ЖЭТФ, 2008, том 134, вып. 1 (7), стр. 188–195 © 2008

СУБВОЛНОВЫЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ СОЛИТОНЫ В НЕОДНОРОДНЫХ КУБИЧНО-НЕЛИНЕЙНЫХ СРЕДАХ

В. А. Алешкевич[a]***, А. В. Григорьев***[a]***, А. С. Жукарев***[a]***, Я. В. Карташов***[b*]

[a] *Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова*
119899, Москва, Россия

[b] *ICFO-Institut de Ciencies Fotoniques, Mediterranean Technology Park, and Universitat Politecnica de Catalunya*
08860, Castelldefels, Barcelona, Spain

Поступила в редакцию 25 декабря 2007 г.

Проведено исследование распространения узких волновых пучков в кубично-нелинейной среде с периодической пространственной модуляцией показателя преломления при произвольном соотношении ширины пучка, периода модуляции и длины световой волны. Из уравнений Максвелла получены решения, описывающие распространение световых пучков в виде пространственных солитонов и установлены их основные свойства. Проведено сравнение полученных результатов с выводами, вытекающими из решения параксиального нелинейного уравнения Шредингера и определены условия, при которых оба подхода неадекватны друг другу.

PACS: 42.65.Tg

1. ВВЕДЕНИЕ

Одним из наиболее эффективных приближений, использующихся при анализе распространения интенсивного лазерного излучения в нелинейной среде, является параксиальное приближение (см. монографии [1–4] и ссылки в них). Оно позволяет вывести скалярное нелинейное уравнение Шредингера, описывающее эволюцию световых пучков, ширина которых существенно превосходит длину волны излучения. Данное уравнение, в частности, допускает солитонные решения, описывающие распространение пучков при взаимной компенсации дифракционного расплывания и нелинейного самовоздействия.

Однако когда ширина пучка становится сравнимой с длиной волны, параксиальное приближение становится некорректным. В частности, теория самофокусировки на основе уравнения Шредингера предсказывает коллапс излучения, что не находит убедительного экспериментального подтверждения.

Для анализа распространения непараксиальных световых пучков в нелинейной среде авторами работ [5–7] в скалярное уравнение Шредингера добавлялись несколько членов, описывающих малые непараксиальные поправки, связанные с дифракцией и нелинейностями высших порядков.

Однако наиболее последовательный и корректный анализ такой задачи может быть проведен лишь на основе решения системы уравнений Максвелла с учетом векторного взаимодействия между поперечной и продольной компонентами светового поля. Последняя в случае непараксиальных пучков уже не является пренебрежимо малой [8–14].

В цитируемых работах рассматривались лишь непараксиальные световые пучки в однородной нелинейной среде. В связи с широким использованием в современной оптике решеток показателя преломления, фотонных кристаллов и пр. становится актуальной задача исследования распространения световых пучков в средах с пространственной модуляцией показателя преломления. Хорошо известно, что уже в линейной неоднородной среде необходим учет продольной компоненты светового поля, если масштаб неоднородности становится сравнимым с длиной световой волны. Ситуация значительно усложняется в нелинейной среде, в которой одновременно происходит как линейная, так и нелинейная рефракция.

*E-mail: Yaroslav.Kartashov@icfo.es

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Для решения поставленной задачи воспользуемся системой уравнений Максвелла

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\mathbf{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad \operatorname{div}\mathbf{D} = 0, \\ \operatorname{rot}\mathbf{H} &= \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad \operatorname{div}\mathbf{H} = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

которая дополняется материальным уравнением

$$\mathbf{D} = (\varepsilon_0 + \varepsilon_{nl+mod})\mathbf{E},$$

где ε_0 описывает пространственно-однородную часть диэлектрической проницаемости изотропной среды, а ε_{nl+mod} учитывает как кубичную нелинейность керровского типа, так и модуляцию линейного показателя преломления среды.

Уравнение $\operatorname{div}\mathbf{D} = 0$ может быть записано в виде

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = -\frac{1}{\varepsilon_0}\operatorname{div}(\varepsilon_{nl+mod}\mathbf{E}). \tag{2}$$

Комбинируя это уравнение с уравнением

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E} = -(1/c^2)\,\partial^2\mathbf{D}/\partial t^2,$$

следующим из системы уравнений Максвелла, и полагая, что электрическое поле изменяется во времени по гармоническому закону $\mathbf{E} \sim \mathbf{A}\exp(-i\omega t)$, приходим к модифицированному волновому уравнению:

$$-\frac{1}{\varepsilon_0}\operatorname{grad}\operatorname{div}(\varepsilon_{nl+mod}\mathbf{A}) - \Delta\mathbf{A} = \frac{\omega^2}{c^2}(\varepsilon_0 + \varepsilon_{nl+mod})\mathbf{A}. \tag{3}$$

