

# ЭФФЕКТИВНАЯ НЕЛИНЕЙНАЯ ВОСПРИИМЧИВОСТЬ ГРАНУЛИРОВАННОЙ СВЕРХПРОВОДЯЩЕЙ ПЛЕНКИ

*В. В. Курин\*, А. А. Уткин*

*Институт физики микроструктур Российской академии наук  
603950, Нижний Новгород, Россия*

Поступила в редакцию 13 июня 2007 г.

Приводится теоретический расчет эффективной нелинейности тонкой гранулированной сверхпроводящей пленки. Предполагается, что пленка представляет собой сплошную сверхпроводящую матрицу с включенными в нее сверхпроводящими гранулами, причем гранулы имеют цилиндрическую структуру с образующей, перпендикулярной пленке. Для расчета эффективной нелинейности найдено распределение тока и поля в пленке, при этом и матрица, и гранулы рассматриваются в рамках теории Гинзбурга–Ландау. Расстояние между гранулами считается много большим размеров гранул, поэтому для расчета полей применяется приближение Максвелла–Гарнетта. Полученная аналитическая формула для эффективной нелинейной восприимчивости проанализирована при различных значениях физических параметров. Показано, что если размер гранул много больше глубины проникновения магнитного поля в вещество матрицы, а проводимость гранул меньше проводимости матрицы, то эффективная нелинейность в разы превышает нелинейность как матрицы, так и гранул.

PACS: 74.25.Nf

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Нетривиальные электродинамические свойства композитных материалов продолжают привлекать огромный интерес исследователей. На основе микро- и нанотехнологий созданы искусственные вещества, обладающие одновременно отрицательными магнитной и диэлектрической проницаемостями — левые среды [1, 2], вещества с зонной дисперсионной характеристикой света — фотонные кристаллы [3–5], обсуждается возможность создания веществ с заранее заданной дисперсией [6]. При использовании этих структур становится возможным преодолеть дифракционный предел при получении изображений предметов [7, 8], появляются эффекты полного отсутствия отражения независимо от угла падения [9], а также другие не менее интригующие явления (см., например, статьи [10, 11], обзор [12]).

Одним из характерных свойств композитов является сильная нелинейность. Это связано с тем, что электромагнитное поле в них концентрируется в некоторых небольших пространственных областях.

Поэтому наличие даже небольшой нелинейной восприимчивости вещества в этих областях приведет к их большому вкладу в общую нелинейность вещества [13]. Эффективная нелинейность композитных материалов может значительно превышать собственные нелинейности веществ, входящих в композит [14–16], т. е. можно говорить об эффекте усиления нелинейности неоднородностью.

Этот эффект может быть использован для создания искусственных структур, обладающих большой нелинейностью. В миллиметровом и субмиллиметровом диапазонах веществами, обладающими большой нелинейностью, являются сверхпроводники. Измерения эффекта генерации гармоник при облучении монокристаллических сверхпроводников волнами СВЧ-диапазона показывают, что вблизи сверхпроводящего фазового перехода эти соединения даже в однородном состоянии обладают большим коэффициентом нелинейности [17–20]. Кроме того, известно, что высокотемпературные купратные сверхпроводники (ВТСП) склонны образовывать сложную многофазную пространственно-неоднородную структуру [21]. Эти обстоятельства делают применение ВТСП в качестве основы для сильно нелиней-

\*E-mail: kurin@ipm.sci-nnov.ru

ного композита особенно привлекательным.

Существует несколько основных механизмов нелинейности в сверхпроводниках [19]. В гранулированных образцах могут возникать джозефсоновские связи между гранулами, что приводит к нелинейным эффектам из-за синусоидального токо-фазового соотношения [22]. Если моделировать гранулированный сверхпроводник сеткой из джозефсоновских контактов, то введение неоднородности, например отсутствие контакта в каком-то месте, приведет к усилению нелинейных эффектов, что связано с концентрацией тока [23]. Второй механизм связан с движением абрикосовских вихрей в негармоническом потенциале пиннинга. Неоднородность сверхпроводника в этом случае также приводит к концентрации воздействующих на вихрь внешних полей и нарастанию нелинейности [24]. В настоящей статье мы хотим рассмотреть гранулированный сверхпроводник с характерными расстояниями между гранулами много большими сверхпроводящей длины корреляции. В этом случае джозефсоновские связи не образуются, а механизм, связанный с пиннингом вихрей, несуществен, поскольку на СВЧ-частоте сила пиннинга мала [25]. В этих условиях основным механизмом нелинейности будет нелинейность Гинзбурга–Ландау, связанная с зависимостью сверхпроводящего параметра порядка от магнитного поля [19].

При теоретическом рассмотрении взаимодействия многокомпонентных структур с электромагнитными полями миллиметрового диапазона можно считать, что пространственный масштаб изменения полей много больше масштаба неоднородности среды. Поэтому при решении внешней задачи можно рассматривать среду как однородную, обладающую какими-то не зависящими от координат эффективными параметрами. Для получения этих параметров следует определить локальные токи и поля в каждой точке среды, а затем найти связь между средними по объему током и полем. Существуют два основных приближения для расчета: приближение малой объемной доли включений (приближение Максвелла–Гарнетта) [26] и приближение эффективной среды (приближение Бруггема) [27], которые отличаются между собой способом вычисления локального поля в среде. На базе этих приближений была разработана теория эффективных проводимости и нелинейной восприимчивости металлов, при этом считалось, что длина волны электромагнитного поля в вакууме много больше всех остальных масштабов в задаче, и уравнения Максвелла решались в квазистатическом прибли-

жении [13, 16, 28]. В сверхпроводнике роль длины волны играет лондоновская глубина проникновения. Как правило, она не превышает нескольких десятых микрона, из-за чего характерный масштаб неоднородностей в сверхпроводнике может быть сравним и даже много больше нее. Поэтому при рассмотрении неоднородного сверхпроводника хотелось бы выйти за рамки квазистатического приближения при решении уравнений Максвелла. Кроме того, плотность сверхпроводящего тока локально связана не с электрическим или магнитным полем, а с калибровочно-инвариантной разностью векторного потенциала и градиента фазы сверхпроводящего параметра порядка. Из-за этого в рассмотрение должна быть введена дополнительная степень свободы, связанная с динамикой фазы параметра порядка в сверхпроводнике. Обобщение, учитывающее эти особенности неоднородных сверхпроводников, и построено в настоящей статье.

В данной работе рассчитана связь между средними по пространству током и полем в неоднородном сверхпроводнике. В случае отсутствия постоянного магнитного поля найдены эффективные лондоновская глубина и коэффициент кубичной нелинейности. Для этого рассмотрена задача о взаимодействии электромагнитного поля с тонкой гранулированной сверхпроводящей пленкой. Считается, что пленка представляет собой сплошной сверхпроводящий массив со сверхпроводящими же включениями (гранулами), причем физические параметры матрицы и гранул различаются между собой. При описании такой пленки плотности токов полагаются малыми настолько, чтобы нигде не возникали движущиеся вихри или центры проскальзывания фазы. Кроме того, частоты, соответствующие СВЧ-диапазону, много меньше характерных частот релаксации параметра порядка [29]. В этих условиях можно использовать двухжидкостную модель сверхпроводника, в которой распределения сверхпроводящего параметра порядка и сверхтока определяются статической теорией Гинзбурга–Ландау, а полный ток есть сумма тока нормальных электронов и сверхпроводящего тока. Мы также полагаем, что температура достаточно далека от критической, поэтому ток нормальных электронов мал по сравнению со сверхтоком, и его можно не учитывать. Предполагается, что гранулы цилиндрические и протыкают пленку насквозь, а объемная доля гранул мала по сравнению с объемной долей матрицы. В приближении Максвелла–Гарнетта выведена формула для соотношения между усредненными по пространству током, электромагнитным полем и параметром порядка, из ко-

торой определены эффективные лондоновская глубина и коэффициент кубичной нелинейности.

