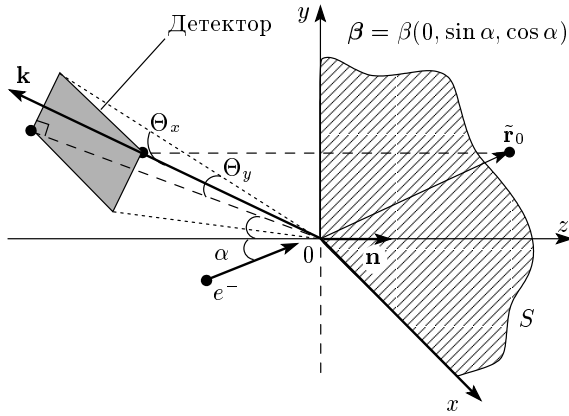


Рис. 1. Наклонное падение заряда на плоскую поверхность, расположенную в плоскости xy . Вектор $\tilde{\mathbf{r}}_0$ показывает положение источника-«изображения». Ось x перпендикулярна рисунку и направлена к нам

причем вспомогательный источник в правой части, положение которого определяется радиус-вектором $\tilde{\mathbf{r}}_0$, является зеркальным отображением источника \mathbf{r}_0 относительно поверхности рассматриваемого экрана (см. рис. 1). Одно из частных решений данного уравнения может быть записано в виде

$$g(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, \tilde{\mathbf{r}}_0, \omega) = -\frac{\exp\{ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|\}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} + \frac{\exp\{ik|\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}_0|\}}{|\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}_0|}. \quad (4)$$

Пусть функция f в уравнении (1) представляет собой любую компоненту поля излучения $\mathbf{E}^R(\mathbf{r}, \omega)$, удовлетворяющую уравнению (2) без источников. В этом случае из формулы (1) можно получить следующую:

$$\mathbf{E}^R(\mathbf{r}_0, \omega) = \frac{1}{4\pi} \oint_S \mathbf{E}^R(\mathbf{r}, \omega) \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} dS. \quad (5)$$

Выражение (5) представляет собой известный из теории дифракции векторный интеграл Кирхгофа с функцией Грина полупространства [18, 19], содержащий три независимых интегральных уравнения для каждой компоненты поля излучения. Для того чтобы применить данное выражение к рассматриваемой задаче о ПИ, необходимо представить поле излучения на поверхности S в правой части (5) в виде разности полного поля и собственного поля заряда:

$$\mathbf{E}^R(\mathbf{r}, \omega) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) - \mathbf{E}^0(\mathbf{r}, \omega).$$

Поскольку на поверхности идеального проводника тангенциальные компоненты полного поля должны равняться нулю, необходимо выбрать систему координат, исходя из формы рассматриваемой поверхности, что позволит оставить из трех уравнений (5) только два, в правую часть которых будут входить тангенциальные компоненты поля $\mathbf{E}^0(\mathbf{r}, \omega)$.

Рассмотрим случай, когда поверхность раздела вакуум – идеальный проводник представляет собой плоский экран, расположенный в плоскости xy (см. рис. 1). В данной статье мы ограничимся рассмотрением поверхностей, линейные размеры которых не оказывают существенного влияния на характеристики излучения. Заметим, что данный метод в принципе позволяет учесть искажение угловых распределений ПИ и ДИ, обусловленное конечными размерами мишеней (см. также [20, 21]). В этом случае для переходного излучения (либо дифракционного, если экран имеет отверстие) следует сформулировать аналог теоремы Бабины, связывающий поля от дополнительных экранов [4], а также учесть контурные токи, возникающие при отсутствии радиальной симметрии задачи [2]. Используя принятые граничные условия на плоскости $z = 0$, для соответствующих декартовых компонент поля излучения из формулы (5) получаем

$$E_{x,y}^R(\mathbf{r}_0, \omega) = -\frac{1}{4\pi} \int_S E_{x,y}^0(\mathbf{r}, \omega) \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} dS. \quad (6)$$

Поскольку поле излучения убывает с увеличением расстояния до экрана, реально поверхностью S является лишь плоскость xy , вследствие чего интегрирование в последнем выражении ведется лишь по поверхности мишени.

Пусть на поверхность экрана падает заряженная частица под углом α к вектору нормали (рис. 1). Следует отметить, что в данной работе мы не будем рассматривать случай скользящего падения ($\alpha \approx \pi/2$), поскольку, как было показано Рязановым [22], методы макроскопической электродинамики в этом случае непригодны. Ввиду того что нас будет интересовать прежде всего случай релятивистских энергий, излучение «назад» будем рассматривать под углами, близкими к направлению зеркального отражения от поверхности мишени. Для дальнейшего удобно ввести так называемые «проекционные» углы наблюдения Θ_x и Θ_y , отсчитываемые от направления зеркального отражения, так что координаты точки наблюдения $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ выражаются простыми соотношениями:

$$\begin{aligned} x_0 &= r_0 \sin \Theta_x, \\ y_0 &= r_0 \cos \Theta_x \sin (\alpha + \Theta_y), \\ z_0 &= -r_0 \cos \Theta_x \cos (\alpha + \Theta_y). \end{aligned} \quad (7)$$

Поскольку на далеких расстояниях фронт сферической волны в малой окрестности может считаться плоским, угловые распределения интенсивности излучения можно рассматривать как координатные распределения на поверхности плоского детектора. Будем вычислять спектральную плотность потока энергии через единичную площадку, нормальную

радиус-вектору \mathbf{r}_0 (точечный детектор по терминологии работы [21]). В этом случае компоненты поля излучения удобно определять в системе координат, где ось $z_{\mathbf{k}}$ направлена вдоль радиус-вектора \mathbf{r}_0 (k -система, см. рис. 1), и поле имеет лишь две поперечные составляющие: $\mathbf{E}_{\mathbf{k}}^R = (E_{x,\mathbf{k}}^R, E_{y,\mathbf{k}}^R, 0)$. Связь между компонентами любого вектора \mathbf{E} в системе координат мишени и k -системе задается в наиболее общем виде стандартным образом: $E_{i,\mathbf{k}} = A_{ij}E_j$, а матрица перехода имеет вид

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} \cos \Theta_x & -\sin (\alpha + \Theta_y) \sin \Theta_x & \cos (\alpha + \Theta_y) \sin \Theta_x \\ 0 & \cos (\alpha + \Theta_y) & \sin (\alpha + \Theta_y) \\ -\sin \Theta_x & -\sin (\alpha + \Theta_y) \cos \Theta_x & \cos \Theta_x \cos (\alpha + \Theta_y) \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Полагая, что в k -системе продольная $z_{\mathbf{k}}$ -компонента поля излучения отсутствует, и выражая с помощью этого условия E_z^R через E_x^R и E_y^R , для поперечных компонент поля получим

$$\begin{aligned} E_{x,\mathbf{k}}^R &= \frac{E_x^R}{\cos \Theta_x}, \\ E_{y,\mathbf{k}}^R &= \frac{E_y^R}{\cos (\alpha + \Theta_y)} + E_x^R \operatorname{tg} \Theta_x \operatorname{tg} (\alpha + \Theta_y). \end{aligned} \quad (9)$$

Чтобы определить поле излучения в соответствии с формулой (9), нам необходимо получить значения функций $E_x^R(\mathbf{r}_0, \omega)$ и $E_y^R(\mathbf{r}_0, \omega)$ в выражении (6), в правую часть которого входят компоненты собственного поля заряда в системе координат мишени. Получить выражение для поля заряда в лабораторной системе координат, где ось \hat{z} направлена вдоль вектора его скорости, не представляет труда (см., например, [19]):

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^0(\mathbf{r}, \omega) &= \frac{e\omega}{\pi v^2 \gamma} \left(\frac{\dot{\boldsymbol{\rho}}}{\rho} K_1 \left[\frac{\omega \rho}{v \gamma} \right] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{i \mathbf{v}}{\gamma v} K_0 \left[\frac{\omega \rho}{v \gamma} \right] \right) \exp \left(i \frac{\omega}{v} \hat{z} \right), \quad \dot{\boldsymbol{\rho}} = (\dot{x}, \dot{y}). \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь функции K_0, K_1 представляют собой модифицированные функции Бесселя второго рода соответственно нулевого и первого порядка. Переход из такой «штрихованной» системы в систему координат мишени также осуществляется с помощью соответствующей матрицы поворота:

$$B_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}, \quad (11)$$

откуда, в частности, видно, что при наклонном падении ($\alpha \neq 0$) в выражение для $E_y^0(\mathbf{r}, \omega)$ также входит продольная \hat{z} -компонента поля заряда.