Здесь $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$ — полный трехмерный лапласиан. В дальнейшем мы предполагаем, что световой пучок распространяется в направлении оси z, а напряженность электрического поля зависит лишь от одной поперечной координаты x, вдоль которой осуществлена периодическая модуляция диэлектрической проницаемости. Тогда, представив вектор напряженности светового поля в виде

$$\mathbf{A} = \mathbf{e}_x A_x(x,z) + \mathbf{e}_z A_z(x,z),$$

где $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_z$ — единичные векторы вдоль соответствующих осей, $A_{x,z}$ — соответствующие компоненты амплитуды светового поля, и подставив в уравнение (3), получим систему уравнений:

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{\varepsilon_0}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\varepsilon_{nl+mod}A_x) + \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial z}(\varepsilon_{nl+mod}A_z)\right] - \Delta A_x = \frac{\omega^2}{c^2}(\varepsilon_0 A_x + \varepsilon_{nl+mod}A_x), \\ &-\frac{1}{\varepsilon_0}\left[\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial z}(\varepsilon_{nl+mod}A_x) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}(\varepsilon_{nl+mod}A_z)\right] - \Delta A_z = \frac{\omega^2}{c^2}(\varepsilon_0 A_z + \varepsilon_{nl+mod}A_z), \end{aligned} \tag{4}$$

где

$$\varepsilon_{nl+mod} = \varepsilon_2(|A_x|^2 + |A_z|^2) + \varepsilon_{mod}R(x),$$

ε_2 — нелинейный коэффициент, ε_{mod} — глубина модуляции диэлектрической проницаемости, функция $R(x) = \cos(2\pi x/d) = \cos(\Omega_0 x)$, d и Ω_0 — соответственно период и частота пространственной модуляции. Надо отметить, что используемое нами выражение для нелинейной добавки к диэлектрической проницаемости изотропной среды оправдано, если вектор напряженности электрического поля не изменяет направление (в общем случае необходим учет нелинейных поляризационных эффектов).

Данную систему уравнений удобно переписать в безразмерном виде:

$$\begin{aligned} &-\left\{\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\left[pRq_x + \sigma q_x\left(|q_x|^2 + |q_z|^2\right)\right] + \delta\frac{\partial^2}{\partial\eta\,\partial\xi}\left[pRq_z + \sigma q_z\left(|q_x|^2 + |q_z|^2\right)\right]\right\} = \\ &= \frac{\partial^2 q_x}{\partial\eta^2} + \delta^2\frac{\partial^2 q_x}{\partial\xi^2} + \frac{1}{\delta^2}q_x + \frac{1}{\delta^2}\left[pRq_x + \sigma q_x\left(|q_x|^2 + |q_z|^2\right)\right], \\ &-\left\{\delta\frac{\partial^2}{\partial\eta\,\partial\xi}\left[pRq_x + \sigma q_x\left(|q_x|^2 + |q_z|^2\right)\right] + \delta^2\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\left[pRq_z + \sigma q_z\left(|q_x|^2 + |q_z|^2\right)\right]\right\} = \\ &= \frac{\partial^2 q_z}{\partial\eta^2} + \delta^2\frac{\partial^2 q_z}{\partial\xi^2} + \frac{1}{\delta^2}q_z + \frac{1}{\delta^2}\left[pRq_z + \sigma q_z\left(|q_x|^2 + |q_z|^2\right)\right]. \end{aligned} \tag{5}$$

Здесь поперечная координата $\eta = x/x_0$ нормирована на характерную ширину x_0; продольная координата $\xi = z/L_{dif}$ нормирована на соответствующую дифракционную длину $L_{dif} = k_0 x_0^2$; $k_0 = \omega\varepsilon_0^{1/2}/c$ —

волновое число; $\delta = 1/k_0x_0$ — параметр непараксиальности, который характеризует соотношение длины волны и ширины x_0; $q_{x,z} = A_{x,z}A_0^{-1}$ — компоненты безразмерной амплитуды светового поля; A_0 — характерная амплитуда светового поля; параметр $\sigma = \varepsilon_2 A_0^2/\varepsilon_0$ определяет степень нелинейности отклика среды; $p = \varepsilon_{mod}/\varepsilon_0$ — параметр, характеризующий глубину модуляции показателя преломления; $R(\eta) = \cos(\Omega\eta)$, где $\Omega = \Omega_0 x_0$ — безразмерная пространственная частота.

Как показывают оценки, аналогичные проведенным в работах [8–14], в однородной среде или в случае большого периода модуляции ($d \gg x_0$) величина продольной компоненты поля

$$q_z \approx \frac{i}{k_0}\frac{\partial q_x}{\partial x} \tag{6}$$

или, что эквивалентно, $q_z/q_x \sim \delta$.