Статья построена следующим образом. В разд. 2 поставлена задача о нелинейном отклике тонкой неоднородной пленки. В приближении плавных по сравнению с длиной когерентности неоднородностей выведены уравнения для электромагнитного поля и параметра порядка. В разд. 3 эти уравнения решены в линейном приближении для случая одной аксиально-симметричной гранулы, после чего в приближении Максвелла–Гарнетта найдена эффективная лондоновская глубина. В разд. 4 в приближении слабой нелинейности решена нелинейная задача с одной аксиально-симметричной гранулой, затем найден эффективный коэффициент нелинейности.

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим задачу об отклике гранулированной сверхпроводящей пленки на электромагнитное поле. Пусть пленка представляет собой однородную сверхпроводящую матрицу с включенными в нее сверхпроводящими гранулами, причем параметры матрицы и гранул различны. Предположим, что гранулы цилиндрические и протыкают пленку насквозь (рис. 1). Источником поля является некий заданный внешний ток  $\mathbf{j}_E(\mathbf{r}, t) = \mathbf{j}_E(\mathbf{r}) \sin \omega t$ , гармонически изменяющийся во времени. В дальнейшем мы покажем, что конкретный вид пространственного распределения этого тока не важен, важно только, чтобы он тек достаточно далеко от пленки — на расстояниях, много больших характерных масштабов изменения поля в плоскости пленки.

Для нахождения эффективной нелинейности необходимо найти электромагнитные поля и токи в такой системе. Они определяются уравнениями

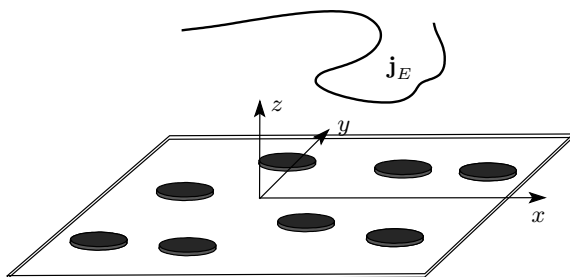


Рис. 1. Задача о гранулированной сверхпроводящей пленке. Темным цветом показаны гранулы, светлым — матрица. Источником поля является внешний ток  $\mathbf{j}_E$

Максвелла. Для полей миллиметрового диапазона выполнено условие  $\lambda \ll c/\omega$ , где  $\lambda$  — лондоновская глубина проникновения в сверхпроводник, поэтому в пленке можно пренебречь током смещения по сравнению со сверхпроводящим током. Кроме того, если все геометрические масштабы в задаче много меньше  $c/\omega$ , то током смещения можно пренебречь и при расчете полей снаружи пленки, вплоть до расстояний порядка  $c/\omega$ . Тогда можно воспользоваться магнитостатическими уравнениями Максвелла, из которых следует

$$\text{rot rot } \mathbf{A} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad (1)$$

где  $\mathbf{A}$  — векторный потенциал электромагнитного поля. Чтобы решить это уравнение, необходимо знать выражение для тока  $\mathbf{j}$ . Ток в нашей задаче складывается из заданного тока  $\mathbf{j}_E$  и тока в пленке  $\mathbf{j}_f$ . Ток в пленке  $\mathbf{j}_f$  является неизвестной величиной. При его нахождении необходимо, во-первых, учесть, что этот ток течет только по пленке, и, во-вторых, найти его связь с электромагнитным полем. Для записи пространственного распределения  $\mathbf{j}_f$  предположим, что толщина пленки мала по сравнению с характерным масштабом распределения тока в ней. Если учесть, что неоднородности в пленке имеют цилиндрическую структуру, то ясно, что в этом случае плотность тока распределена по толщине пленки практически однородно. Поэтому пространственное распределение тока  $\mathbf{j}_f$  может быть записано как

$$\mathbf{j}_f(\mathbf{r}, z) = d\delta(z)\mathbf{j}_f(\mathbf{r}, 0), \quad (2)$$

где  $\mathbf{r} = (x, y)$  — радиус-вектор в плоскости  $z = 0$ . Такая запись означает, что в плоскости  $z = 0$  течет поверхностный ток величиной  $d\mathbf{j}_f(\mathbf{r}, 0)$ . Для нахождения связи этого поверхностного тока в сверхпроводящей пленке с электромагнитным полем будем использовать теорию Гинзбурга–Ландау. При этом заметим, что времена релаксации параметра порядка в ВТСП имеют порядок  $10^{-12}$  с [29] и их можно считать много меньшими временного периода электромагнитного поля. Поэтому параметр порядка будет успевать срелаксировать к равновесному значению, и для описания сверхпроводника можно использовать стационарную теорию. Кроме того, будем полагать проводимость нормальных электронов малой по сравнению с проводимостью сверхпроводящих электронов, т. е.  $\sigma_n \omega / c^2 \ll 1/\lambda^2$ . Это условие выполняется при температурах, достаточно далеко отстоящих от критической, и приводит к тому, что при дальнейшем рассмотрении можно пренебречь нормальным током.

Свободная энергия сверхпроводника имеет вид

$$F = \int \left\{ a(\mathbf{r})|\psi|^2 + \frac{b(\mathbf{r})}{2}|\psi|^4 + \gamma(\mathbf{r}) \left| \left( -i\hbar\nabla - \frac{2e}{c}\mathbf{A} \right) \psi \right|^2 + \frac{(\text{rot } \mathbf{A})^2}{8\pi} \right\} dv. \quad (3)$$

Здесь  $\psi$  — сверхпроводящий параметр порядка, интегрирование ведется по объему пленки. Из-за того, что пленка неоднородна, коэффициенты  $a$ ,  $b$  и  $\gamma$  в этом разложении зависят от координат. Варьируя обычным образом этот функционал по  $\mathbf{A}$  и  $\psi^*$ , получим уравнение (1) с выражением для тока

$$\mathbf{j} = 2e\gamma(\mathbf{r})|\psi|^2(\hbar\nabla\theta - 2ec^{-1}\mathbf{A}) \quad (4)$$

и уравнение для параметра порядка

$$-\hbar^2\gamma(\mathbf{r})\Delta|\psi| - \hbar^2\nabla\gamma(\mathbf{r})\nabla|\psi| + a(\mathbf{r})|\psi| + b(\mathbf{r})|\psi|^3 + \gamma(\mathbf{r})(\hbar\nabla\theta - 2ec^{-1}\mathbf{A})^2|\psi| = 0, \quad (5)$$

где  $\theta$  — фаза параметра порядка  $\psi$ . Эти уравнения образуют замкнутую систему для поиска векторного потенциала, плотности тока и параметра порядка.

Рассмотрим характерные пространственные масштабы в этих уравнениях. Уравнение для векторного потенциала (1) с выражением для тока, определяемым формулами (2), (4), имеет характерный пространственный масштаб

$$\lambda_P = \frac{c^2}{16\pi e^2\gamma|\psi|^2 d} = \frac{\lambda^2}{d}, \quad (6)$$

где  $\lambda = c/\sqrt{16\pi e^2\gamma|\psi|^2}$  — лондоновская глубина проникновения [30]. Поскольку мы считаем пленку тонкой по сравнению с  $\lambda$ ,  $\lambda_P \gg \lambda$ . Уравнение для параметра порядка (5) имеет пространственный масштаб  $\xi = \sqrt{\hbar^2\gamma a^{-1}}$  — длину когерентности. Кроме того, есть характерный масштаб  $L$  пространственного изменения коэффициентов  $a(\mathbf{r})$ ,  $b(\mathbf{r})$  и  $\gamma(\mathbf{r})$  в плоскости  $z = 0$ . Для ВТСП выполнено условие  $\xi \ll \lambda$ . Мы предположим, что масштаб изменения коэффициентов  $L$  удовлетворяет условию  $\xi \ll L$ . Тогда в уравнении (5) можно пренебречь слагаемыми с  $\Delta|\psi|$  и  $\nabla\gamma\nabla|\psi|$ , поскольку они дают лишь малые поправки соответственно порядка  $\xi^2/L^2$  и  $\xi/L$ . Уравнение из дифференциального превращается в алгебраическое. Решая его, получим

$$|\psi|^2 = -\frac{a(\mathbf{r})}{b(\mathbf{r})} - \frac{\gamma(\mathbf{r})}{b(\mathbf{r})} \left( \hbar\nabla\theta - \frac{2e}{c}\mathbf{A} \right)^2. \quad (7)$$