Наконец, определим производную от функции Грина g по нормали к поверхности. Ввиду того что нас интересует значение данной производной на поверхности $z = 0$, а расстояние до наблюдателя \mathbf{r}_0 заведомо много больше длины волны излучения λ , используя (4), получим

$$\left. \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} \right|_S \approx 2ikz_0 \frac{\exp\{ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|\}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^2}. \quad (12)$$

Запишем получившиеся выражения для интегралов (6):

$$\begin{aligned} E_x^R(\mathbf{r}_0, \omega) &= -\frac{2ie}{\beta v \gamma \lambda^2} z_0 \times \\ &\quad \times \int \frac{\dot{x}}{\rho} K_1 \left[\frac{2\pi}{\beta \gamma \lambda} \rho \right] \frac{\exp(i\varphi)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^2} dS, \\ E_y^R(\mathbf{r}_0, \omega) &= -\frac{2ie}{\beta v \gamma \lambda^2} z_0 \times \\ &\quad \times \int \left(\frac{\dot{y}}{\rho} K_1 \left[\frac{2\pi}{\beta \gamma \lambda} \rho \right] \cos \alpha - \right. \\ &\quad \left. - \frac{i}{\gamma} K_0 \left[\frac{2\pi}{\beta \gamma \lambda} \rho \right] \sin \alpha \right) \frac{\exp(i\varphi)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^2} dS, \end{aligned} \quad (13)$$

куда входит фаза

$$\varphi = k(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| + \beta^{-1} \hat{z}),$$

а также

$$\dot{\rho} = \sqrt{x^2 + y^2 \cos^2 \alpha}, \quad \hat{z} = y \sin \alpha.$$

В силу того что подинтегральное выражение убывает по экспоненциальному закону (это следует из асимптотик функций Бесселя, см. [4, 23]), основной «вклад» в поле излучения дает (при разумных значениях α) область мишени размерами $r_{eff} \sim \gamma\lambda$. Условие, накладываемое на расстояние, на котором такой источник излучения может рассматриваться как точечный, легко выводится из простейших фазовых соотношений (достаточно лишь потребовать, чтобы угол наблюдения, «опирающийся» на область с данными размерами, был меньше величины γ^{-1} , см. подробнее [9]) и имеет вид

$$r_0 \gg \gamma^2\lambda. \quad (14)$$

Далее следует заметить, что на больших расстояниях $r_0 \gg r_{eff} \sim \gamma\lambda$ знаменатель в правых частях (13) может быть разложен в ряд по малым степеням r/r_0 , откуда незамедлительно следует условие волновой зоны излучения как области пространства, где поле полностью поперечно и имеет закон убывания $1/r_0$. Из этих же соображений следует, что на расстояниях $r_0 \approx \gamma\lambda$ и меньше поле приобретает кривизну $1/r_0^2$ (второй член разложения знаменателя: $2(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)/r_0^4$), что соответствует ближней зоне, в которой одно из условий поперечности нарушается ($\mathbf{E} \cdot \mathbf{k} \neq 0$, см. подробнее [24–26]). Таким образом, поле переходного излучения может быть условно разделено согласно следующим критериям:

- 1) волновая зона излучения: $r_0 \gg \gamma^2\lambda$, поле имеет закон убывания $1/r_0$;
- 2) предволновая зона излучения: $\gamma^2\lambda \gtrsim r_0 \gg \gamma\lambda$, закон убывания поля $1/r_0$;
- 3) ближняя зона: $r_0 \lesssim \gamma\lambda$, закон убывания поля $1/r_0^n, n \geq 2$.

Подчеркнем, что в отличие от известного случая излучения ускоренного точечного заряда (либо сгустка), переходное излучение (а также дифракционное) может рассматриваться как излучение поверхностных токов, индуцированных полем равномерно и прямолинейно движущегося заряда на поверхности проводящей мишени [27–29]. Эффективная область, занимаемая этими токами, в γ раз превосходит длину волны излучения, что приводит в релятивистском случае к наличию между волновой и ближней зонами некоторой промежуточной области, поле в которой можно считать полностью поперечным, однако характеристики излучения которой существенно отличаются от таковых в волновой зоне (см. ниже). Поскольку в оптическом диапазоне предволновая зона излучения для ультрарелятивистских частиц практически отсутствует, становится понятным тот факт, что на существование

данного эффекта было обращено внимание в связи с повышением интереса к проблеме диагностики пучков современных ускорителей на основе когерентного ПИ и ДИ в миллиметровом диапазоне длин волн.

2.2. Поле излучения в волновой зоне

Рассмотрим характеристики излучения «назад» на расстояниях $r_0 \gg \gamma^2\lambda$. Удерживая нулевой член разложения знаменателя (13), для компонент поля в k -системе (9) имеем

$$\begin{aligned} E_{x,\mathbf{k}}^R &= \frac{2ie}{\beta v \gamma \lambda^2} \frac{e^{ikr_0}}{r_0} \cos(\alpha + \Theta_y) \times \\ &\quad \times \int \frac{\dot{x}}{\dot{\rho}} K_1 \left[\frac{2\pi}{\beta \gamma \lambda} \dot{\rho} \right] e^{i\varphi} dS, \\ E_{y,\mathbf{k}}^R &= \frac{2ie}{\beta v \gamma \lambda^2} \frac{e^{ikr_0}}{r_0} \cos \Theta_x \int \left(\frac{1}{\dot{\rho}} K_1 \left[\frac{2\pi}{\beta \gamma \lambda} \dot{\rho} \right] \times \right. \\ &\quad \times (\dot{y} \cos \alpha + \dot{x} \operatorname{tg} \Theta_x \sin(\alpha + \Theta_y)) - \\ &\quad \left. - \frac{i}{\gamma} K_0 \left[\frac{2\pi}{\beta \gamma \lambda} \dot{\rho} \right] \sin \alpha \right) e^{i\varphi} dS. \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь при записи фазы мы учитываем лишь первый член разложения по степеням r/r_0 :

$$\varphi = -k \left(\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_0}{r_0} - \beta^{-1} z \right), \quad (16)$$

а постоянный множитель вынесен за знак интеграла. Интегрирование в формуле (15) проще всего проводить в «штрихованной» системе, переходя в полярные координаты. В этом случае для элемента поверхности интегрирования имеем

$$dS = \frac{d\dot{S}}{\cos \alpha} = \frac{\dot{\rho} d\dot{\rho} d\dot{\phi}}{\cos \alpha}, \quad (17)$$

где азимутальный угол $\dot{\phi}$ изменяется в пределах от 0 до 2π , а радиус-вектор $\dot{\rho}$ — от нуля до бесконечности. При записи фазы целесообразно перейти от переменных x_0, y_0 к координатам на поверхности плоского детектора

$$x_D = \rho_D \cos \phi_D, \quad y_D = \rho_D \sin \phi_D$$

по следующему правилу:

$$x_0 = x_D, \quad y_0 = r_0 \cos \Theta_x \cos \Theta_y \sin \alpha + y_D \cos \alpha.$$

В этом случае вместо выражения (16) имеем

$$\begin{aligned} \varphi &= -k \dot{\rho} \left(\frac{\rho_D}{r_0} \cos(\dot{\phi} - \phi_D) + \right. \\ &\quad \left. + \operatorname{tg} \alpha \sin \dot{\phi} (\cos \Theta_x \cos \Theta_y - \beta^{-1}) \right). \end{aligned} \quad (18)$$

Поскольку в релятивистском случае (который и представляет для нас наибольший интерес) углы излучения достаточно малы: $\Theta_x, \Theta_y \sim \gamma^{-1}$, косинусы этих углов отличаются от единицы лишь на величину второго порядка малости и последним слагаемым в фазе (18) можно пренебречь (это можно сделать также в случае малых углов падения α). Тогда интегрирование в формуле (15) проводится с использованием известных интегральных представлений для цилиндрических функций [23] (см. подобные интегралы, например, в работе [4]), и выражение для спектрально-угловой плотности излучения получаем в виде

$$\begin{aligned} \frac{d^2W}{d\omega d\Omega} &= cr_0^2 |\mathbf{E}_k^R|^2 = \\ &= \frac{e^2}{\pi^2 c} \frac{\beta^{-2}}{[(\beta\gamma)^{-2} + 1 - \cos^2 \Theta_x \cos^2 \Theta_y]^2} \times \\ &\quad \times \left(\frac{\sin^2 \Theta_x \cos^2 (\alpha + \Theta_y)}{\cos^2 \alpha} + \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{\sin^2 \Theta_x \sin (\alpha + \Theta_y)}{\cos \alpha} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \cos \Theta_x \left(\sin \Theta_y \cos \Theta_x + \frac{\text{tg } \alpha}{\beta \gamma^2} \right) \right]^2 \right). \quad (19) \end{aligned}$$

Отсюда, в частности, можно видеть, что последнее слагаемое, пропорциональное γ^{-2} , соответствует вкладу продольной \dot{z} -компоненты поля заряда и приводит к наличию асимметрии в угловом распределении ПИ умеренно релятивистских частиц, исчезающей в ультрарелятивистском случае, а также для нормального падения. Действительно, в случае больших энергий $\gamma \gg 1$, когда данным слагаемым можно пренебречь, вместо выражения (19) имеем

$$\begin{aligned} \frac{d^2W}{d\omega d\Omega} \Big|_{rel} &= \frac{e^2}{\pi^2 c} \frac{1 - \cos^2 \Theta_x \cos^2 \Theta_y}{[\gamma^{-2} + 1 - \cos^2 \Theta_x \cos^2 \Theta_y]^2} \times \\ &\quad \times (1 + \text{tg}^2 \alpha \sin^2 \Theta_x). \quad (20) \end{aligned}$$

Полученная формула с точностью до множителя, отличающегося от единицы лишь на величину порядка γ^{-2} , есть классическое выражение Гинзбурга–Франка, описывающее симметричные угловые распределения [30]. Это легко видеть, замечая, что $\cos \Theta_x \cos \Theta_y = \cos \Theta$, где Θ — полярный угол, отсчитываемый от направления зеркального отражения.