В среде с пространственной модуляцией диэлектрической проницаемости, когда $d \le x_0$, оценка (6) становится некорректной. Действительно, в случае поляризованной в плоскости xz плоской волны из уравнения $\operatorname{div}\mathbf{D} = 0$ получается оценка $\partial A_x/\partial x \sim A_x\varepsilon_{mod}/\varepsilon_0 d$. При ее подстановке в (6) получаем $q_z/q_x \sim \varepsilon_{mod}\lambda/2\pi\varepsilon_0 d$.

С другой стороны, появление продольной компоненты поля связано с наличием в уравнении (3) первого слагаемого в левой части, которое в среде с модуляцией диэлектрической проницаемости по порядку величины в $\lambda\varepsilon_{mod}/\varepsilon_0 d$ раз больше второго. Соответственно, и $q_z/q_x \sim \varepsilon_{mod}\lambda/\varepsilon_0 d$, что отличается множителем $1/2\pi$ от оценки (6).

В общем случае пучка произвольной ширины и среды с произвольным периодом модуляции диэлектрической проницаемости для продольной компоненты светового поля справедлива обобщенная оценка

$$\frac{q_z}{q_x} \sim \max\left(\frac{\lambda\varepsilon_{mod}}{\varepsilon_0 d}, \frac{\lambda}{2\pi x_0}\right) = \max(\Omega\delta p, \delta). \tag{7}$$

3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Будем искать решение системы уравнений (5) в виде

$$\begin{aligned} q_x(\eta,\xi) &= w_x(\eta)\exp\left[i(1+b)\xi/\delta^2\right], \\ q_z(\eta,\xi) &= iw_z(\eta)\exp\left[i(1+b)\xi/\delta^2\right], \end{aligned} \tag{8}$$

где $w_{x,z}$ — действительные функции, описывающие поперечные распределения светового поля, b — постоянная распространения, характеризующая нелинейный фазовый набег, приобретаемый световым пучком при распространении в среде. Фазовый сдвиг, равный $\pi/2$, между компонентами q_x и q_z согласуется с оценочным выражением (6), полученным в параксиальном приближении. Из оценки (6) следует, что для симметричного профиля x-компоненты поля профиль z-компоненты будет антисимметричным.

Профили непараксиальных солитонов определялись численно, с помощью метода релаксации. Параметр нелинейности положим равным $\sigma = 0.01$. Последние исследования показали, что некоторые из материалов позволяют достичь значительно больших нелинейных добавок к диэлектрической проницаемости, вплоть до $\sigma = \varepsilon_2 A_0^2/\varepsilon_0 = 0.1$ [15, 16]. В процессе вычислений варьировались параметры δ, p, Ω, b.

Характерные профили фундаментальных непараксиальных решеточных солитонов (в среде с решеткой показателя преломления) представлены на рис. 1*а–в*. Видно, что поперечная компонента поля является симметричной, в то время как продольная компонента всегда антисимметрична относительно оси пучка.

В том случае, когда постоянная распространения, уменьшаясь, приближается к определенной отсечке (эта отсечка зависит только от частоты решетки, ее профиля, и глубины), солитон становится очень широким, и его профиль приобретает множественные осцилляции (рис. 1*а*). Положение каждого из локальных максимумов поперечной компоненты поля приблизительно совпадает с положениями локальных максимумов решетки показателя преломления, в то время как продольная компонента поля, как правило, обращается в нуль в этой точке.

Наоборот, увеличение постоянной распространения приводит к пространственной локализации обеих компонент светового поля (рис. 1*б*), и затем поле практически полностью концентрируется в одном канале решетки (рис. 1*в*), так что пространственные осцилляции профиля становятся неразличимыми. Амплитуда продольной компоненты поля существенно возрастает, а ширина солитона уменьшается. В последнем случае (рис. 1*в*) нелинейные эффекты доминируют над «решеточными», поэтому решеточный солитон становится похожим на непараксиальный солитон в однородной среде.

Для сравнения на рис. 2 показаны профили непараксиальных солитонов в однородной среде при том же значении параметра непараксиальности δ, что и на рис. 1. Широкий солитон (рис. 2*а*) имеет весьма малую продольную компоненту поля, а его профиль