Подставляя это решение для  $|\psi|^2$  в (4), получим следующее выражение для связи между током и полем:

$$\mathbf{j} = -\frac{c}{4\pi}u(\mathbf{r}) \left( \mathbf{A} - \frac{\Phi_0}{2\pi}\nabla\theta \right) + v(\mathbf{r}) \left( \mathbf{A} - \frac{\Phi_0}{2\pi}\nabla\theta \right)^2 \left( \mathbf{A} - \frac{\Phi_0}{2\pi}\nabla\theta \right). \quad (8)$$

В материальном соотношении (8) величину

$$u(\mathbf{r}) = \frac{16\pi e^2\gamma(\mathbf{r})|a(\mathbf{r})|}{c^2b(\mathbf{r})} \quad (9)$$

можно назвать линейной восприимчивостью сверхпроводника. Видно, что она однозначно связана с лондоновской глубиной проникновения соотношением  $u(\mathbf{r}) = \{\lambda(\mathbf{r})\}^{-2}$ . Коэффициент при кубичной части  $(\mathbf{A} - \Phi_0\{2\pi\}^{-1}\nabla\theta)^3$ , определяемый формулой

$$v(\mathbf{r}) = \frac{8e^3\gamma^2(\mathbf{r})}{c^2b(\mathbf{r})}, \quad (10)$$

назовем нелинейной восприимчивостью сверхпроводника. Получается, что и линейная, и нелинейная восприимчивости являются функциями координат. Нашей конечной целью является нахождение эффективных величин, которые связывают средние по пространству ток и калибровочно-инвариантную величину  $\mathbf{A} - \Phi_0\{2\pi\}^{-1}\nabla\theta$ . Поскольку и ток, и векторный потенциал распределены в пространстве неоднородно, эффективные величины  $u_{eff}$  и  $v_{eff}$  не будут просто средними  $\langle u \rangle$  и  $\langle v \rangle$  по пространству. Для правильного нахождения  $u_{eff}$  и  $v_{eff}$  необходимо знать пространственное распределение тока, векторного потенциала, а также градиента фазы параметра порядка.

Уравнение для распределения векторного потенциала можно получить, собирая вместе соотношения (1), (2) и (8):

$$-\Delta\mathbf{A} + u(\mathbf{r})d\delta(z)(\mathbf{A} - \mathbf{S}) - v(\mathbf{r})d\delta(z)(\mathbf{A} - \mathbf{S})^2(\mathbf{A} - \mathbf{S}) = 4\pi c^{-1}\mathbf{j}_E(\mathbf{r}, t), \quad (11)$$

где введено обозначение

$$\mathbf{S} = \frac{\Phi_0}{2\pi}\nabla\theta. \quad (12)$$

В этом уравнении мы выбрали для векторного потенциала калибровку Кулона

$$\text{div } \mathbf{A} = 0.$$

Будем искать решение (11) в виде

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_E, \quad (13)$$

где  $\mathbf{A}_E$  — решение уравнения

$$-\Delta\mathbf{A}_E + u_e d\delta(z)\mathbf{A}_E = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_E(\mathbf{r}, t). \quad (14)$$

Здесь  $u_e$  — значение коэффициента  $u(\mathbf{r})$  вдали от гранул. Уравнение (14) описывает вспомогательную задачу о токе  $\mathbf{j}_E(\mathbf{r}, t)$ , текущем над однородной линейной пленкой с линейной восприимчивостью, совпадающей с линейной восприимчивостью матрицы. Отложим пока обсуждение этого уравнения и рассмотрим уравнение для  $\mathbf{A}_1$ . Величина  $\mathbf{A}_1$  является поправкой к  $\mathbf{A}_E$ , обусловленной, во-первых, наличием гранул, и, во-вторых, нелинейностью матрицы и гранул. Из соотношения (11) уравнение для  $\mathbf{A}_1$  имеет вид

$$-\Delta \mathbf{A}_1 + u_e d \delta(z) \mathbf{A}_1 = d \delta(z) \{-\alpha(\mathbf{r})(\mathbf{A} - \mathbf{S}) + u_e \mathbf{S} + v(\mathbf{r})(\mathbf{A} - \mathbf{S})^3\}, \quad (15)$$

где  $\alpha(\mathbf{r}) = u(\mathbf{r}) - u_e$ . Пользуясь функцией Грина этого трехмерного дифференциального уравнения, найденной в работах [30, 31], можно преобразовать его в двумерное интегральное:

$$\mathbf{A}_1(\mathbf{r}) = \int G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \{-\alpha(\mathbf{r}') \mathbf{A}(\mathbf{r}') + u(\mathbf{r}') \mathbf{S}(\mathbf{r}') + v(\mathbf{r}') (\mathbf{A}(\mathbf{r}') - \mathbf{S}(\mathbf{r}'))^3\} d^2 \mathbf{r}', \quad (16)$$

где все неизвестные величины взяты при  $z = 0$ ,  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор в плоскости  $x, y$ , а функция Грина определяется выражением

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \int \frac{de^{-i\mathbf{q}(\mathbf{r}'-\mathbf{r})}}{2q + k_0^2 d} \frac{d^2 \mathbf{q}}{(2\pi)^2}. \quad (17)$$

В одном этом векторном уравнении две неизвестных величины — вектор  $\mathbf{A}_1$  и скаляр  $\theta$ . Поэтому необходимо еще одно скалярное уравнение. Оно может быть получено из уравнения Максвелла для  $\text{rot} \mathbf{B}$ . Беря от обеих его частей дивергенцию, получим

$$\text{div} \mathbf{j} = 0, \quad (18)$$

откуда, учитывая то, что  $z$ -компонента тока в пленке равна нулю, получим

$$\text{div}_2 \{u(\mathbf{r})(\mathbf{A} - \mathbf{S}) - v(\mathbf{r})(\mathbf{A} - \mathbf{S})^2(\mathbf{A} - \mathbf{S})\} = 0, \quad (19)$$

где

$$\text{div}_2 \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y}. \quad (20)$$

Двумерные уравнения (16) и (19) образуют замкнутую систему для поиска векторного потенциала и фазы параметра порядка. Источником в этих уравнениях является  $\mathbf{A}_E$  — векторный потенциал тока  $\mathbf{j}_E$ , размещенного над однородной пленкой. Его

можно найти из уравнения (14), которое решается при помощи использования функции Грина (17). При этом получается, что если характерное расстояние от провода до пленки  $a$  много больше величины  $(u_e d)^{-1}$ , то характерный масштаб изменения  $\mathbf{A}_E$  на пленке будет совпадать с  $a$ . Предположим, что внешний ток течет достаточно далеко от пленки, т. е.  $a$  много больше всех масштабов в плоскости пленки, но много меньше  $c/\omega$ . Тогда при решении системы (16), (19) можно считать  $\mathbf{A}_E$  постоянным в пространстве вектором.