Сравним данный результат с полученными ранее другими авторами. Так, в работе Пафомова [16] приведено соответствующее выражение для спектрально-угловой плотности излучения для плоского экрана конечной проводимости (см. формулы (11.10),

(11.11) работы [16]). Перейдем к пределу идеальной проводимости $\epsilon \rightarrow \infty$ и запишем получившуюся формулу в используемых в данной работе переменных. Связь между различными переменными дается следующими выражениями:

$$\begin{aligned} \beta &= \beta(0, \sin \alpha, -\cos \alpha), \\ \cos \vartheta_x &= \sin \Theta_x, \\ \cos \vartheta_y &= \cos \Theta_x \sin (\alpha + \Theta_y), \\ \cos \vartheta_z &= \cos \Theta_x \cos (\alpha + \Theta_y). \end{aligned} \quad (21)$$

В итоге получаем

$$\begin{aligned} \frac{d^2W}{d\omega d\Omega} &= \frac{e^2}{\pi^2 c} \frac{\beta^2 \cos^2 \alpha}{[1 - \cos^2 \Theta_x \cos^2 (\alpha + \Theta_y)]} \times \\ &\quad \times (\beta^2 \sin^2 \alpha \sin^2 \Theta_x \cos^2 \Theta_x \cos^2 (\alpha + \Theta_y) + \\ &\quad + [1 - \cos^2 \Theta_x \cos^2 (\alpha + \Theta_y) - \\ &\quad - \beta \sin \alpha \cos \Theta_x \sin (\alpha + \Theta_y)]^2) \times \\ &\quad \times [(1 - \beta \sin \alpha \cos \Theta_x \sin (\alpha + \Theta_y))^2 - \\ &\quad - \beta^2 \cos^2 \alpha \cos^2 \Theta_x \cos^2 (\alpha + \Theta_y)]^{-2}. \quad (22) \end{aligned}$$

В релятивистском случае данное выражение заметно упрощается и может быть записано по аналогии с (20):

$$\begin{aligned} \frac{d^2W}{d\omega d\Omega} \Big|_{rel} &= \frac{e^2}{\pi^2 c} \frac{1 - \cos^2 \Theta_x \cos^2 \Theta_y}{[\gamma^{-2} + 1 - \cos^2 \Theta_x \cos^2 \Theta_y]^2} \times \\ &\quad \times \cos^2 \alpha \frac{1 + \cos \Theta_x \cos \Theta_y}{1 + \cos \Theta_x \cos (2\alpha + \Theta_y)}, \quad (23) \end{aligned}$$

где последний множитель, так же, как и в формуле (20), для разумных значений α (напомним, что мы не рассматриваем случай скользящего падения) слабо отличается от единицы.

Сравним полученную формулу (19) и формулу Пафомова (22) для умеренно релятивистского случая ($1 \ll \gamma < 100$). Поскольку при этом условии излучение, как известно, сосредоточено в узком конусе вблизи направления зеркального отражения с максимумом при угле $\Theta_x, \Theta_y \approx \gamma^{-1}$, в дальнейшем будем использовать следующие относительные переменные: $\gamma\Theta_x, \gamma\Theta_y$ (см. также [31]). На рис. 2 приведены угловые распределения интенсивности излучения для $\gamma = 50$: видно, что предсказываемые результаты практически идентичны. Можно убедиться, что для всех значений $\gamma \gg 1$ полученная формула справедлива с погрешностью порядка γ^{-1} . Заметим, что наклон мишени в одной плоскости не меняет симметричности соответствующих кривых в другой плоскости. Это легко видно из трехмерных угловых распределений, приведенных на рис. 3

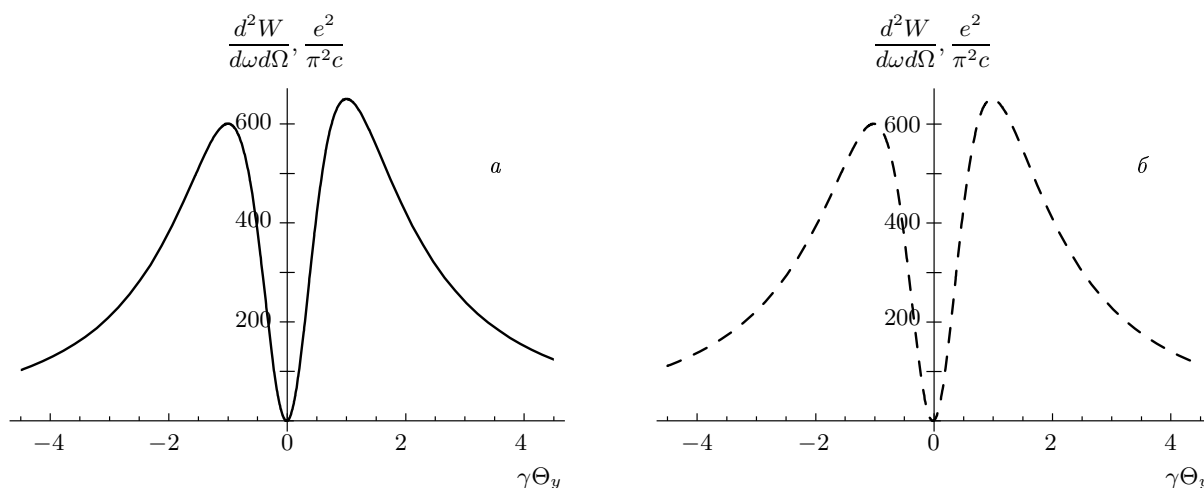


Рис. 2. Угловые распределения ПИ для параметров $\gamma = 50, \alpha = \pi/4, \Theta_x = 0$; *a* — расчет по формуле Пафомова (22), *б* — по формуле (19). Здесь и далее для того, чтобы получить величину спектрально-угловой плотности излучения, необходимо домножить значение на графике на приведенный коэффициент

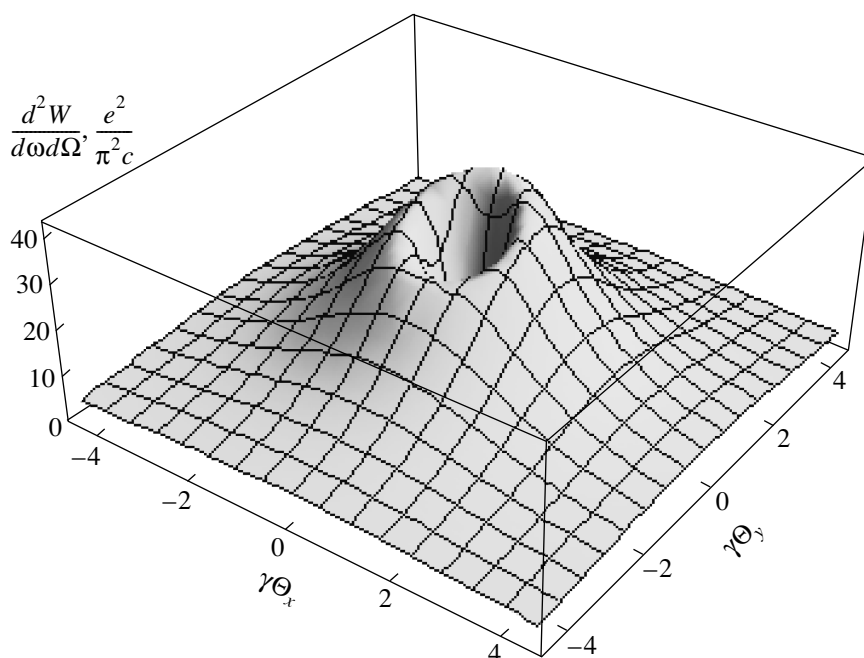


Рис. 3. Угловое распределение ПИ согласно формуле (19) для параметров $\gamma = 12, \alpha = \pi/4$

для $\gamma = 12$. Отдельный интерес представляют сравнительно малые энергии и большие углы падения частицы, так как в этой области формула (19) не применима. В этом случае интегрирование выражений (15) будем проводить численно в системе координат мишени, а выражение для фазы определяется равенством (16). На рис. 4 приведено сравнение угловых распределений для $\gamma = 3$: видно, что результаты, получаемые при разных подходах, идентичны.

Можно убедиться, что и в нерелятивистском случае ($\beta \ll 1$) результаты численного интегрирования полностью совпадают с соответствующим пределом формулы (22) (см. также [30]):

$$\begin{aligned} \frac{d^2W}{d\omega d\Omega} &= \\ &= \frac{e^2}{\pi^2 c} \beta^2 \cos^2 \alpha (1 - \cos^2 \Theta_x \cos^2 (\alpha + \Theta_y)). \end{aligned} \quad (24)$$

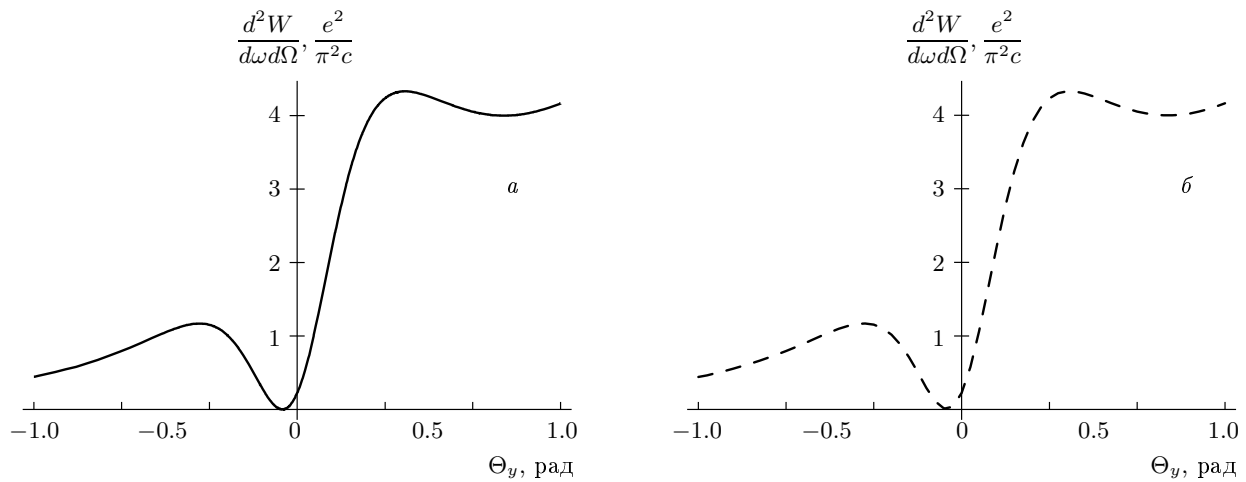


Рис. 4. Угловые распределения ПИ умеренно релятивистской частицы для параметров $\gamma = 3$, $\alpha = \pi/4$, $\Theta_x = 0$; *a* — расчет по формуле Пафомова (22), *б* — результат численного интегрирования выражений (15)

Таким образом, получаемые с помощью метода Кирхгофа результаты для плоской мишени, совпадают с полученными ранее другими методами. Отметим, что одним из преимуществ данного подхода является тот факт, что с его помощью можно явно оценить «вклад» в поле излучения продольной компоненты поля заряда. В частности, легко видеть, что имеющая место в умеренно релятивистском случае асимметрия излучения обусловлена как раз наличием в формуле (19) последнего слагаемого $\gamma^{-2} \operatorname{tg} \alpha$, исчезающего в ультрарелятивистском случае и для перпендикулярной геометрии (см. также [31, 32]). Заметим, что подобная ситуация возникает в теории излучения ускоренного заряда в случае, если векторы его скорости и ускорения не коллинеарны [24].