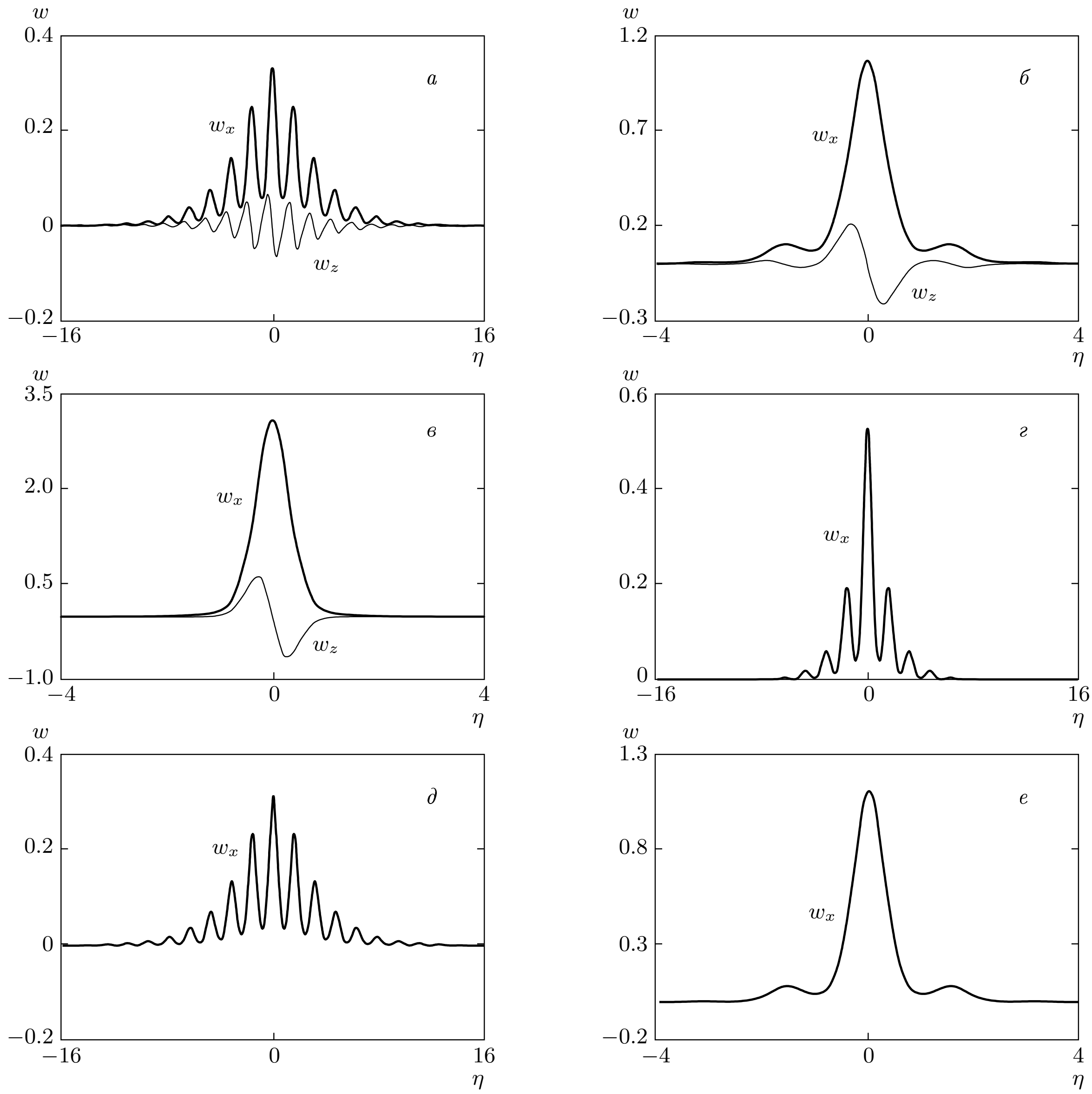

Рис. 1. Профили непараксиальных решеточных солитонов при $b = 0.0368$ (*а*), 0.04 (*б*), 0.07 (*в*). Профили параксиальных солитонов при $b = 0.0436$ (*г*), 0.04325 (*д*), 0.0469 (*е*). Солитон с рис. *г* имеет такую же мощность, как солитон с рис. *а*, в то время как солитон с рис. *д* имеет такую же ширину, как солитон с рис. *а*. Солитон с рис. *е* имеет такую же мощность, как непараксиальный солитон с рис. *б*. Параметр непараксиальности $\delta = 0.1$, глубина решетки $p = 0.2$, частота решетки $\Omega = 4$

хорошо описывается sech-функцией, как и для параксиального солитона.

Из сравнения профилей солитонов на рис. 1, 2 можно сделать два важных вывода. Во-первых, наличие сильной периодической решетки показателя преломления приводит к значительному уменьшению интегральной ширины солитона, определяемой как

$$W = \left(U^{-1} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \eta^2 (w_x^2 + w_z^2)\, d\eta \right)^{1/2}, \qquad (9)$$

где

$$U = U_x + U_z = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (w_x^2 + w_z^2)\, d\eta \qquad (10)$$