### 3. ЛИНЕЙНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Система (16), (19) является нелинейной. Будем решать ее по теории возмущений, считая нелинейные члены малыми. Тогда в нулевом приближении такой теории найдем эффективную линейную восприимчивость, а в первом приближении можно найти эффективную нелинейную восприимчивость. В нулевом приближении следует пренебречь членами вида  $(\mathbf{A} - \mathbf{S})^3$ . Получающаяся система не может быть решена точно, если число гранул два или больше. Следуя методике, изложенной в работе [16], можно показать, что если среднее расстояние между гранулами  $L$  много больше характерного размера гранул  $b$  (выполнено приближение Максвелла – Гарнетта), то решение приближенно может быть записано в следующем виде:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{A}_E + \sum_{k=1}^N \mathbf{A}_1^*(\mathbf{r} - \mathbf{N}_k), \quad (21)$$

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}) = \sum_{k=1}^N \mathbf{S}^*(\mathbf{r} - \mathbf{N}_k), \quad (22)$$

где  $\mathbf{A}_1^*$  и  $\mathbf{S}^*$  — решение системы для случая с одной цилиндрической гранулой,  $\mathbf{N}_k$  — положение центра  $k$ -й гранулы,  $N$  — число гранул. Плотность тока определяется выражением

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \begin{cases} u_i(\mathbf{A} - \mathbf{S}), & \mathbf{r} \in \text{granulas}, \\ u_e(\mathbf{A} - \mathbf{S}), & \mathbf{r} \in \text{matrix}. \end{cases} \quad (23)$$

Фактически, это решение использует то обстоятельство, что решение задачи об одной грануле является быстро убывающим, поэтому гранулы влияют друг на друга лишь в меру некоего малого параметра. Из-за этого можно построить решение, зная только решение задачи об одной грануле [26].

Зная пространственные распределения векторного потенциала, градиента фазы параметра порядка

и плотности тока, можно найти соотношение между их усредненными значениями, которое и определит эффективную линейную восприимчивость. Пространственное усреднение проводится согласно формуле

$$\langle G \rangle = \frac{1}{S} \int_S G(\mathbf{r}) ds, \quad (24)$$

где интегрирование ведется по некоей области  $S$ , включающей в себя большое число гранул. Далее, выражая  $\langle \mathbf{j} \rangle$  через калибровочно инвариантную разность  $\langle \mathbf{A} \rangle - \langle \mathbf{S} \rangle$ , получим искомую эффективную восприимчивость. В результате вычислений получается выражение, по структуре совпадающее с известной формулой Максвелла – Гарнетта [26]:

$$u_{eff} = u_e + p(u_i - u_e)A, \quad (25)$$

(где  $p = NS_0/S$  – объемная доля гранул), но формфактор  $A$ , определяемый задачей об одной грануле, отличается от формфактора в простой потенциальной задаче. Формула для него приведена в Приложении.

Таким образом, для нахождения эффективной линейной восприимчивости следует решить задачу с одной гранулой. Детальная методика решения для случая с одной аксиально симметричной гранулой с резкими границами изложена в Приложении. Она сводит векторную интегро-дифференциальную систему (16), (19) к одному интегральному уравнению для функции одной переменной (41), которое затем решается численно. При этом векторный потенциал определяется формулой (34), фаза параметра порядка определяется формулами (36), (37). Зная численное решение системы, можно строить пространственные распределения плотности тока, векторного потенциала и фазы параметра порядка.

Проанализируем эти распределения в зависимости от физических параметров. В задаче с одной гранулой есть три характерных пространственных масштаба. Это величины  $\lambda_{Pi} = \lambda_i^2/d$  и  $\lambda_{Pe} = \lambda_e^2/d$ , а также размер гранулы. Из них можно составить два безразмерных параметра:  $\kappa_e$  – отношение размера гранулы к величине  $(u_e d)^{-1}$  и  $\kappa_i$  – отношение размера гранулы к  $(u_i d)^{-1}$ . В Приложении показано, что только эти параметры и влияют на решение. Это значит, что пространство параметров задачи об одной грануле является плоскостью  $(\kappa_i, \kappa_e)$ . Разобьем эту плоскость на характерные области. Очевидно, как  $\kappa_i$ , так и  $\kappa_e$  надо сравнивать с единицей. Кроме того, есть еще линия биссектрисы:  $\kappa_i = \kappa_e$ , которая соответствует тому, что лондоновские глубины матрицы и гранулы совпадают, т. е. однородной пленке.

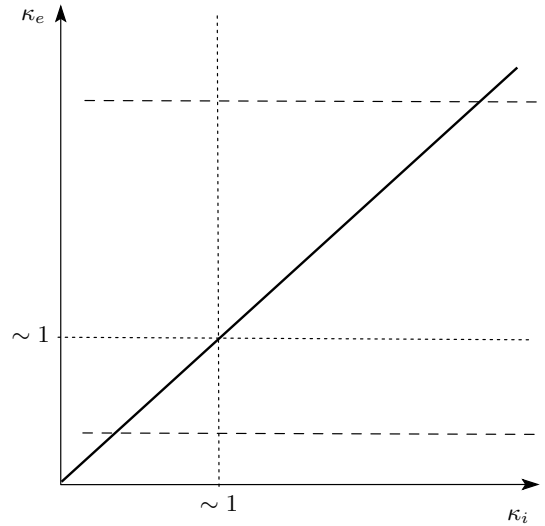


Рис. 2. Фазовая диаграмма для задачи об одной цилиндрической грануле. По оси абсцисс отложено отношение размера гранулы к  $\lambda_i^2/d$ , по оси ординат отложено отношение размера гранулы к  $\lambda_e^2/d$ . Пунктирные линии означают  $\kappa_i \sim 1$  и  $\kappa_e \sim 1$ , сплошная линия –  $\kappa_i = \kappa_e$

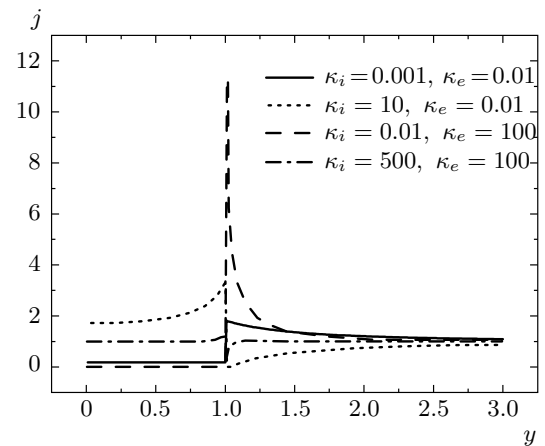


Рис. 3. Зависимость  $j_x(x = 0, y)$  для различных соотношений между размером гранулы и лондоновскими длинами гранулы и матрицы. По оси ординат отложена плотность тока, измеренная в единицах  $-(4\pi)^{-1}cu_e A_E$

В итоге фазовая плоскость разбивается на характерные области, которые показаны на рис. 2.

Построим решения для всех характерных областей фазовой диаграммы. Рассмотрим вначале случай  $\kappa_e \ll 1$ . Будем двигаться вдоль некоей линии,

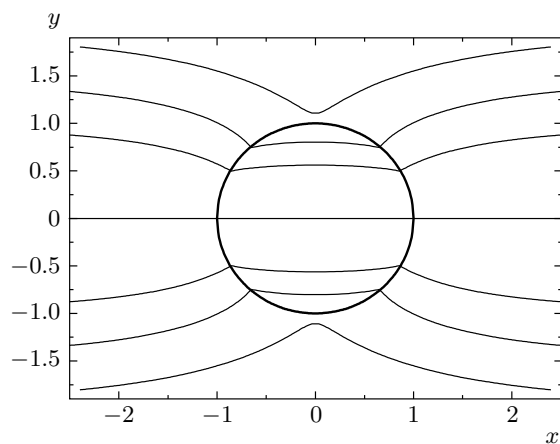


Рис. 4. Линии тока при  $\kappa_e = 0.01$ ,  $\kappa_i = 10$ . По осям отложены координаты  $x$  и  $y$ , измеренные в единицах размера гранулы  $b$

удовлетворяющей уравнению  $\kappa_e = \text{const} \ll 1$  (нижняя линия на рис. 2). Тем самым мы изучим все области фазовой диаграммы, где  $\kappa_e \ll 1$ . Начнем со случая  $\kappa_e \ll 1$ ,  $\kappa_i \ll 1$ . В этом случае размер гранулы мал по сравнению с характерными длинами в уравнении для векторного потенциала  $\lambda_e^2/d$  и  $\lambda_i^2/d$ . В этом случае внутри гранулы ток постоянен (рис. 3), а снаружи убывает, причем простой анализ графика показывает, что это убывание подчиняется закону  $1 + \text{const}/r^2$ . Такое же распределение тока получилось бы в двумерной «токостатической» задаче, определяемой уравнениями