Следует указать также, что данный метод применим для расчета характеристик излучения «вперед». В этом легко убедиться, «сдвигая» переменную Θ_y таким образом, чтобы она отсчитывалась от направления движения заряда: $\Theta_y \rightarrow \Theta_y + \pi - 2\alpha$. Результаты численного интегрирования выражений (15) (т. е. при условии $r_0 \gg \gamma^2 \lambda$) в этом случае также найдутся в полном согласии с известным результатом Пафомова [16]. Для меньших расстояний используемую модель следует модифицировать ввиду того, что для направления «вперед» длина формирования излучения также имеет размеры порядка $\gamma^2 \lambda$. В этом случае излучение сильно интерферирует с собственным полем заряда, что должно учитываться при проведении вычислений (см. подробнее [21, 33]).

2.3. Поле излучения в предволновой зоне

В предволновой зоне излучения, т. е. на расстояниях $\gamma^2 \lambda \gtrsim r_0 \gg \gamma \lambda$, поле характеризуется тем же законом убывания $1/r_0$ и, следовательно, амплитуда волн, испущенных с различных точек поверхности мишени, в каждой точке r_0 практически одинакова. Фронт каждой волны в малой окрестности, как уже было сказано, является практически плоским, что позволяет рассматривать координатные распределения интенсивности излучения на поверхности детектора как угловые (см. также [20, 21]). Существенным различием между волновой и предволновой зонами является тот факт, что каждая сферическая волна испытывает интерференцию с другими волнами, испущенными с поверхности мишени. Для учета данного эффекта в формуле для фазы поля следует учесть следующий член разложения по малым степеням r/r_0 . Заметим, что данная ситуация аналогична дифракции Френеля в оптике [6, 19].

Выражение для спектральной плотности потока энергии через единичную площадку, нормальную к радиус-вектору r_0 , запишем в виде, удобном для сравнения с распределениями дальней зоны:

$$\frac{d^2W}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2}{\pi^2 c} |\mathfrak{R}(\alpha, \Theta_x, \Theta_x)|^2, \quad (25)$$

где безразмерный вектор $\mathfrak{R}(\alpha, \Theta_x, \Theta_x)$ в общем случае зависит от расстояния до точки наблюдения r_0 , а его компоненты имеют вид

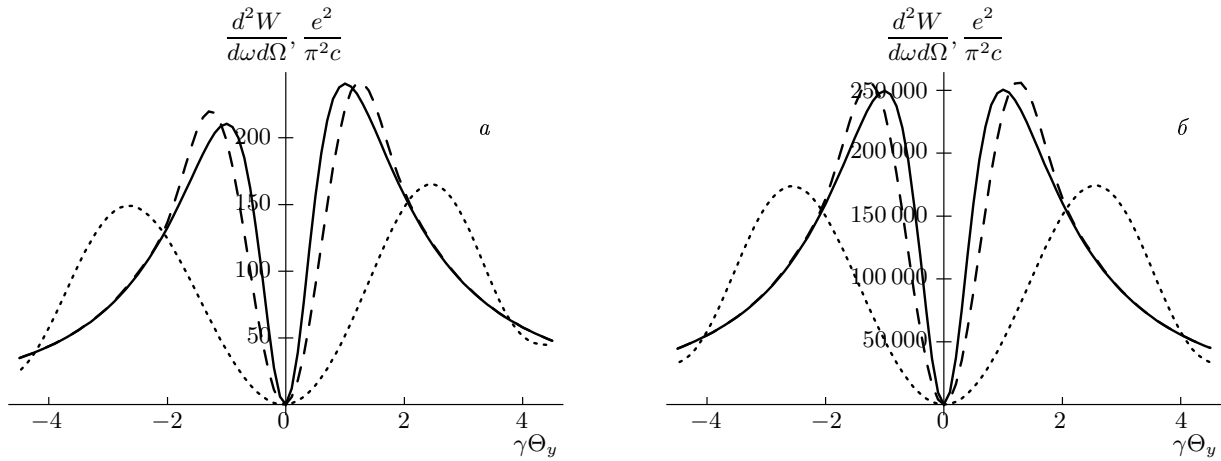


Рис. 5. Угловые распределения ПИ для различных расстояний до детектора: $r_0/\gamma^2\lambda = 10$ (сплошные кривые), 0.5 (штриховые), 0.1 (пунктирные). $a - \gamma = 30, \alpha = \pi/4, \Theta_x = 0, \lambda = 1$ мм, $b - \gamma = 1000, \alpha = \pi/4, \Theta_x = 0, \lambda = 0.1$ мм

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_x &= \frac{2\pi}{\beta^2\gamma\lambda^2} \cos(\alpha + \Theta_y) \int \frac{x}{\sqrt{x^2 + (y \cos \alpha)^2}} \times \\ &\times K_1 \left[\frac{2\pi}{\beta\gamma\lambda} \sqrt{x^2 + (y \cos \alpha)^2} \right] e^{i\varphi} dx dy, \\ \mathfrak{R}_y &= \frac{2\pi}{\beta^2\gamma\lambda^2} \cos \Theta_x \int \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + (y \cos \alpha)^2}} \times \right. \\ &\times K_1 \left[\frac{2\pi}{\beta\gamma\lambda} \sqrt{x^2 + (y \cos \alpha)^2} \right] \times \\ &\times (y \cos^2 \alpha + x \operatorname{tg} \Theta_x \sin(\alpha + \Theta_y)) - \\ &\left. - \frac{i}{\gamma} K_0 \left[\frac{2\pi}{\beta\gamma\lambda} \sqrt{x^2 + (y \cos \alpha)^2} \right] \sin \alpha \right) e^{i\varphi} dx dy. \end{aligned} \quad (26)$$

Выражение для фазы φ в системе координат мишени с точностью до членов второго порядка малости включительно запишется как

$$\begin{aligned} \varphi &= -\frac{2\pi}{\lambda} \times \\ &\times \left[x \sin \Theta_x + y \left(\cos \Theta_x \sin(\alpha + \Theta_y) - \frac{\sin \alpha}{\beta} \right) - \right. \\ &\left. - \frac{1}{2r_0} (x^2 \cos^2 \Theta_x + y^2 (1 - \cos^2 \Theta_x \sin^2(\alpha + \Theta_y)) - \right. \\ &\left. - xy \sin(2\Theta_x) \sin(\alpha + \Theta_y)) \right]. \end{aligned} \quad (27)$$

Здесь независимые от r_0 слагаемые соответствуют первому члену разложения, описывающему излучение точечного источника, а слагаемые, зависящие от r_0^{-1} , — второму, учитывающему разность фаз волн, приходящих с различных точек поверхности мишени.

На рис. 5 приведены результаты численного ин-

тегрирования выражений (26) для различных расстояний до детектора и разных энергий электронов. Можно убедиться, что для значений $r_0 = 10\gamma^2\lambda$ получаемые кривые совпадают с результатами предыдущего пункта. При переходе в предволновую зону наблюдается уширение угловых распределений, при этом асимметрия излучения, характерная для волновой зоны, сохраняется и в предволновой зоне. Можно показать, что количественные оценки асимметрии излучения, полученные для волновой зоны в работе [31], остаются справедливыми и для случая $\gamma\lambda \ll r_0 < \gamma^2\lambda$. Так, на рис. 6 приведена эволюция угловых распределений ПИ умеренно релятивистской частицы для фиксированного расстояния до детектора (детектор находится в предволновой зоне) и различных углов падения α . Кривые в ортогональной плоскости при этом остаются симметричными.

3. ПЕРЕХОДНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ ПРИ НАКЛОННОМ ПАДЕНИИ ЧАСТИЦЫ НА ПОВЕРХНОСТЬ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ МИШЕНИ

3.1. Метод Кирхгофа и общие замечания

В последнее время значительно возрос интерес к переходному излучению от изогнутых поверхностей [6, 7, 34, 35]. Преимущество такой формы мишени заключается в том, что, располагая детектор в предволновой зоне, можно тем не менее получать характеристики излучения, соответствующие волновой зоне, так как в этом случае поле псевдофотонов

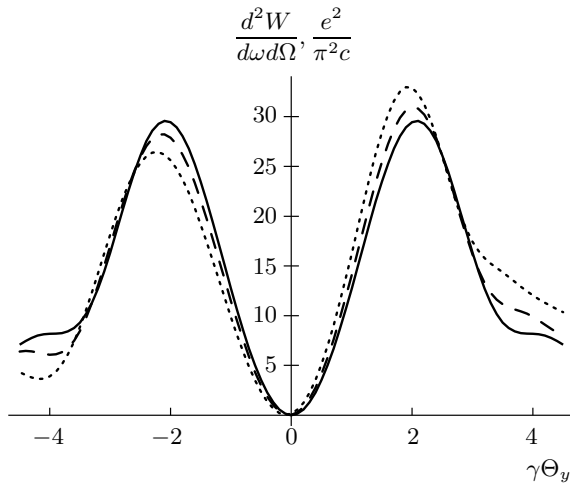


Рис. 6. Угловые распределения ПИ для детектора, находящегося в предволновой зоне, при различных углах падения: $\alpha = 0$ (сплошная кривая), $\pi/8$ (штриховая), $\pi/4$ (пунктирная); $\gamma = 12$, $r_0 = 0.15\gamma^2\lambda$, $\Theta_x = 0$, $\lambda = 1$ мм

релятивистского заряда будет отражаться от поверхности мишени практически по законам оптики, что приведет к фокусировке излучения. Аналогично, в случае, если частица пересекает поверхность двояковыпуклой линзы, излучение также будет фокусироваться в фокальной плоскости последней [36].

