

ЭВОЛЮЦИЯ ВАКУУМНОЙ ОБОЛОЧКИ В МИРЕ ФРИДМАНА – ШВАРЦШИЛЬДА

В. И. Докучаев^{a}, С. В. Чернов^{b**}*

*^a Институт ядерных исследований Российской академии наук
117312, Москва, Россия*

*^b Физический институт Российской академии наук
117924, Москва, Россия*

*^b Институт ядерных исследований Российской академии наук
117312, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 12 декабря 2007 г.

С помощью метода эффективного потенциала исследуются возможные типы эволюции вакуумных оболочек в мире Фридмана – Шварцшильда. Предполагается, что подобные оболочки возникают при фазовых переходах в ранней Вселенной. Построены возможные глобальные геометрии для миров Фридмана – Шварцшильда. Найденны приближенные решения уравнения движения вакуумной оболочки. Найденны условия, при которых конечным результатом эволюции рассматриваемых вакуумных оболочек оказывается образование черных дыр и кротовых нор с дочерними вселенными внутри. Внутренняя часть такого мира может представлять из себя замкнутую, плоскую или открытую вселенную Фридмана.

PACS: 04.20.-q, 04.70.-s, 98.80.-k

1. ВВЕДЕНИЕ

Фазовые переходы в ранней Вселенной происходят с образованием вакуумных пузырей новой фазы. При расширении и взаимном пересечении пузырей новой фазы возможно также образование пузырей старой фазы, полностью окруженных новой фазой [1–7]. Исследование эволюции таких пузырей и их последующей судьбы представляет интерес в связи с проблемами темной энергии, темной материи и первичных черных дыр. Эволюция вакуумных пузырей рассматривалась во многих работах, в основном в предположении метрики де Ситтера для внутренней части пузыря. Область, разделяющая внутреннюю и внешнюю части пузыря представляет собой доменную стенку, для описания которой часто используется формализм тонких оболочек, предложенный Израелем [8] и детально разработанный впоследствии Березиным, Кузьминым и Ткачевым [9] в применении к космологическим задачам. Различ-

ные частные случаи этой задачи рассматривались во многих работах по космологическим фазовым переходам (см., например, ранние работы [3–5, 7, 10–13]). Конечным результатом эволюции вакуумных пузырей может быть образование первичных черных дыр и различных типов кротовых нор, содержащих внутри себя дочерние вселенные [9, 10, 14–25]. В работах [9, 24, 26, 27] исследовалась эволюция вакуумных пузырей в мире Шварцшильда – де Ситтера. Динамика пузыря в мире Фридмана – Шварцшильда исследовалась в работах [10, 11], но без учета поверхностного натяжения стенки пузыря (оболочки). В настоящей работе мы анализируем в тонкостенном приближении полную динамику вакуумной оболочки в мире Фридмана – Шварцшильда с учетом поверхностной плотности энергии оболочки. Возникновение такой конфигурации возможно в результате образования частиц при распаде вакуума внутри пузыря по аналогии с финальной стадией инфляции (см. также работу [28]). В результате проведенного анализа найдены все возможные типы эволюции вакуумных оболочек в мире Фридмана – Шварцшильда и построены соответствующие глобальные геометрии.

*E-mail: dokuchaev@inr.npd.ac.ru

**E-mail: chernov@lpi.ru

Найдены также приближенные асимптотические решения уравнения движения вакуумных оболочек в мире Фридмана–Шварцшильда.

2. ОБОЛОЧКА В МИРЕ ФРИДМАНА – ШВАРЦШИЛЬДА

Рассмотрим сферически-симметричную оболочку, внутренняя часть которой (вдали от границы) описывается метрикой Фридмана:

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = dt_{in}^2 - a^2(t_{in}) \left[\frac{dq^2}{1 - kq^2} + q^2 d\Omega^2 \right], \quad (1)$$

где $g_{\alpha\beta}$ — метрический тензор, t_{in} — время наблюдателя в мире Фридмана, $a = a(t_{in})$ — масштабный фактор, q — внутренняя радиальная координата, $d\Omega$ — элемент телесного угла, $k = 1$ для замкнутого, $k = 0$ для плоского, $k = -1$ для открытого мира. Здесь и ниже индексы «in» и «out» относятся соответственно к внутреннему миру Фридмана и внешнему миру Шварцшильда.