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{j} &= 0, \\ \mathbf{j} &= u(\mathbf{r})\nabla\theta. \end{aligned}$$

Таким образом, вблизи маленьких гранул реализуется потенциальный закон обтекания, когда ток определяется лишь градиентом фазы параметра порядка, поэтому в формуле (25) можно пренебречь влиянием векторного потенциала и она превращается в известную формулу для диэлектрической проницаемости смеси:

$$u_{eff} = u_2 + p \frac{2u_2(u_1 - u_2)}{u_1 + u_2}.$$

Начнем увеличивать  $\kappa_i$  при постоянном  $\kappa_e$ . Это соответствует увеличению линейной восприимчивости гранулы при постоянном размере гранулы и линейной восприимчивости матрицы. В момент, когда восприимчивость гранулы превысит восприимчивость матрицы, гранула начнет затягивать в себя

ток. При этом распределение тока будет продолжать носить токостатический характер, поскольку  $\kappa_i = \kappa_e$  все еще много меньше единицы. Продолжим увеличивать восприимчивость гранулы. Когда  $\kappa_i$  станет порядка единицы, ток в грануле перестанет быть однородным, он начнет прижиматься к краю гранулы (рис. 4). Видно, что снаружи от гранул линии тока носят потенциальный характер, тогда как внутри гранулы линии тока начинают прижиматься к ее границе, т. е. появляется скин-эффект. Это вполне аналогично обычному рассеянию электромагнитной волны на металлическом шарике. Пока размеры шарика малы по сравнению с глубиной скин-слоя, распределение тока в нем потенциально и определяется токостатическими уравнениями, когда размеры шарика велики, существен скин-эффект. Таким образом, можно сказать, что есть два типа линий тока: потенциальные, т. е. те, которые могут быть получены при решении токостатических уравнений, и скинированные, похожие на решения уравнений при учете скин-эффекта. Получается, что при  $\kappa_e \ll 1$  распределение тока снаружи гранулы всегда носит потенциальный характер, тогда как распределение внутри гранулы при  $\kappa_i \ll 1$  потенциальное, а при  $\kappa_i \gg 1$  — скинированное.

Рассмотрим теперь решения при  $\kappa_e \gg 1$ . При малых  $\kappa_i$  анализ показывает, что снаружи от гранулы распределение тока носит скинирующий характер, тогда как внутри — потенциальный. Наконец, при  $\kappa_e \gg 1$  и  $\kappa_i \gg 1$  распределения как внутри, так и вне будут скинированными (рис. 3). В этом случае отметим, что если отойти от границы гранулы на расстояние, много большее глубины скин-слоя, то ток становится однородным, причем величина его равна единице как снаружи, так и внутри гранулы.

Таким образом, мы получили и проанализировали решения задачи об одной аксиально симметричной грануле на всем пространстве параметров. Подводя итоги, можно сказать, что возможны два типа распределения тока — потенциальное и скинированное. При этом тип распределения тока внутри гранулы определяется только  $\kappa_i$ , а тип распределения тока в матрице определяется только  $\kappa_e$ .

Таким образом, мы знаем решение системы (16), (19) в линейном приближении. При дальнейшем нахождении нелинейных поправок это решение будет являться нулевым приближением.

#### 4. НАХОЖДЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ПОПРАВКИ И ЭФФЕКТИВНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ВОСПРИИМЧИВОСТИ

Для определения эффективной нелинейной восприимчивости вернемся к исходной системе уравнений (16), (19). Мы ищем решение этой системы по теории возмущений, считая нелинейные члены  $v(\mathbf{r})(\mathbf{A} - \mathbf{S})^3$  малыми. Решение ищется в виде ряда

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_1^l + \mathbf{A}_1^{nl} + \dots, \quad (26)$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}^l + \mathbf{S}^{nl} + \dots \quad (27)$$

В предыдущей главе мы нашли первое слагаемое в этих рядах, т. е. полностью пренебрегли членами вида  $v(\mathbf{r})(\mathbf{A} - \mathbf{S})^3$ . Для нахождения эффективной нелинейности следует найти поправки, возникающие при учете этих членов. Подставляя решение (26) и (27) в уравнения (16) и (19), получим для  $\mathbf{A}_1^{nl}$  и  $\mathbf{S}^{nl}$  следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1^{nl} = \int G \{ & -\alpha(\mathbf{r}')\mathbf{A}_1^{nl} + u(\mathbf{r}')\mathbf{S}^{nl} + \\ & + v(\mathbf{r}')(\mathbf{A}_E + \mathbf{A}_1^l - \mathbf{S}^l)^3 \} d^2\mathbf{r}', \quad (28) \end{aligned}$$

$$\text{div}_2 \{ u(\mathbf{r})(\mathbf{A}_1^{nl} - \mathbf{S}^{nl}) - v(\mathbf{r})(\mathbf{A}_E + \mathbf{A}_1^l - \mathbf{S}^l)^3 \} = 0. \quad (29)$$

Величины  $\mathbf{A}_1^l$  и  $\mathbf{S}^l$ , которые мы знаем из предыдущего раздела, являются источниками в этих уравнениях. Приступим к решению нелинейной системы. Прежде всего заметим, что зависимость коэффициентов этой линейной системы от координат повторяет координатную зависимость коэффициентов системы нулевого приближения, т. е.  $u(\mathbf{r})$  и  $v(\mathbf{r})$  равны соответственно  $u_i$  и  $v_i$  внутри гранул и  $u_e$  и  $v_e$  снаружи. Это значит, что рассуждения, примененные для решения линейной задачи со многими гранулами, справедливы и для системы (28), (29). Поэтому достаточно решить нелинейную задачу об одной грануле, а решение многогранульной задачи строится по формулам вида (21), (22).

Нелинейная задача с одной гранулой решается по методике, аналогичной решению линейной задачи с одной гранулой. При этом, поскольку в источники уравнений (28), (29) входит величина  $(\mathbf{A}_E + \mathbf{A}_1^l - \mathbf{S}^l)$ , возведенная в куб, в решении будут не только нулевая и вторая гармоники по полярному углу  $\phi$ , определяющие дипольный вклад, но и четвертая, соответствующая квадрупольному члену. Это приводит к большой громоздкости вычислений,

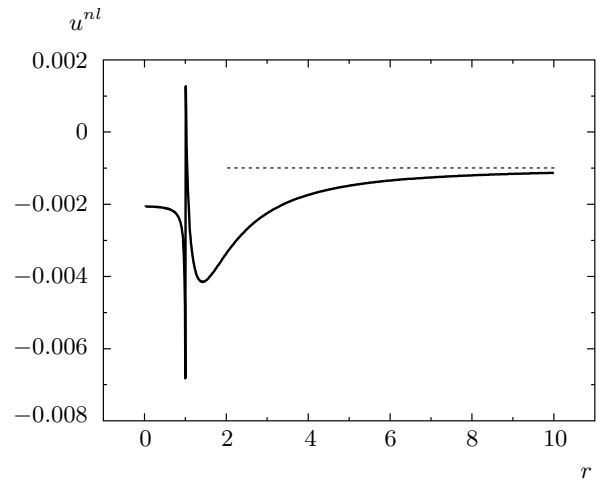


Рис. 5. Зависимость проекции вектора  $u(\mathbf{A}^{nl} - \mathbf{S}^{nl})$  на ось  $x$  от  $y$  при  $x = 0$ . По оси абсцисс отложено расстояние в единицах размера гранулы. По оси ординат отложено  $u(A_x^{nl} - S_x^{nl})$  в единицах  $u_e A_E$ . График построен при  $\kappa_e = 100$ ,  $\kappa_i = 0.8\kappa_e$ ,  $v_i = v_e = 0.001u_e/A_E^2$ . Пунктирной линией нарисована та же величина, но в случае  $u_i = u_e$  — однородной пленки без гранулы

и мы их приводить не будем. Заметим только, что логика вычислений полностью идентична логике расчета в линейной задаче.