Переходное излучение релятивистского заряда, пересекающего изогнутый идеально проводящий экран, было впервые рассмотрено в работе [27] на примере параболоида вращения. Поле излучения рассматривалось как поле поверхностного тока, возбужденного равномерно движущимся зарядом на поверхности экрана, причем для нахождения тока использовались стандартные граничные условия для идеального проводника. В недавних работах [6, 7] были проведены расчеты поля ПИ от подобной мишени для случая $\alpha = 0$ с использованием принципа Гюйгенса (6) в приближении ультрарелятивистских энергий. В настоящей работе на основе развиваемого метода Кирхгофа представляется возможным разработать более строгий подход к расчету характеристик излучения от идеально проводящих изогнутых мишеней при наклонном падении частицы произвольной энергии. Следует ожидать, что результаты, получаемые на основе данного метода для параболической мишени, будут соответствовать результатам работы [27].

Рассмотрим простейший случай, когда поверхность раздела представляет собой идеально проводя-

щий цилиндр, линейные размеры которого не оказывают влияния на характеристики излучения. В этом случае для поля $\mathbf{E}^R(\mathbf{r}_0, \omega)$ по-прежнему можно считать справедливым интеграл Кирхгофа (5) (см. Приложение), однако система координат должна быть выбрана таким образом, чтобы два из трех уравнений содержали тангенциальные компоненты полного поля $\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)$. Очевидно, что такому требованию удовлетворяет цилиндрическая система координат с началом в точке, лежащей на оси цилиндра. Используя принятые граничные условия $E_{x,\tau}|_S = 0$, из формулы (5) получаем

$$E_{x,\tau}^R(\mathbf{r}_0, \omega) = -\frac{1}{4\pi} \int_S E_{x,\tau}^0(\mathbf{r}, \omega) \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} dS, \quad (28)$$

где индекс τ обозначает тангенциальную компоненту соответствующего вектора, а элемент поверхности интегрирования имеет вид $dS = \rho dx d\phi$ (ρ — радиус кривизны мишени).

Заметим, что в дальнейшем мы ограничимся рассмотрением лишь больших радиусов кривизны цилиндра:

$$\rho \gg r_0 \gg \gamma\lambda. \quad (29)$$

В этом случае конечная кривизна мишени будет проявляться в том факте, что волны, испущенные с различных точек поверхности, будут приходить в точку наблюдения с разной фазой. Амплитуды волн в данной точке будут при этом практически одинаковыми, и фронт волны в малой окрестности можно считать плоским. Это позволяет рассматривать получаемые угловые распределения интенсивности излучения как координатные распределения на поверхности плоского детектора.

Пусть на поверхность цилиндра падает заряд под углом $\alpha \ll \pi/2$ к оси z , как показано на рис. 7. Далее, следуя процедуре, аналогичной используемой для плоской мишени, нам следует перейти в систему координат, где ось $z_{\mathbf{k}}$ направлена вдоль радиус-вектора \mathbf{r}_0 . Переходя в левой части (28) из цилиндрической системы координат в декартову k -систему и полагая $E_{z,\mathbf{k}}^R = 0$, для поперечных компонент поля излучения получаем

$$\begin{aligned} E_{x,\mathbf{k}}^R &= \frac{E_x^R}{\cos \Theta_x}, \\ E_{y,\mathbf{k}}^R &= \frac{E_\tau^R}{\cos(\alpha + \Theta_y + \phi_0)} + E_x^R \operatorname{tg} \Theta_x \operatorname{tg}(\alpha + \Theta_y + \phi_0), \end{aligned} \quad (30)$$

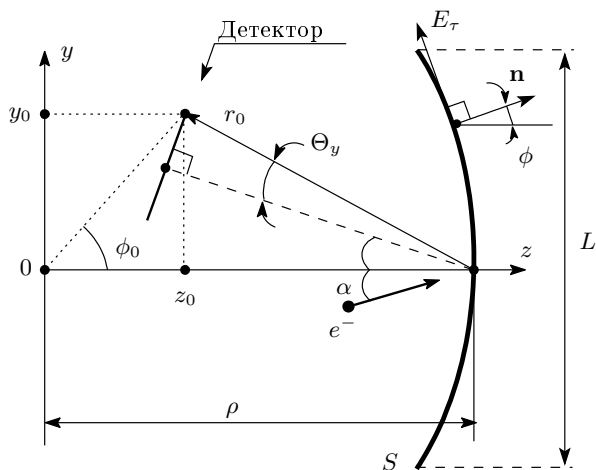


Рис. 7. Наклонное падение заряда на цилиндрическую поверхность. Ось цилиндра лежит вдоль оси x и перпендикулярна рисунку

где переменная ϕ_0 характеризует положение точки наблюдения относительно начала координат (рис. 7). При этом соотношение (7) между координатами точки r_0 и «проекционными» углами Θ_x, Θ_y остается справедливым для переменных x_0 и y_0 , а переменная z_0 «сдвигается» на величину ρ :

$$z_0 = \rho - r_0 \cos \Theta_x \cos (\alpha + \Theta_y).$$

Для компонент собственного поля частицы, стоящих в правой части интегралов (28), по аналогии с предыдущим случаем необходимо провести обратное преобразование из декартовой «штрихованной» системы координат, где ось \hat{z} направлена вдоль скорости заряда, в цилиндрическую систему координат мишени. Ввиду того, что x -компонента поля, очевидно, преобразовываться не будет, для тангенциальной составляющей поля частицы получаем

$$E_\tau^0 = \dot{E}_y^0 \cos (\alpha - \phi) + \dot{E}_z^0 \sin (\alpha - \phi), \quad (31)$$

где угол ϕ определяет положение точки на мишени. Компоненты со штрихом, входящие в данную формулу, определяются выражением (10), где для координат \hat{y}, \hat{z} также необходимо провести соответствующее преобразование, выражая их через ρ и ϕ с учетом того, что пересечение зарядом поверхности происходит в точке $z = \rho$.

Далее определим функцию Грина g , удовлетворяющую граничным условиям на поверхности ци-

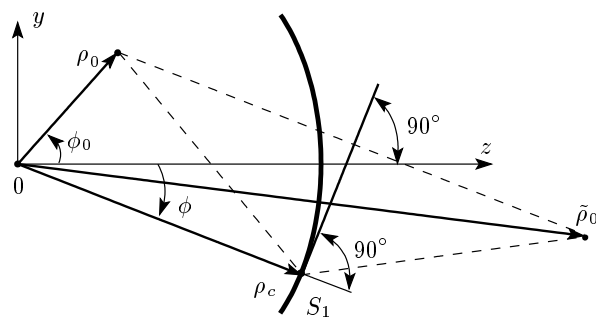


Рис. 8. Построение источника-«изображения» для цилиндрической мишени: «изображение» помещается зеркально-симметрично относительно касательной в точке мишени S_1 . Для другой точки мишени построение проводится аналогично

линдра: $g|_S = 0$. Для этого следует подобрать положение источника-«изображения» $\tilde{\mathbf{r}}_0$ таким образом, чтобы функция g обращалась в нуль во всех точках рассматриваемой поверхности. Поступим следующим образом: для заданного положения наблюдателя \mathbf{r}_0 выберем на поверхности цилиндрической мишени радиусом ρ_c произвольную точку S_1 (см. рис. 8). В данной точке проведем касательную к поверхности и поместим «изображение» наблюдателя симметрично относительно данной касательной. Выберем теперь другую точку на мишени S_2 и построим новое изображение также симметрично относительно касательной, проведенной в данной точке поверхности. Поскольку в каждой точке изогнутой поверхности направление касательных различно, совокупность таких «изображений» будет являться некоторой протяженной кривой для каждого положения наблюдателя \mathbf{r}_0 , что обеспечивает выполнение условия $g|_S = 0$ для всех точек рассматриваемой поверхности. Такое «изображение», названное в работе [37] обобщенным (generalized), может быть построено и для поверхностей более сложного аналитического профиля (параболоид, сфера и т. п.). Очевидно, что при стремлении радиуса кривизны к бесконечности (плоская мишень) данная кривая, как и положено, перейдет в точку. Отметим также, что в случае, когда профиль поверхности не является аналитическим, задача построения «изображения» усложняется (см., например, недавнюю работу [38], в которой метод изображений применен к задаче о ПИ в двухгранном угле).

Приведенные рассуждения позволяют записать функцию Грина в цилиндрических координатах в следующем виде:

$$g = - \exp\{ik[(x-x_0)^2 + (\rho \sin \phi - \rho_0 \sin \phi_0)^2 + (\rho \cos \phi - \rho_0 \cos \phi_0)^2]^{1/2}\} [(x-x_0)^2 + (\rho \sin \phi - \rho_0 \sin \phi_0)^2 + (\rho \cos \phi - \rho_0 \cos \phi_0)^2]^{-1/2} + [(x-x_0)^2 + (\rho \sin \phi - \rho_0 \sin \phi_0 - 2(\rho_c - \rho_0 \cos(\phi_0 - \phi)) \sin \phi)^2 + (\rho \cos \phi - \rho_0 \cos \phi_0 - 2(\rho_c - \rho_0 \cos(\phi_0 - \phi)) \cos \phi)^2]^{-1/2} \exp\{ik[(x-x_0)^2 + (\rho \sin \phi - \rho_0 \sin \phi_0 - 2(\rho_c - \rho_0 \cos(\phi_0 - \phi)) \sin \phi)^2 + (\rho \cos \phi - \rho_0 \cos \phi_0 - 2(\rho_c - \rho_0 \cos(\phi_0 - \phi)) \cos \phi)^2]^{1/2}\}. \quad (32)$$

Нетрудно видеть, что на поверхности рассматриваемого цилиндра, т. е. при условии $\rho = \rho_c$, функция g (32) обращается в нуль во всех точках мишени (т. е. для всех значений переменных x и ϕ). Заметим, что данное представление возможно лишь при условии, что точка наблюдения \mathbf{r}_0 является внутренней для цилиндрической поверхности радиуса ρ_c . Другими словами, функция Грина g (32) справедлива лишь при больших радиусах кривизны поверхности, определяемых неравенством (29).