Внешняя часть оболочки описывается метрикой Шварцшильда:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt_{out}^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2, \quad (2)$$

где m — полная внешняя масса оболочки, r — внешняя радиальная координата. Метрика переходной области моделируется в виде тонкой оболочки Σ :

$$ds^2|_{\Sigma} = d\tau^2 - \rho^2(\tau) d\Omega^2, \quad (3)$$

где τ — собственное время наблюдателя, находящегося на оболочке, $\rho = \rho(\tau)$ — радиус оболочки. С помощью метода тонких оболочек [8] внешняя и внутренняя метрики сшиваются на оболочке, и в результате получаются уравнения движения оболочки [9]:

$$4\pi S_0^0 = [K_2^2], \quad \frac{dS_0^0}{d\tau} + 2(S_0^0 - S_2^2) \frac{\dot{\rho}}{\rho} + [T_0^n] = 0, \quad (4)$$

где S_α^β — тензор поверхностной плотности энергии на оболочке, K_α^β — тензор внешней кривизны, T_α^β — тензор энергии-импульса жидкости, а $[A] = A_{out} - A_{in}$. Для вакуумной оболочки $S_0^0 = S_2^2 = S = \text{const}$. Вначале рассмотрим внутреннюю часть нашего пузыря. Уравнения Фридмана имеют вид

$$\frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} = \frac{8\pi}{3}\varepsilon, \quad \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi}{3}(\varepsilon + 3P), \quad (5)$$

где точка означает дифференцирование по времени t_{in} , ε — плотность энергии, P — давление. Классификацию будем делать для произвольного уравнения состояния, но в уме всегда будем держать линейное уравнение состояния, когда $P = \alpha\varepsilon$ и $\alpha = \text{const} \neq -1$ (классификацию решений в случае $\alpha = -1$, соответствующем вакуумной метрике де Ситтера, см. в работах [26, 27]). Для линейного уравнения состояния решение уравнения Фридмана имеет вид ($k = 0$)

$$a = At_{in}^n, \quad \varepsilon = \frac{3n^2}{8\pi t_{in}^2}, \quad (6)$$

где A — константа, $n = 2/3(1 + \alpha)$. В работе [9] для случая метрики Фридмана и с учетом условия сшивки метрики Фридмана с оболочкой, $\rho = aq$, вычислен (при любых k) инвариант

$$\Delta \equiv g^{\alpha\beta} \rho_{,\alpha} \rho_{,\beta} = \frac{8\pi}{3} \varepsilon \rho^2 - 1 \quad (7)$$

и компонента тензора внешней кривизны (в силу сферической симметрии задачи нам понадобится только одна компонента)

$$K_2^2 = -\frac{\sigma_{in}}{\rho} \sqrt{\left(\frac{d\rho}{d\tau}\right)^2 + 1 - \frac{8\pi}{3} \varepsilon \rho^2}, \quad (8)$$

где $\sigma_{in} = \pm 1$. Величина $\sigma = 1$, если радиус двумерной сферы увеличивается в направлении внешней нормали, и $\sigma = -1$ в противоположном случае. В свою очередь, в зависимости от знака инварианта Δ оболочка движется в пространственно-временной области либо R ($\Delta < 0$), либо в T ($\Delta > 0$) [29]. Граница, разделяющая пространственно-временные области R и T , для метрики Фридмана расположена на радиусе

$$\rho_\Delta = \sqrt{\frac{3}{8\pi\varepsilon}}, \quad (9)$$

являющемся корнем уравнения $\Delta(\rho) = 0$.

Для внешней метрики Шварцшильда компонента K_2^2 внешней кривизны равна

$$K_2^2 = -\frac{\sigma_{out}}{\rho} \sqrt{\left(\frac{d\rho}{d\tau}\right)^2 + 1 - \frac{2m}{\rho}}, \quad (10)$$

а радиус, при котором изменяется знак Δ , совпадает с радиусом горизонта событий $r_h = 2m$. В результате основное уравнение движения оболочки (4), возникающее как условие сшивки внешней и внутренней метрик, для любых значений k записывается в виде [9]

$$4\pi S = \frac{\sigma_{in}}{\rho} \sqrt{\left(\frac{d\rho}{d\tau}\right)^2 + 1} - \frac{8\pi}{3} \varepsilon \rho^2 - \frac{\sigma_{out}}{\rho} \sqrt{\left(\frac{d\rho}{d\tau}\right)^2 + 1} - \frac{2m}{\rho}. \quad (11)$$

В этом уравнении радиус ρ зависит от собственного времени τ наблюдателя, находящегося на оболочке, а плотность энергии ε зависит от времени t_{in} для наблюдателя, находящегося внутри оболочки в мире Фридмана. Поэтому уравнение движения должно быть дополнено еще одним уравнением, получающимся из сшивки внутренней метрики Фридмана и метрики на оболочке:

$$dt_{in}^2 - a^2 dq^2 = d\tau^2. \quad (12)$$

В уравнении (11) можно рассматривать радиус ρ оболочки как функцию времени t_{in} (далее для упрощения записи будем опускать индекс). А именно, из уравнения (12) можно выразить $\tau = \tau(t)$ и подставить в уравнение (11), т. е. $\rho(\tau) = \rho(\tau(t))$. Начнем анализ с нахождения полной классификации решений уравнения движения оболочки (11) и построения соответствующих глобальных геометрий. Затем в некоторых частных случаях найдем приближенное решение уравнения движения оболочки.