При анализе получающихся результатов будем считать, что нелинейности гранул и матрицы совпадают, т. е.  $v_i = v_e$ . Проведенный анализ показал, что при  $v_i \neq v_e$  не появляется каких-либо существенных особенностей. Начнем с простейшего случая однородной пленки, когда  $u_i = u_e$ . В этом случае  $\mathbf{A}_1^l = 0$ , поэтому  $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_1^{nl}$ . Система (28), (29) решается в этом случае точно и получается, что  $\mathbf{A}_1^{nl} = v/u_i$  (где  $v$  измеряется в единицах  $u_e/A_E^2$ ). Поэтому для выполнения условий применимости теории возмущений должно быть  $v_i/u_i \ll 1$  или в размерных единицах  $v_i A_E^2/u_i \ll 1$ . Рассмотрим теперь случай, когда линейные восприимчивости гранулы и матрицы не совпадают. График зависимости нелинейной поправки от координаты для случая  $u_i = 0.8u_e$  приведен на рис. 5. Видно, что величина  $u(A_x^{nl} - S_x^{nl})$  имеет резкие экстремумы вблизи границы гранулы, а на больших расстояниях совпадает с поправкой в однородном случае.

Детальное изучение нелинейных поправок не обнаруживает каких-либо качественных особенностей, поэтому мы сразу приведем ответ для эффективной нелинейной восприимчивости:



$$v_{eff} = v_e + p(v_i - v_e) + p \frac{v_e}{u_e} \sum_{k=i,e} u_k (N_1)_k + p \sum_{k=i,e} v_k (N_2)_k - pv_e N_3 - 3pv_e L, \quad (30)$$

где  $(N_1)_{i,e}, (N_2)_{i,e}, N_3$  — формфакторы, определяемые нелинейными поправками в задаче с одной гранулой,  $L$  — формфактор, определяемый решением линейной задачи об одной грануле.

Проанализируем полученные ответы. Из выражения для линейной восприимчивости (25) видно, что средняя линейная восприимчивость может принимать значения только из интервала между  $u_i$  и  $u_e$ , каким бы ни был формфактор  $A$ . Для нелинейной же восприимчивости таких ограничений нет, она может принимать любые значения в зависимости от формфакторов, входящих в формулу (30). Рассчитаем нелинейную восприимчивость (30) для всего диапазона физических параметров. Пусть, как и прежде,  $v_i = v_e = v$ . Начнем со случая  $u_i = u_e$ , т.е. равенства проводимостей. Это соответствует случаю однородной пленки, поэтому очевидно, что  $v_{eff} = v$ . Теперь изучим, что будет происходить, если проводимость гранулы не равна проводимости матрицы. Результаты для различных размеров гранул приведены на рис. 6. Видно, что эффективная нелинейность сильно растет при увеличении размера гранулы и уменьшении ее линейной восприимчивости. В случае же, когда проводимость гранулы больше проводимости матрицы, эффективная нелинейность практически равна  $v$  (чуть меньше, как видно из численного расчета). Таким образом, для достижения большой нелинейности необходимо, чтобы линейная восприимчивость гранул была бы меньше линейной восприимчивости матрицы. Зависимость эффективной нелинейности от размера гранулы для случая  $u_i = 0.01u_e$  приведена на рис. 7.

Эффект сильного (в разы) нарастания эффективной нелинейности при увеличении размера гранул связан с характером обтекания током гранул. В случае, когда гранулы маленькие, обтекание носит потенциальный характер, ток внутри гранулы практически однороден и нет резких неоднородностей в его распределении. В случае же больших гранул ток прижимается к границе гранулы и достигает вблизи нее больших величин. При расчете нелинейных формфакторов эта большая величина, будучи возведенной в куб, дает непропорционально большой вклад в среднее, что и приводит к большой величине эффективного коэффициента нелинейности.

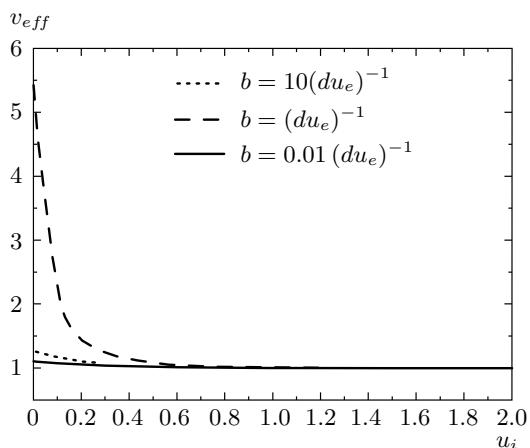


Рис. 6. Зависимость эффективной нелинейности от проводимости гранулы при различных размерах гранулы. По оси абсцисс отложена проводимость гранулы в единицах проводимости матрицы, по оси ординат отложена эффективная нелинейность в единицах  $v = v_i = v_e$

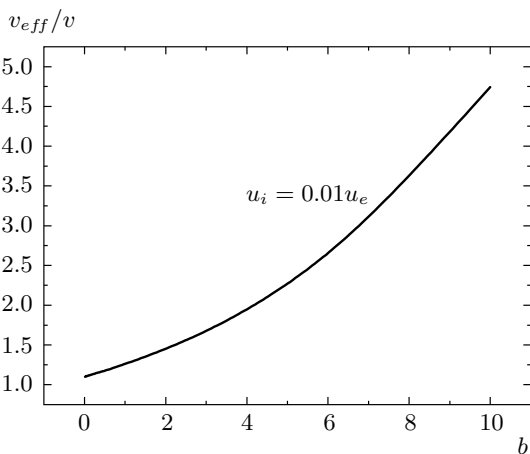


Рис. 7. Зависимость эффективной нелинейности от размера гранулы. По оси абсцисс отложен размер гранулы в единицах эффективной длины в матрице  $(u_e d)^{-1}$ , по оси ординат отложена эффективная нелинейность в единицах  $v = v_i = v_e$

### 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Используя приближение Максвелла–Гарнетта, нам удалось найти распределение электромагнитных полей и токов в задаче о тонкой гранулированной сверхпроводящей пленке. На основе полученного решения найдены эффективные линейная и нелинейная восприимчивости. Оказалось, что эффектив-

ная линейная восприимчивость, которая есть просто обратная лондоновская глубина в квадрате, всегда удовлетворяет соотношению

$$\min(u_i, u_e) \ll u_{eff} \ll \max(u_i, u_e).$$

Для нелинейной же восприимчивости такого ограничения нет, она может быть любой. Рисунок 7 демонстрирует, что эффективная нелинейность может в разы превышать нелинейности каждой из компонент. Для достижения этого необходимо делать большие по сравнению с характерной длиной  $\lambda_e^2/d$  гранулы с лондоновской глубиной, большей чем лондоновская глубина матрицы. На рис. 7 видно, что чем больше размер гранул, тем больше нелинейность. Аналогичная зависимость эффективной нелинейности от размера неоднородностей была измерена в работе [32], в которой экспериментально изучалась зависимость нелинейного отклика на третьей гармонике подаваемого поля от размера гранул.