Проведя несложные вычисления, для производной от функции Грина на расстояниях $r_0 \gg \lambda$ получаем

$$\frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} \Big|_S \approx 2ik (z_0 \cos \phi + y_0 \sin \phi - \rho) \frac{e^{ikR}}{R^2}. \quad (33)$$

Здесь переменная R есть расстояние между точкой на мишени и точкой наблюдения (мы избегаем прежнего обозначения $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|$, поскольку в данной задаче центр мишени и начало цилиндрической системы координат не совпадают, а переменная r_0 по-прежнему обозначает расстояние между центром мишени и точкой наблюдения).

Записываем выражения, получаемые для интегралов (28):

$$\begin{aligned} E_x^R(\mathbf{r}_0, \omega) &= -\frac{2ie}{\beta v \gamma \lambda^2} \rho \times \\ &\times \int \frac{x}{\sqrt{x^2 + \rho^2(\sin(\phi - \alpha) + \sin \alpha)^2}} \times \\ &\times K_1 \left[\frac{2\pi}{\beta \gamma \lambda} \sqrt{x^2 + \rho^2(\sin(\phi - \alpha) + \sin \alpha)^2} \right] \times \\ &\times (z_0 \cos \phi + y_0 \sin \phi - \rho) \frac{e^{i\varphi}}{R^2} dx d\phi, \\ E_r^R(\mathbf{r}_0, \omega) &= -\frac{2ie}{\beta v \gamma \lambda^2} \rho \times \\ &\times \int \left(\frac{\rho(\sin(\phi - \alpha) + \sin \alpha)}{\sqrt{x^2 + \rho^2(\sin(\phi - \alpha) + \sin \alpha)^2}} \cos(\alpha - \phi) \times \right. \\ &\times K_1 \left[\frac{2\pi}{\beta \gamma \lambda} \sqrt{x^2 + \rho^2(\sin(\phi - \alpha) + \sin \alpha)^2} \right] - \\ &- \frac{i}{\gamma} K_0 \left[\frac{2\pi}{\beta \gamma \lambda} \sqrt{x^2 + \rho^2(\sin(\phi - \alpha) + \sin \alpha)^2} \right] \times \\ &\left. \times \sin(\alpha - \phi) \right) (z_0 \cos \phi + y_0 \sin \phi - \rho) \frac{e^{i\varphi}}{R^2} dx d\phi, \end{aligned} \quad (34)$$

где фаза поля φ имеет вид

$$\varphi = k \left(R + \frac{\rho}{\beta} (\cos(\phi - \alpha) - \cos \alpha) \right). \quad (35)$$

Видно, что конечная кривизна мишени приводит к усложнению выражения для компонент поля (ср. с (13)), однако структура формул при этом сохраняется. Сохраняются также и условия расположения детектора в волновой/предволновой зонах излучения, приведенные в п. 2.1. В частности, на расстояниях $r_0 \gg r_{eff} \approx \gamma \lambda$ поле по-прежнему можно считать полностью поперечным, и мы можем пренебречь зависимостью от координат мишени в знаменателе, полагая $R^2 \approx r_0^2$.

3.2. Поле излучения в предволновой зоне

Поскольку в волновой зоне, т. е. на расстояниях $r_0 \gg \gamma^2 \lambda$, источник излучения может рассматриваться как точечный, конечная кривизна поверхности мишени не будет оказывать существенного влияния на характеристики излучения. В предволновой зоне, напротив, можно ожидать значительного влияния формы мишени ввиду того, что волны, излученные с разных точек поверхности, будут приходить в точку наблюдения с разной фазой. Для исследования данного эффекта будем проводить численное интегрирование выражений для компонент поля излучения, задавая линейные размеры цилиндра L и его радиус кривизны ρ . В этом случае пределы интегрирования по переменной ϕ определяются как $\phi_{max} = \arcsin(L/2\rho)$.

Прежде всего запишем выражение для расстояния между точкой на поверхности мишени (определяемой координатой x , радиусом кривизны ρ и углом ϕ) и точкой наблюдения:

$$\begin{aligned} R^2 &= (x - r_0 \sin \Theta_x)^2 + \\ &+ (\rho \sin \phi - r_0 \cos \Theta_x \sin(\alpha + \Theta_y))^2 + \\ &+ (\rho(\cos \phi - 1) + r_0 \cos \Theta_x \cos(\alpha + \Theta_y))^2. \end{aligned} \quad (36)$$

Для спектрально-угловой плотности излучения по-прежнему справедлива формула (25), а компоненты вектора \mathfrak{R} имеют более сложный, нежели в случае плоской мишени вид:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{R}_x = & -\frac{2\pi}{\beta^2\gamma\lambda^2} \frac{\rho}{\cos\Theta_x} \int \frac{x}{\sqrt{x^2 + \rho^2(\sin(\phi - \alpha) + \sin\alpha)^2}} K_1 \left[\frac{2\pi}{\beta\gamma\lambda} \sqrt{x^2 + \rho^2(\sin(\phi - \alpha) + \sin\alpha)^2} \right] \times \\
& \times \left(\frac{\rho}{r_0} (\cos\phi - 1) - \cos\Theta_x \cos(\alpha + \Theta_y + \phi) \right) e^{i\varphi} dx d\phi, \\
\mathfrak{R}_y = & -\frac{2\pi}{\beta^2\gamma\lambda^2} \rho \frac{\sqrt{(\rho - r_0 \cos\Theta_x \cos(\alpha + \Theta_y))^2 + (r_0 \cos\Theta_x \sin(\alpha + \Theta_y))^2}}{\rho \cos(\alpha + \Theta_y) - r_0 \cos\Theta_x} \times \\
& \times \int \left[\frac{\rho}{\sqrt{x^2 + \rho^2(\sin(\phi - \alpha) + \sin\alpha)^2}} K_1 \left[\frac{2\pi}{\beta\gamma\lambda} \sqrt{x^2 + \rho^2(\sin(\phi - \alpha) + \sin\alpha)^2} \right] \times \right. \\
& \times \left(\frac{x \operatorname{tg}\Theta_x \sin(\alpha + \Theta_y)}{\sqrt{(\rho - r_0 \cos\Theta_x \cos(\alpha + \Theta_y))^2 + (r_0 \cos\Theta_x \sin(\alpha + \Theta_y))^2}} + \cos(\alpha - \phi)(\sin(\phi - \alpha) + \sin\alpha) \right) - \\
& \left. - \frac{i}{\gamma} K_0 \left[\frac{2\pi}{\beta\gamma\lambda} \sqrt{x^2 + \rho^2(\sin(\phi - \alpha) + \sin\alpha)^2} \right] \sin(\alpha - \phi) \right] \left(\frac{\rho}{r_0} (\cos\phi - 1) - \cos\Theta_x \cos(\alpha + \Theta_y + \phi) \right) e^{i\varphi} dx d\phi.
\end{aligned} \tag{37}$$

Заметим, что в рассматриваемой задаче о ПИ переход от цилиндрической поверхности к плоской мишени осуществляется в пределе $\rho \rightarrow \infty$ в отличие, например, от случая параболической мишени, где данный переход возможен лишь в приближении однократного отражения (см. подробнее [27]). Действительно, переходя в выражении (37) к пределу $\rho \rightarrow \infty$ и учитывая, что при этом выполняются равенства $\rho \sin\phi = y$, $\rho d\phi = dy$, $\rho \cos\phi \approx \rho$, для функций \mathfrak{R}_x и \mathfrak{R}_y получаем в точности формулы для случая плоской мишени (26).

Рассмотрим угловые распределения интенсивности излучения для фиксированного расстояния до детектора $\gamma\lambda \ll r_0 < \gamma^2\lambda$ и различных значений радиуса кривизны цилиндра при его заданном размере $L = 2r_0$. На рис. 9 приведены соответствующие кривые для простейшего случая $\alpha = 0$. Используя результаты п. 2.3, нетрудно убедиться, что кривая для $\rho = 1000r_0$ совпадает с аналогичной для плоской мишени. Для значений ρ , сопоставимых с расстоянием до детектора, как и ожидалось, имеем фокусировку излучения (см. также [6, 7]). Интересно отметить, что при значениях радиуса кривизны ρ порядка нескольких r_0 значение интенсивности излучения в максимуме кривой снижается. Данное свойство характерно как для умеренно релятивистского, так и для ультрарелятивистского случаев (ср. кривые на рис. 9а и 9б). Поскольку радиационные потери сохраняются (полный интеграл под двумерной поверхностью), данное снижение «компенсируется» соответствующим увеличением в максимуме кривых в ортогональной плоскости, как показано на рис. 10.