— мощность пучка. Это становится особенно за-

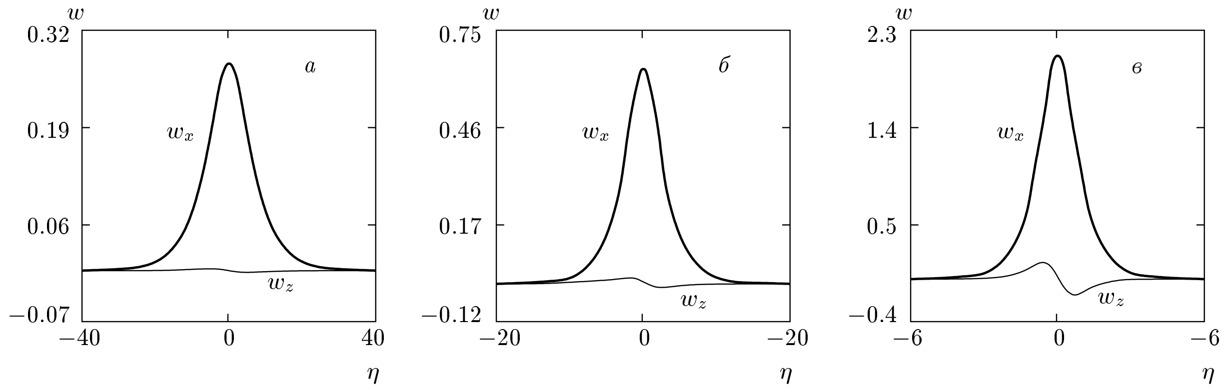

Рис. 2. Профили непараксиальных солитонов в однородной нелинейной среде, соответствующие $b = 0.00019$ (a), 0.001 ($б$), 0.01107 ($в$) при $\delta = 0.1$. Солитоны, изображенные на рис. a и $в$, соответствуют тем же значениям мощности, что и решеточные солитоны, изображенные на рис. 1$б$ и 1$в$. Солитон, показанный на рис. $б$, имеет такую же ширину, как решеточный солитон, показанный на рис. 1a

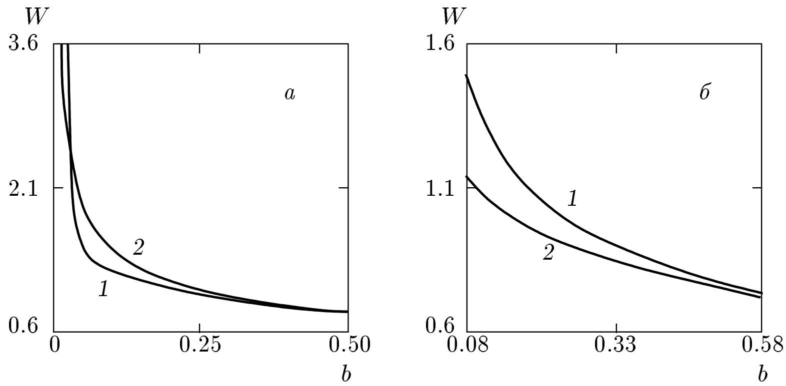

Рис. 3. Интегральная ширина солитона как функция постоянной распространения при следующих значениях: a — $p = 0.2$, $\Omega = 2$ (*1*), 16 (*2*), $б$ — $\Omega = 4$, $p = 0.2$ (*1*), 0.8 (*2*). Во всех случаях $\delta = 0.3$

метным при сравнении профилей солитонов, соответствующих одинаковым значениям мощности U. Сравнение, например, рис. 1$б$ и рис. 2a при $U = 0.783$ или рис. 1$в$ и рис. 2$в$ при $U = 6.098$ показывает, что в обоих случаях ширина солитона при наличии решетки оказывается намного меньше ширины солитона с той же мощностью в однородной среде. Во-вторых, решеточный солитон, показанный на рис. 1a, обладает существенно большей продольной компонентой поля, чем его аналог с такой же шириной в однородной нелинейной среде, изображенный на рис. 2$б$. Все это указывает на то, что условия каналирования энергии в средах с пространственной модуляцией показателя преломления оказываются предпочтительнее, чем в однородных средах.

Необходимо отметить, что для низкоамплитудных солитонов, накрывающих много периодов решетки, появление продольной компоненты обусловлено главным образом наличием решетки. В этом случае, согласно (7),

$$q_z/q_x \sim \Omega\delta p. \tag{11}$$

Наоборот, при высоких мощностях появление продольной компоненты поля в основном связано с общей сильной нелинейной локализацией светового пучка в единственном канале решетки. Поскольку в нем безразмерная ширина пучка $W < 1$, имеем

$$q_z/q_x \sim \lambda/2\pi W x_0 > \delta. \tag{12}$$

На рис. 3 показаны зависимости ширины солитона от постоянной распространения. Хорошо видно, что с увеличением b (а, значит, и мощности U) ширина пучка, уменьшаясь, стремится к определенно-