Обсудим возможные обобщения построенной нами теории. Поскольку в нормальном состоянии ВТСП являются металлами, интересно было бы учесть нормальный ток, рассмотрев сверхпроводник в рамках двухжидкостной модели. Поскольку при построении теории мы решали только линейные уравнения, такое обобщение легко провести на основе метода комплексных амплитуд. Весьма привлекательным представляется рассмотрение задачи при наличии постоянного магнитного поля. В случае гранулированной среды экранирующий ток, связанный с этим постоянным полем, будет концентрироваться вблизи гранул, из-за чего коэффициент нелинейности может быть больше по сравнению со случаем отсутствия поля. Интересна проблема об оптимизации формы гранул для достижения наибольшей эффективной нелинейности. Мы увидели, что рост нелинейности связан с увеличением концентрации тока. Если сделать гранулы не круглыми, а более сложной формы, то можно еще повысить концентрацию тока, и тем самым, увеличить нелинейность.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 06-02-16592-а) и в рамках программ РАН «Нелинейная динамика», «Квантовая макрофизика», «Проблемы радиофизики».

## ПРИЛОЖЕНИЕ

В случае, когда есть одна аксиально симметричная гранула, линеаризованная система (16), (19) может быть существенно упрощена.

Действительно, при постоянном  $\mathbf{A}_E$  задача об одной круглой грануле обладает определенной симметрией. Именно, все векторные величины как функции координат должны удовлетворять следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} A_x(x, -y) &= A_x(x, y), & A_x(-x, y) &= A_x(x, y), \\ A_y(x, -y) &= -A_y(x, y), & & \\ A_y(-x, y) &= -A_y(x, y), & & \end{aligned} \quad (31)$$

где начало координат взято в центре гранулы, а ось  $x$  направлена вдоль внешнего поля  $\mathbf{A}_E$ . Введем полярные координаты  $(r, \phi)$  на плоскости  $(x, y)$ , причем полярный угол  $\phi$  будем отсчитывать от направления  $x$ . Будем искать решение для векторного потенциала в виде разложения в ряд Фурье по переменной  $\phi$ . Тогда из соотношений (31) ясно, что  $A_x$  раскладывается в ряд по косинусам, а  $A_y$  раскладывается в ряд по синусам, причем в этих разложениях присутствуют только четные гармоники.

Запишем уравнения в безразмерном виде. Будем измерять векторный потенциал и градиент фазы параметра порядка  $\mathbf{S}$  в единицах внешнего потенциала  $\mathbf{A}_E$ , а длину в единицах размера гранул  $b$ . Все дальнейшие соотношения будем писать для новых, безразмерных величин.

Для дальнейшего продвижения предположим, что границы гранул являются резкими. В этом случае характерным масштабом изменения полей может быть либо величина  $(ud)^{-1}$ , совпадающая с эффективной глубиной проникновения в пленку  $\lambda^2/d$  [31], либо размер гранул  $b$ . Предположение о резких границах будет самосогласованным, если характерный масштаб изменения линейной восприимчивости  $L$  много меньше этих величин. Тогда, учитывая требование к формуле (7), для  $L$  находим условие

$$\xi \ll L \ll \min\{(ud)^{-1}, b\}.$$

В случае резких границ гранул уравнение (19) перейдет в

$$\Delta_2 \theta = 0 \quad (32)$$

внутри и вне гранулы и условие непрерывности на границе нормальной компоненты вектора

$$u(\mathbf{r})(\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_E - \mathbf{S}) \quad (33)$$

и фазы параметра порядка  $\theta$ . Чтобы решить уравнение (32) с граничным условием (33), необходимо знать  $\mathbf{A}_1$ , но  $\mathbf{A}_1$  само является неизвестной величиной. Предугадаем вид  $\mathbf{A}_1$  исходя из следующего наблюдения. Если бы вектор  $\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_E$  был постоянным в пространстве вектором, то уравнение (32) с

граничным условием (33) немедленно решилось бы. При этом  $S_x$  и  $S_y$  содержали бы только нулевую и вторую гармоники по  $\phi$ , умноженные на определенные функции от координат. Предположим, что все векторы в задаче имеют такую структуру, и будем искать для  $\mathbf{A}_1$  решение в виде

$$\begin{aligned} A_{1x}(r, \phi) &= f_0(r) + f_2(r) \cos 2\phi, \\ A_{1y}(r, \phi) &= f_2(r) \sin 2\phi, \end{aligned} \quad (34)$$

где  $f_0(r)$  и  $f_2(r)$  — некие неизвестные функции. Это предположение позволяет решить задачу (32), (33). В граничное условие (33) входит нормальная к граниле компонента векторного потенциала. Она совпадает с проекцией на направление  $r$  и равна

$$A_n = A_r = A_{Er} + A_{1r} = (1 + f_0(1) + f_2(1)) \cos \phi. \quad (35)$$

Таким образом, вместо неизвестного векторного поля  $\mathbf{A}_1$  в граничное условие входят только неизвестные скалярные параметры  $f_0(1)$  и  $f_2(1)$ , и задача решается. Для фазы параметра порядка получим

$$\theta_i = \frac{2\pi A_E b}{\Phi_0}(\mathbf{P}, \mathbf{r}), \quad \theta_e = \frac{2\pi A_E b}{\Phi_0} \frac{(\mathbf{P}, \mathbf{r})}{r^2}, \quad (36)$$

где  $\theta_i$  — фаза параметра порядка внутри гранулы,  $\theta_e$  — фаза параметра порядка снаружи гранулы, а  $\mathbf{P}$  — дипольный момент гранулы,

$$\mathbf{P} = \frac{u_i - u_e}{u_i + u_e} (1 + f_0(1) + f_2(1)), \quad (37)$$

где  $u_i$  — линейная восприимчивость гранулы. Таким образом, мы нашли фазу параметра порядка, но в полученном решении есть неизвестная величина — значение  $f_0(r) + f_2(r)$  на границе гранулы.

Теперь подставим полученное решение для  $\mathbf{S}$  в уравнение для  $\mathbf{A}_1$  (16). Нашей целью является, во-первых, доказательство правильности выбора вида решения (34) для  $\mathbf{A}_1$ , и, во-вторых, вывод уравнений для  $f_0(r)$  и  $f_2(r)$ . Спроектируем уравнение (16) на ось  $x$  и подставим в него  $S_x$ , получающееся дифференцированием по  $x$  формулы (36), и  $A_{1x}$  из (34). Получим

$$\begin{aligned} f_0(r) + f_2(r) \cos 2\phi &= \int G(r, \phi, r', \phi') \times \\ &\times \{ -\alpha(r')(1 + f_0(r') + f_2(r') \cos 2\phi') + \\ &+ u(r') S_x(r', \phi') \} r' dr' d\phi'. \end{aligned} \quad (38)$$

Интеграл, стоящий справа, будем вычислять как сумму интегралов от отдельных слагаемых, входящих в подынтегральное выражение. Все они имеют вид  $\int G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') t(\mathbf{r}') ds'$ , где  $t(\mathbf{r}')$  — некая функция.

Нетрудно видеть, что функция Грина  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ , определяемая формулой (17), является функцией от комбинации  $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ , поэтому интегралы являются свертками функций  $G$  и  $t$ . Поэтому

$$\int G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') t(\mathbf{r}') ds' = \int G_{\mathbf{q}} t_{\mathbf{q}} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \frac{d^2\mathbf{q}}{(2\pi)^2}, \quad (39)$$

где  $t_{\mathbf{q}}$  и  $G_{\mathbf{q}}$  — фурье-образы  $t$  и  $G$ . Из формулы (17) следует, что

$$G_{\mathbf{q}} = \frac{d}{2q + u_e d}. \quad (40)$$

Таким образом, для вычисления интегралов нам необходимо находить  $t_{\mathbf{q}}$  в каждом конкретном случае, а затем пользоваться формулой (39). Проводя необходимые вычисления по формуле (39), можно показать, что для  $t(\mathbf{r}')$  вида  $g_0(r) + g_2(r) \cos 2\phi$  после интегрирования получится выражение вида  $G_0(r) + G_2(r) \cos 2\phi$ , где  $g_0, g_2, G_0$  и  $G_2$  — функции  $r$ , т. е. зависимость от угла  $\phi$  не меняется при интегрировании. Тогда, приравнявая коэффициенты перед  $\cos 0\phi$  и  $\cos 2\phi$  в уравнении (38), можно получить искомые уравнения для  $f_0(r)$  и  $f_2(r)$ . Уравнение для  $f_0$  имеет вид

$$f_0(r) = (-\Delta\kappa + \kappa_i P) \gamma_0(r) - \Delta\kappa L_0 f_0, \quad (41)$$