Далее рассмотрим излучение при наклонном па-

дении: $\alpha \neq 0$. Кривые для двух значений энергий электронов и угла $\alpha = \pi/4$ приведены на рис. 11. При условии, что $\rho/r_0 = 1000$, по-прежнему получаем угловые распределения, соответствующие плоской мишени, а в ином случае — фокусировку излучения. Для умеренно релятивистских энергий, так же, как и для плоской мишени, наблюдаем асимметрию в угловом распределении ПИ, увеличивающуюся при уменьшении радиуса кривизны. Отсюда можно сделать вывод, что влияние продольной компоненты поля заряда (10) на характеристики ПИ более выражено для изогнутых мишеней (даже для довольно больших энергий — см. кривую для $\gamma = 100$ и $\rho/r_0 = 5$ на рис. 11). Это легко объяснить, исходя из того, что в тех точках мишени, где вектор нормали к поверхности не сонаправлен с вектором скорости частицы ($\mathbf{v} \nparallel \mathbf{n}$), наличие продольной компоненты поля заряда приводит к возникновению некоторой дополнительной плотности поверхностного тока, являющегося источником излучения (см. слагаемое, пропорциональное $\sin(\alpha - \phi)$, в формулах (34) и (37)).

Наконец отметим, что в случае наклонного падения частицы эффект фокусировки излучения выражен значительно сильнее (ср. кривые на рис. 9 и 11). На рис. 12 приведены угловые распределения интенсивности излучения для одной энергии и разных углов падения. Видно, что при условии $\alpha > 0$ получаемые зависимости для изогнутой мишени существенно отличаются от таковых для случая $\alpha = 0$ (рис. 9). Данная особенность может быть весьма полезна при проведении конкретных экспериментов по генерации ПИ в изогнутых мишенях.

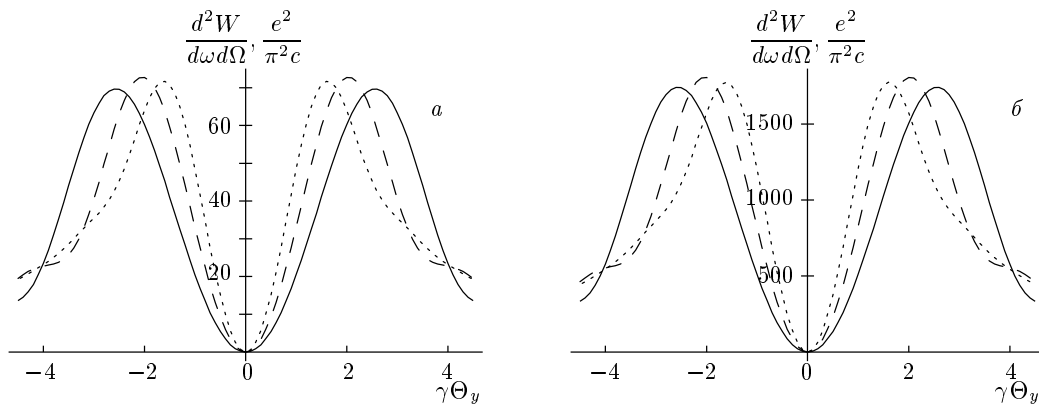


Рис. 9. Угловые распределения ПИ от цилиндрической мишени размером $L = 2r_0$ для $r_0 = 0.1\gamma^2\lambda$ и различных радиусов кривизны. $\rho/r_0 = 1000$ (сплошные кривые), 5 (штриховые), 3 (пунктирные); $a - \gamma = 20, \alpha = 0, \Theta_x = 0, \lambda = 1$ мм, $b - \gamma = 100, \alpha = 0, \Theta_x = 0, \lambda = 0.1$ мм

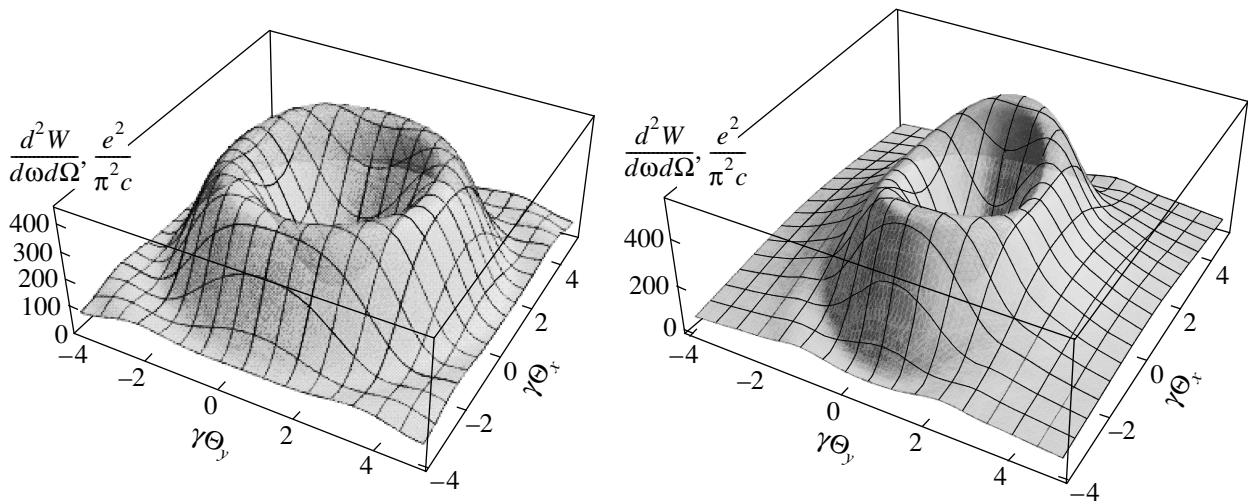


Рис. 10. Угловые распределения ПИ от цилиндрической мишени размером $L = 2r_0$ для $r_0 = 0.1\gamma^2\lambda$: $\gamma = 50, \alpha = 0, \lambda = 1$ мм; $\rho/r_0 = 50$ (а), 3 (б)

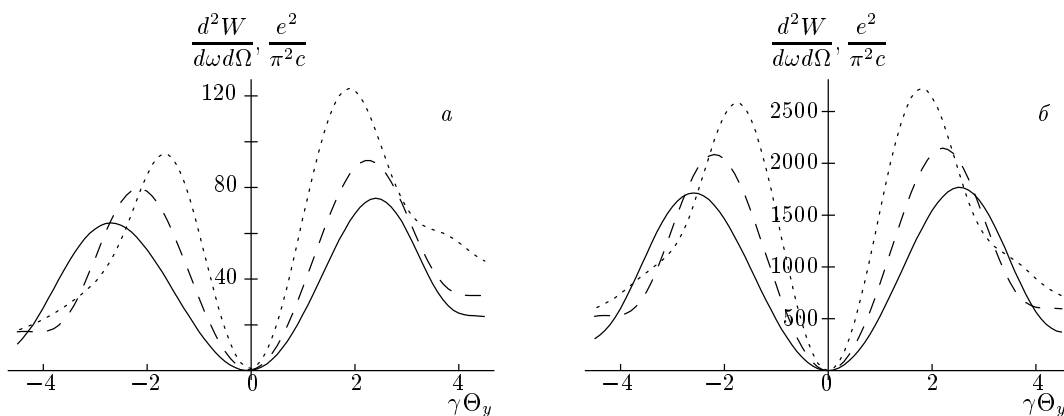


Рис. 11. Угловые распределения ПИ от цилиндрической мишени при наклонном падении ($\alpha = \pi/4$) для разных энергий электронов. $L = 2r_0, r_0 = 0.1\gamma^2\lambda$. $\rho/r_0 = 1000$ (сплошные кривые), 10 (штриховые), 5 (пунктирные); $a - \gamma = 20, \Theta_x = 0, \lambda = 1$ мм, $b - \gamma = 100, \Theta_x = 0, \lambda = 0.1$ мм

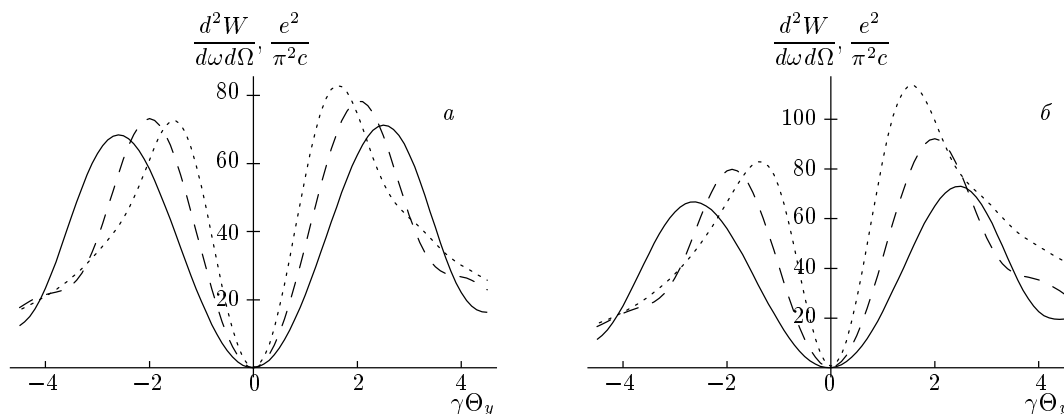


Рис. 12. Угловые распределения ПИ от цилиндрической мишени для энергии $\gamma = 20$ и разных углов падения. $L = 2r_0$, $r_0 = 0.1\gamma^2\lambda$, $\lambda = 1$ мм; $\rho/r_0 = 1000$ (сплошные кривые), 5 (штриховые), 3 (пунктирные); $\alpha = \pi/12$ (а), $\pi/6$ (б)

4. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Развитый метод позволяет проводить расчеты характеристик переходного излучения для конкретных экспериментальных условий, т. е. с учетом наклона мишени по отношению к пучку, а также с учетом реальной формы мишени. Кроме того, модель очевидным образом применяется к задаче о ПИ от гауссова пучка с заданной угловой расходимостью. Данный метод достаточно прост в реализации и применим для широкого диапазона энергий: от нерелятивистских до ультрарелятивистских, в отличие, например, от метода граничных токов, используемого авторами работы [29], пределы применимости которого ограничены неравенством $\gamma \gg 1$. Конечная кривизна поверхности в методе Кирхгофа учитывается при постановке граничных условий для тангенциальных компонент полного поля, а также при выборе расположения источника-«изображения» для построения соответствующей функции Грина, что позволяет применять данный метод для поверхностей более сложного профиля. Используемое нами приближение идеальной проводимости, как известно, позволяет с хорошей точностью описывать характеристики излучения многих реальных металлов от оптического до дальнего инфракрасного диапазона.