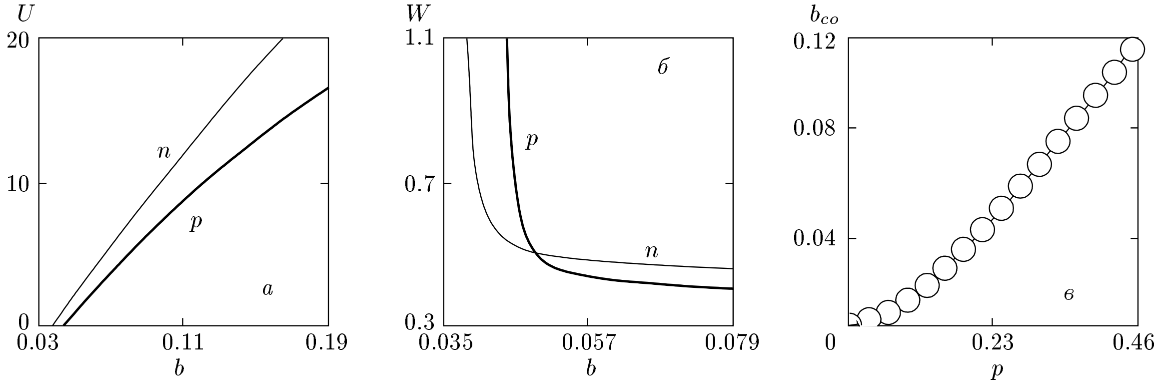

Рис. 4. Мощность (a) и интегральная ширина ($б$) солитона как функции постоянной распространения при $p = 0.2$, $\delta = 0.1$. Кривые, помеченные символом «p», получены в параксиальном приближении с помощью скалярного уравнения Шредингера; кривые, помеченные «n», вычислены с помощью системы непараксиальных уравнений (5). $в$ — Отсечка по постоянной распространения как функция глубины решетки при $\delta = 0.1$. Во всех случаях частота решетки $\Omega = 4$

му пределу, который слабо зависит как от пространственной частоты Ω (рис. 3a), так и от глубины модуляции показателя преломления p (рис. 3$б$). Это связано с тем, что при больших мощностях нелинейная рефракция доминирует над линейной и пространственная решетка оказывает слабое влияние на формирование солитона. При $\delta = 0.3$ характерная ширина $x_0 \approx \lambda/2$ (λ — длина волны в среде). С ростом постоянной распространения ширина солитона стремится к величине $W_{min} = 1/2$, что приблизительно соответствует четверти длины волны, согласно результатам, полученным в работе [10] для однородной нелинейной среды.

С практической точки зрения представляет интерес сравнить характеристики солитонов, полученных как с помощью уравнений Максвелла, так и с использованием параксиального приближения на основе нелинейного уравнения Шредингера. Это позволит установить границы области применимости широко используемого параксиального приближения к задачам распространения узких световых пучков в средах с кубичной нелинейностью.

Прежде всего отметим, что члены, сосредоточенные в левых частях уравнений (5), появляются из-за учета непараксиальных эффектов. Они становятся пренебрежимо малыми при $\delta = \lambda/2\pi x_0 \ll 1$ и для частот модуляции показателя преломления, для которых $\Omega\delta = \lambda/d \ll 1$.

При выполнении обоих неравенств система уравнений (5) может быть сведена к системе стандартных параксиальных нелинейных уравнений Шредингера заменой $q_{x,z} \sim q^s_{x,z}\exp(i\xi/\delta^2)$, где $q^s_{x,z}$ — медленно меняющиеся функции продольной координаты. Действительно, полагая левые части уравнений (5) равными нулю, затем вычисляя в правых частях величины

$$\delta^2\frac{\partial^2 q_{x,z}}{\partial\xi^2} = \left(\delta^2\frac{\partial^2 q^s_{x,z}}{\partial\xi^2} + 2i\frac{\partial q^s_{x,z}}{\partial\xi} - \frac{q^s_{x,z}}{\delta^2}\right)\exp\frac{i\xi}{\delta^2}$$

и в силу малости δ пренебрегая первым слагаемым в круглых скобках, получаем

$$\begin{gathered} 2i\frac{\partial q^s_x}{\partial\xi} + \frac{\partial^2 q^s_x}{\partial\eta^2} + \\ + \frac{1}{\delta^2}\left[pRq^s_x + \sigma q^s_x\left(|q^s_x|^2 + |q^s_z|^2\right)\right] = 0, \\ 2i\frac{\partial q^s_z}{\partial\xi} + \frac{\partial^2 q^s_z}{\partial\eta^2} + \\ + \frac{1}{\delta^2}\left[pRq^s_z + \sigma q^s_z\left(|q^s_x|^2 + |q^s_z|^2\right)\right] = 0. \end{gathered} \tag{13}$$

Теперь используем параксиальное приближение и определим профили решеточных солитонов с помощью первого уравнения (13) для поперечной компоненты электрического поля волны. Такие профили показаны на рис. 1$г$–$е$. Хорошо видно, что профиль маломощного параксиального солитона с рис. 1$г$ значительно у́же, чем профиль непараксиального солитона с рис. 1a той же мощности. В то же время, параксиальный солитон с рис. 1$д$ с такой же шириной, как у непараксиального солитона с рис. 1a, обладает меньшей мощностью. С увеличением мощности солитонов (ср. рис. 1$б$ и 1$е$) разница в их ширинах становится меньше.