где  $\kappa_e = u_e db$  — безразмерный параметр, равный отношению размера гранулы к  $\lambda_e^2/d$ ,  $\kappa_i = u_i db$ ,  $\Delta\kappa = \kappa_i - \kappa_e$ , линейный оператор  $L_0$  определяется выражением

$$L_0 \psi = \int_0^1 H_0(r, r') \psi(r') dr', \quad (42)$$

$$H_0(r, r') = \int_0^\infty \frac{qr' J_0(qr') J_0(qr)}{2q + \kappa_e} dq, \quad (43)$$

свободный член  $\gamma_0$  имеет вид

$$\gamma_0(r) = \int_0^\infty \frac{J_1(qr_0) J_0(qr)}{2q + \kappa_e} dq. \quad (44)$$

Уравнение для второй неизвестной функции  $f_2$  находить не будем, поскольку  $f_2(r)$  однозначно связана с  $f_0(r)$  соотношением  $\text{div } \mathbf{A}_1 = 0$ , откуда

$$f_2(r) = \frac{2}{r^2} \int_0^r (f_0(r') - f_0(r)) r' dr'. \quad (45)$$

Уравнение (41) является интегральным уравнением для одной скалярной функции от одного скалярного аргумента. Заметим, что в него входит дипольный момент гранулы  $P$ , который сам является функционалом, зависящим от значения  $f_0$  на границе гранулы. Мы обойдем это затруднение следующим образом. Пусть  $f^*(r)$  — решение вспомогательного уравнения

$$f^*(r) = \gamma_0(r) - \Delta\kappa L_0 f^*. \quad (46)$$

Тогда решением уравнения  $f^*(r) = B\gamma_0(r) - \Delta\kappa L_0 f^*$ , где  $B$  — константа, будет  $Bf^*(r)$ . Поэтому решением уравнения (41) будет

$$f_0(r) = (-\Delta\kappa + \kappa_1 P) f^*(r), \quad (47)$$

а величина  $f^*(r)$  может быть однозначно найдена из уравнения (46).

Для полного замыкания задачи необходимо составить уравнение самосогласования для величины  $f_0(1)$ , которое получается из соотношения (47), взятого при  $r = 1$ :

$$f_0(1) = (-\Delta\kappa + \kappa_1(1 + f_0(1) + f_2(1))) f^*(r). \quad (48)$$

Решая его, найдем  $f_0(1)$ , а затем и дипольный момент в виде

$$P = \mu \left( 1 - 2\Delta\kappa \int_0^1 f^*(r) r dr \right) \times \left( 1 - 2\mu\kappa_1 \int_0^1 f^*(r) r dr \right)^{-1}, \quad (49)$$

где

$$\mu = \frac{u_i - u_e}{u_i + u_e}.$$

Итак, задача свелась к поиску  $f^*(r)$  — решения уравнения (46). Это уравнение не может быть решено аналитически, однако хорошо решается численно. Для численного решения его следует преобразовать. Дело в том, что (46) является интегральным уравнением с сингулярным при  $r = r'$  ядром. Поэтому мы, умножив это уравнение на  $rJ_0(q''r)$  и проинтегрировав по  $r$  от 0 до 1, получим новое интегральное уравнение

$$c_q = p_q - \Delta\kappa \int_0^\infty \frac{q'}{2q' + \kappa_e} H_{qq'} c_{q'} dq' \quad (50)$$

с конечным всюду ядром

$$H_{qq'} = \frac{qJ_1(q)J_0(q') - q'J_1(q')J_0(q)}{q^2 - q'^2}. \quad (51)$$

Это уравнение решается численно методом релаксации. За счет того, что ядро всюду конечно, метод дает быструю сходимость на всем пространстве параметров. Функция  $f^*(r)$  затем может быть выражена через  $c_q$  по формуле

$$f^*(r) = \gamma_0(r) - \int_0^\infty \frac{qJ_0(qr)}{2q + \kappa_e} c_q dq. \quad (52)$$

После этого по формулам (49), (47) и (45) восстанавливаются векторный потенциал и плотность тока.

Для нахождения эффективной линейной восприимчивости следует подставить полученные решения в формулы (21), (22) и провести пространственное усреднение. В результате несложных вычислений можно получить формулу (25) с выражением для формфактора  $A$  вида

$$A = 1 + \langle f_0 \rangle_i - P,$$

где  $P$  — дипольный момент гранулы, определяемый формулой (49),

$$\langle f_0 \rangle_i = 2 \int_0^1 r f_0(r) dr, \quad (53)$$

а  $f_0(r)$  определяется формулой (47).

## ЛИТЕРАТУРА

1. L. Zhang et al., Phys. Rev. E **74**, 056615 (2006).
2. В. Г. Веселаго, УФН **92**, 517 (1967).
3. S. John, Phys. Rev. Lett. **58**, 2486 (1987).
4. E. Yablonovich, Phys. Rev. Lett. **58**, 2059 (1987).
5. S. Zouhdi et al., Phys. Rev. B **75**, 035125 (2007).
6. E. Istrate and E. H. Sargent, Rev. Mod. Phys. **78**, 455 (2006).
7. J. Pendry, Phys. Rev. Lett. **85**, 3966 (2000).
8. A. Grbic and G. Eleftheriades, Phys. Rev. Lett. **92**, 117403 (2004).
9. A. A. Zharov et al., New J. Phys. **7**, 220 (2005).
10. P. Markos and C. M. Soukoulis, Phys. Rev. B **65**, 033401 (2002).
11. C. Du et al., Phys. Rev. B **74**, 113105 (2006).

12. T. Grzegorzcyk and J. Kong, J. Electromagn. Waves Appl. **20**, 2053 (2006).
13. D. Stroud and P. M. Hui, Phys. Rev. B **37**, 8719 (1988).
14. M. I. Stockman et al., Phys. Rev. B **60**, 17071 (1999).
15. V. M. Shalaev and A. K. Sarychev, Phys. Rev. B **57**, 13265 (1998).
16. J. E. Sipe and R. W. Boyd, Phys. Rev. A **46**, 1614 (1992).
17. А. Ю. Аладышкин и др., Радиофизика т. XLVI, 123 (2003).
18. T. Dahm and D. J. Scalapino, J. Appl. Phys. **82**, 464 (1997).
19. S. Anlage et al., J. Superconduct. **12**, 353 (1998).
20. Catalin D. Mitescu, Rev. Mod. Phys. **36**, 305 (1964).
21. Н. М. Плакида, *Высокотемпературные сверхпроводники*, Международная программа образования, Москва (1996).
22. Э. Б. Сонин, Письма в ЖЭТФ **47**, 415 (1988).
23. W. Xia and P. L. Leath, Phys. Rev. Lett. **63**, 1428 (1989).
24. A. Gurevich and V. M. Vinokur, Phys. Rev. Lett. **83**, 3037 (1999).
25. J. I. Gittleman and B. Rosenblum, Phys. Rev. Lett. **16**, 734 (1968).
26. J. C. Maxwell-Garnett, Philos. Trans. R. Soc. London, Ser. B **203**, 385 (1904).
27. D. Bruggeman, Ann. Phys. Lpz. **24**, 636 (1935).
28. А. М. Сатанин и др., ЖЭТФ **112**, 643 (1997).
29. S. Doettinger et al., Phys. Rev. Lett. **73**, 1691 (1994).
30. J. Pearl, Appl. Phys. Lett. **5**, 65 (1964).
31. А. А. Абрикосов, *Основы теории металлов*, гл. XVIII, Наука, Москва (1987).
32. Е. Е. Пестов и др., ФТТ **48**, 2136 (2006); С. В. Барышев и др., ЖЭТФ **132**, 278 (2007).