В заключение следует отметить, что метод Кирхгофа также может быть использован для расчета характеристик дифракционного излучения (см. [1–5]),

в том числе, резонансного ДИ (излучения Смита–Парселла), на что указывалось также в работе [37], где в задаче о ПИ от наклонной плоской мишени использовался метод, сходный с излагаемым. Простейшие расчеты в этом направлении для случая бесконечно тонкой идеально проводящей решетки и детектора, расположенного в предволновой зоне, были проведены в работе [39]. Также представляется актуальным решение задачи о ДИ частицы, пролетающей сквозь отверстие в изогнутой мишени. В этом случае при расположении детектора в предволновой зоне следует ожидать наличие фокусировки ДИ [7]. Подобные расчеты могут быть проведены на основе развитого в данной работе метода при учете «вклада» контурных токов, возникающих в результате того, что в приближении Кирхгофа значение функции поля $\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)$ на границе вакуум–идеальный проводник изменяется скачком [2]. Заметим, что учет контурных токов также необходим при решении данным методом задачи о ПИ частицы, пересекающей мишень конечных размеров [20, 21] (например, если $L < \gamma\lambda$ для цилиндра).

Авторы благодарны А. А. Тищенко за конструктивную критику и ценные советы. Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках программы «Развитие научного потенциала высшей школы (2006–2008 гг.)» (грант № 2.1.1.889).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Как известно, векторный интеграл Кирхгофа (5), полученный с помощью скалярной теоремы Грина, справедлив для любой декартовой компоненты поля излучения (см. также [18, 19]), что позволяет использовать его для расчета поля ПИ от плоской поверхности. Однако в некоторых частных случаях он может быть использован и для расчета поля ПИ от изогнутых мишеней, что связано с выбором криволинейной системы координат (как в п. 3.1). Действительно, получим выражение, аналогичное (5), с помощью векторной теоремы Грина (см., например, [2]):

$$\int_V (\mathbf{F} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{G} - \mathbf{G} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{F}) dV = \oint_S (\mathbf{G} \times \operatorname{rot} \mathbf{F} - \mathbf{F} \times \operatorname{rot} \mathbf{G}) dS. \quad (38)$$

Выберем в качестве вектора \mathbf{F} поле излучения $\mathbf{E}^R(\mathbf{r}, \omega)$, а в качестве вектора \mathbf{G} — функцию Грина полупространства, умноженную на произвольный единичный вектор: $\mathbf{G} = g\mathbf{e}$. Используя простейшие векторные тождества, можно показать, что вектор \mathbf{e} является общим множителем для всех членов формулы (38) и, следовательно, может быть опущен. В этом случае из данной формулы с учетом граничного условия $g|_S = 0$ можно получить

$$\mathbf{E}^R(\mathbf{r}_0, \omega) = \frac{1}{4\pi} \oint_S \mathbf{E}^R(\mathbf{r}, \omega) (\mathbf{n} \cdot \nabla g) dS - \frac{1}{4\pi} \oint_S (\mathbf{n} (\mathbf{E}^R \cdot \nabla g) - (\mathbf{E}^R \cdot \mathbf{n}) \nabla g) dS. \quad (39)$$

Полученное интегральное уравнение справедливо для компонент поля излучения \mathbf{E}^R в произвольной системе координат. Здесь первый интеграл в точности совпадает с правой частью формулы (5), а «вклад» второго интеграла подлежит обсуждению. Поскольку из записанных трех уравнений в (39) нас интересуют лишь два, соответствующие тангенциальным компонентам поля, член, содержащий вектор нормали, в этих уравнениях пропадает. Вычисления градиента функции Грина (4) для плоской мишени дают лишь одну ненулевую z -компоненту, и, следовательно, член, содержащий градиент, в интересующих нас уравнениях также равен нулю. Можно показать, что и для цилиндрической мишени, рассмотренной в п. 3.1, градиент функции Грина (32) имеет лишь одну ненулевую радиальную компоненту $\nabla g|_\rho = \partial g / \partial \rho$.

Таким образом, скалярная и векторная теоремы Грина приводят к одним и тем же уравнениям для тангенциальных компонент поля как в случае плоской, так и в случае цилиндрической поверхностей. Это позволяет использовать векторный интеграл Кирхгофа (5) в задаче о ПИ от цилиндрической мишени. Заметим, что при рассмотрении изогнутых мишеней более сложного профиля (параболоид, сфера) также необходимо проводить анализ «вклада» второго интеграла в формуле (39).

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Л. Тер-Микаелян, Б. В. Хачатрян, ДАН Арм.ССР **40**, 13 (1965).
2. Б. В. Хачатрян, Изв. АН Арм.ССР, сер. физ-мат. науки **18**, № 2, 133 (1965).
3. М. Л. Тер-Микаелян, *Влияние среды на электромагнитные процессы при высоких энергиях*, Изд. АН Арм.ССР, Ереван (1969), с. 379–385.
4. Б. М. Болотовский, Е. А. Галстян, УФН **170**, 809 (2000).
5. Б. М. Болотовский, Г. В. Воскресенский, УФН **94**, 377 (1968).
6. P. V. Karataev, Phys. Lett. A **345**, 428 (2005).
7. A. P. Potylitsyn and R. O. Rezaev, Nucl. Instr. Meth. Phys. Res. B **252**, 44 (2006); A. P. Potylitsyn, in *NATO Workshop «Advanced Radiation Sources and Applications»*, Springer, New York (2006), p. 149.
8. D. Xiang and W.-H. Huang, Nucl. Instr. Meth. Phys. Res. B **248**, 163 (2006).
9. V. A. Verzilov, Phys. Lett. A **273**, 135 (2000).
10. M. Castellano, V. Verzilov, L. Catani et al., Phys. Rev. E **67**, 015501(R) (2003).
11. Б. Н. Калинин, Г. А. Науменко, А. П. Потылицын и др., Письма в ЖЭТФ **84**, 136 (2006).
12. L. Wartski, S. Roland, J. Lasalle et al., J. Appl. Phys. **46**, 3644 (1975).
13. M. Castellano and V. A. Verzilov, Phys. Rev. Spec. Top. Acell. Beams **1**, 062801 (1998).
14. S. P. Jamison, G. Berden, A. M. MacLeod et al., in *Proc. EPAC-06*, Edinburgh, Scotland (2006), p. 915.
15. D. Mihalcea, C. L. Bohn, U. Happek et al., Phys. Rev. Spec. Top. Acell. Beams **9**, 082801 (2006).

16. В. Е. Пафомов, Труды ФИАН **XLIV**, 28 (1969).
17. В. Г. Багров, В. В. Белов, В. Н. Задорожный, А. Ю. Трифонов, *Методы математической физики*, т. 4, Изд-во НТЛ, Томск (2002), с. 147.
18. И. Н. Топтыгин, *Современная электродинамика*, т. 2, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Москва–Ижевск (2005), с. 467–468.
19. J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, J. Willey & Sons, New York (1999), p. 482, 656.
20. Н. Ф. Шульга, С. Н. Добровольский, ЖЭТФ **117**, 668 (2000).
21. S. N. Dobrovolsky and N. F. Shulga, Nucl. Instr. Meth. Phys. Res. B **201**, 123 (2003).
22. М. И. Рязанов, Письма в ЖЭТФ **39**, 569 (1984).
23. И. М. Рыжик, И. С. Градштейн, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Гостехиздат, Москва–Ленинград (1951), с. 262, 344–345.
24. В. Г. Багров, Г. С. Бисноватый-Коган, В. А. Бордовицын и др., *Теория излучения релятивистских частиц*, Физматлит, Москва (2002), с. 16–35.
25. V. A. Bordovitsyn, V. G. Bulenok, and T. O. Pozdeeva, Nucl. Instr. Meth. Phys. Res. B **201**, 9 (2003); В. Г. Багров, В. А. Бордовицын, Г. Ф. Копытов, Изв. вузов. Физика **3**, 30 (1972).
26. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория поля*, Физматлит, Москва (2006), с. 236–267.
27. М. И. Рязанов, И. С. Тилинин, ЖЭТФ **71**, 2079 (1976).
28. М. И. Рязанов, ЖЭТФ **129**, 611 (2006).
29. D. Sutterlin, D. Erni, M. Dehler et al., Nucl. Instr. Meth. Phys. Res. B **264**, 361 (2007).
30. В. Л. Гинзбург, *Теоретическая физика и астрофизика. Дополнительные главы*, Наука, Москва (1981), с. 179.
31. A. P. Potylitsyn, Nucl. Instr. Meth. Phys. Res. B **145**, 169 (1998).
32. G. L. Orlandi, in *Proc. 27th Int. Free Electron Laser Conf.*, Stanford, USA (2005), p. 576.
33. А. В. Серов, Б. М. Болотовский, ЖТФ **67**, № 9, 89 (1997).
34. G. A. Naumenko, Nucl. Instr. Meth. Phys. Res. B **227**, 87 (2005).
35. C. P. Welsch, E. Bravin, T. Lefevre et al., in *Proc. EPAC-06*, Edinburgh, Scotland (2006), p. 1220.
36. Б. М. Болотовский, А. В. Серов, Письма в ЖЭТФ **86**, 8 (2007).
37. Y. Takakura and O. Haeblerlé, Phys. Rev. E **61**, 4441 (2000).
38. А. В. Серов, Б. М. Болотовский, ЖЭТФ **131**, 994 (2007).
39. Д. В. Карловец, А. П. Потылицын, Письма в ЖЭТФ **84**, 579 (2006).