Установлено, что мощность непараксиального решеточного солитона является монотонно нарастаю-

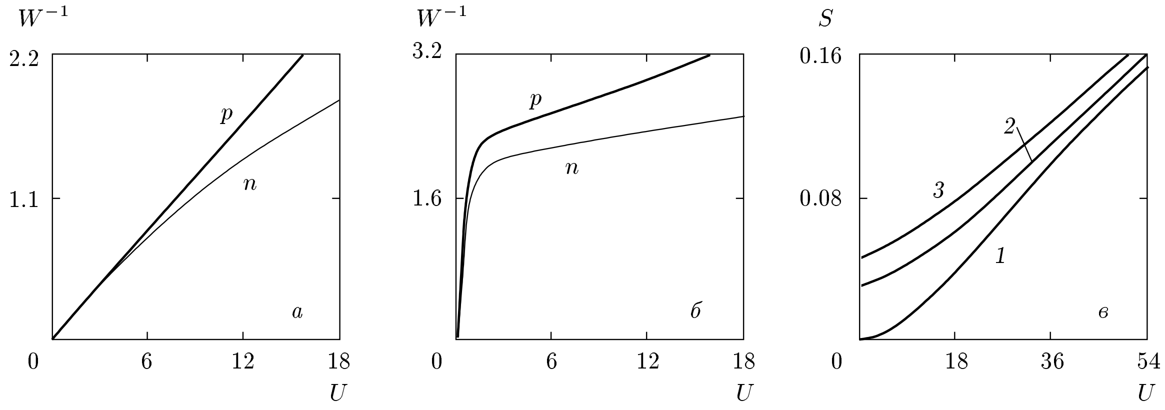

Рис. 5. Обратная ширина солитона как функция его мощности в однородной нелинейной среде (a) и при наличии периодической решетки показателя преломления с $p = 0.2$, $\Omega = 4$ ($б$). Кривые, помеченные символом «p», получены в параксиальном приближении с помощью скалярного уравнения Шредингера; кривые, помеченные символом «n», вычислены с помощью системы уравнений (5). $в$ — Отношение мощностей продольной и поперечной компонент поля как функция полной мощности для $\Omega = 0$ (*1*), 2 (*2*), 3 (*3*) при $p = 0.2$. Во всех случаях $\delta = 0.1$

щей функцией постоянной распространения b, поэтому $dU/db > 0$ (рис. 4a). Это дает основание предположить устойчивость всей ветви, хотя, разумеется, нельзя однозначно утверждать, что критерий Вахитова–Колоколова в этом случае может быть использован.

Мощность солитона обращается в нуль при значении $b = b_{co}$, называемом отсечкой по постоянной распространения. При фиксированной глубине решетки отсечка оказывается несколько меньше для непараксиальных солитонов, чем для их параксиальных решеточных аналогов (ср. кривые, помеченные «p» и «n» на рис. 4a).

Для маломощных (широких) солитонов величина W быстро уменьшается с ростом постоянной распространения b (см. рис. 3, 4$б$), при этом, как отмечалось выше, при одинаковой мощности параксиальный солитон значительно у́же непараксиального. У мощных солитонов, для которых $b \gg b_{co}$, их ширина W медленно убывает с увеличением U.

Таким образом, в области $0 < b < b_0$ (в нашем случае характерная постоянная распространения $b_0 \approx 0.05$) эти два подхода дают сильно различающиеся результаты по ширине W при приблизительно одинаковой мощности пучков. В области $b > b_0$ это различие в ширинах при одинаковом b невелико. Однако мощность непараксиального пучка заметно превышает мощность параксиального пучка вследствие появления продольной компоненты поля. Значение b_0 приблизительно вдвое превышает отсечку b_{co}. Эта величина, в свою очередь, монотонно возрастает с увеличением глубины модуляции решетки (рис. 4$в$).

Основные результаты данной работы проиллюстрированы на рис. 5, где изображены зависимости обратной ширины солитона W^{-1} от мощности U для параксиальной и непараксиальной моделей. Хорошо известно, что в отсутствие решетки ширина параксиального солитона, описываемого кубичным уравнением Шредингера, обратно пропорциональна его мощности. Поэтому соответствующая зависимость $W^{-1}(U)$, показанная на рис. 5a, является линейной.

Однако при учете непараксиальных эффектов ширина непараксиального солитона с той же самой мощностью оказывается несколько большей, чем ширина параксиального солитона. Это происходит из-за появления продольной компоненты поля, которая с увеличением мощности становится все более четко выраженной. Вследствие этого, разница между зависимостями $W^{-1}(U)$ для параксиальных и непараксиальных солитонов увеличивается с ростом U (рис. 5a).

Данная картина заметно меняется при наличии периодической решетки показателя преломления (рис. 5$б$). Продольная компонента поля в решетке может быть весьма значительной даже при малых мощностях, когда ширина солитона достаточно велика. В этом случае сама решетка приводит к появлению мелкомасштабных осцилляций на профиле широкого солитона (рис. 1a). Поэтому кривые $W^{-1}(U)$ для параксиальных и непараксиальных солитонов начинают заметно различаться при существенно меньших значениях мощности, чем в однородной нелинейной среде.

Подобное различие становится еще более заметным с увеличением частоты Ω пространственной модуляции показателя преломления и параметра непараксиальности δ, поскольку, в соответствии с формулой (11), возрастает продольная компонента светового поля.

Таким образом, применимость параксиального приближения напрямую связана с относительным вкладом продольной компоненты, величина которой может быть оценена соотношением (7). Последнее утверждение наглядно проиллюстрировано на рис. 5*в*, на котором показаны зависимости соотношения мощностей $S = U_z/U_x$, сосредоточенных в продольной и поперечной компонентах, от полной мощности солитона.

Очевидно, что для параксиального приближения $S \equiv 0$. В отсутствие решетки ($\Omega = 0$) продольная компонента исчезает при $U \to 0$ (солитон становится очень широким) и монотонно растет с увеличением U. Чем больше величина S, тем хуже соответствие между параксиальным и непараксиальным подходами, поскольку с ростом S возрастает и различие между кривыми $W^{-1}(U)$, характеризующими связь между параметрами солитона.

По мере увеличения частоты решетки соотношение мощностей продольной и поперечной компонент становится отличным от нуля даже при $U \to 0$. Это свидетельствует о том, что при малых мощностях «решеточные» эффекты доминируют над нелинейными, и увеличение частоты решетки приводит к возрастанию относительной мощности продольной компоненты поля. Однако с увеличением полной мощности U относительное влияние решетки становится все слабее, и кривые $S(U)$ для разных пространственных частот постепенно сближаются.

4. ВЫВОДЫ

В нелинейных средах с периодической модуляцией показателя преломления возможно формирование пространственных солитонов, в ряде случаев обладающих значительной продольной компонентой светового поля. Одновременное проявление линейной и нелинейной рефракции может приводить к значительным уменьшениям интегральной ширины солитона (по сравнению с однородной средой). Параксиальное приближение может приводить к существенным погрешностям как при сильной нелинейной рефракции, когда ширина солитона приближается к длине волны, так и в случае широких солитонов в мелкомасштабных решетках показателя преломления.

ЛИТЕРАТУРА

1. Э. Инфельд, Дж. Роуландс, *Нелинейные волны, солитоны и хаос*, Физматлит, Москва (2005) [E. Infeld and G. Rowlands, *Nonlinear Waves, Solitons, and Chaos*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1990)].
2. Н. Н. Ахмедиев, А. Анкевич, *Солитоны: нелинейные импульсы и пучки*, Физматлит, Москва (2003) [N. N. Akhmediev and A. Ankiewicz, *Solitons: Nonlinear Pulses and Beams*, Chapman & Hall, London (1997)].
3. Ю. С. Кившарь, Г. П. Агравал, *Оптические солитоны. От волоконных световодов до фотонных кристаллов*, Физматлит, Москва (2005) [Y. Kivshar and G. Agrawal, *Optical Solitons: From Fibers to Photonic Crystals*, Acad. Press, London (2003).
4. M. J. Ablowitz, B. Prinari, and A. D. Trubatch, *Discrete and Continuous Nonlinear Schroedinger Systems*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (2004).
5. M. D. Feit and J. A. Fleck, Jr., J. Opt. Soc. Amer. B **5**, 633 (1988).
6. S. Blair and K. Wagner, Opt. Quant. Electron. **30**, 697 (1998).
7. Н. Н. Розанов, Опт. и спектр. **94**, 1013 (2003).
8. S. Chi and Q. Guo, Opt. Lett. **20**, 1598 (1995).
9. B. Crosignany, P. Di Porto, and A. Yariv, Opt. Lett. **22**, 778 (1997).
10. E. Granot et al., Opt. Lett. **22**, 1290 (1997).
11. Н. Н. Розанов, Н. В. Высотина, А. Г. Владимиров, ЖЭТФ **118**, 1307 (2000).
12. R. de la Fuente et al., Opt. Comm. **173**, 403 (2000).
13. N. N. Rosanov, V. E. Semenov, and N. V. Vyssotina, J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt. **3**, S96 (2001).
14. A. Ciattoni et al., Opt. Lett. **27**, 734 (2002).
15. L. Brzozowski et al., Appl. Phys. Lett. **82**, 4429 (2003).
16. A. M. Akulshin et al., J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt. **6**, 491 (2004).