3. АНАЛИЗ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ОБОЛОЧКИ

Для дальнейшего анализа уравнение движения оболочки (11) удобно представить в форме уравнения для эффективной энергии

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\rho}{d\tau}\right)^2 + U(\rho) = 0$$

(см. также работы [26, 27]), где эффективный потенциал имеет вид

$$U(\rho) = \frac{1}{2} \left[1 - \left(2\pi S + \frac{\varepsilon}{3S}\right)^2 \rho^2 - \frac{m}{\rho} \left(1 - \frac{\varepsilon}{6\pi S^2}\right) - \frac{m^2}{16\pi^2 S^2 \rho^4} \right]. \quad (13)$$

Его график представлен на рис. 1. Уравнение (13) для эффективного потенциала $U(\rho)$ нужно дополнить условиями на знаки величины σ , присутствующие в исходном уравнении движения оболочки (11):

$$\sigma_{in} = \text{sign} \left[m - \frac{4\pi}{3} \varepsilon \rho^3 + 8\pi^2 S^2 \rho^3 \right], \quad (14)$$

$$\sigma_{out} = \text{sign} \left[m - \frac{4\pi}{3} \varepsilon \rho^3 - 8\pi^2 S^2 \rho^3 \right]. \quad (15)$$

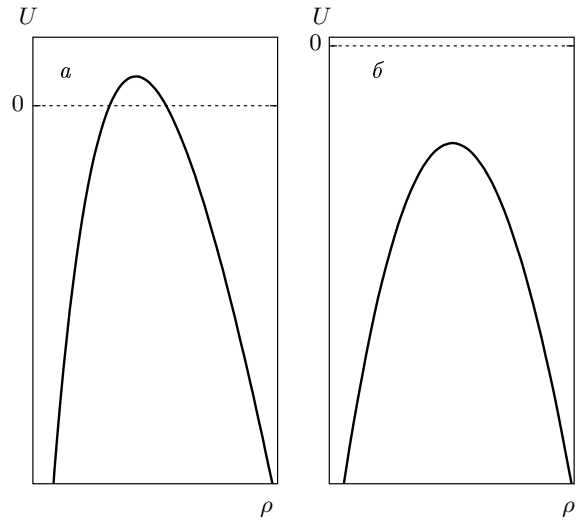


Рис. 1. Эффективный потенциал $U(\rho)$ из уравнения (13) в зависимости от соотношения между полной массой m оболочки и величиной параметра m_0 из выражения (18): $a - m < m_0$; $b - m > m_0$

Легко показать, что вторая производная от этого потенциала по радиусу при любом значении радиуса $\rho = \rho(\tau(t))$ меньше нуля:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2} = -\frac{1}{2} \left[\frac{2m}{\rho^3} + \frac{m^2}{\pi^2 S^2 \rho^6} + 8\pi^2 S^2 + \frac{8\pi}{3} \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{9S^2} + \left(\frac{\varepsilon}{3S} - \frac{m}{2\pi S \rho^3} \right)^2 \right] < 0. \quad (16)$$

Таким образом, статические решения в этой задаче отсутствуют [30]. Приравняв нулю первую производную потенциала по радиусу, находим точку максимума потенциала $\rho_{max}^3 = m y_{max}$, где

$$y_{max} = \left[1 - \frac{\varepsilon}{6\pi S^2} + \sqrt{\left(1 - \frac{\varepsilon}{6\pi S^2}\right)^2 + 8 \left(1 + \frac{\varepsilon}{6\pi S^2}\right)^2} \right] \times \left(4\pi S + \frac{2\varepsilon}{3S} \right)^{-2} > 0. \quad (17)$$

Отметим, что точка максимума потенциала есть функция времени, $\rho_{max} = \rho_{max}(t)$.

Как окажется в дальнейшем, удобным параметром для классификации возможных типов эволюции оболочки является ее полная масса m (масса Шварцшильда), измеряемая наблюдателем на пространственной бесконечности. Эта масса с учетом гравитационного дефекта массы включает в себя

полную энергию внутреннего мира Фридмана, а также полную энергию оболочки, включая ее энергию поверхностного натяжения и ее кинетическую энергию. Подставляя $\rho = \rho_{max}$ в уравнение (13) для потенциала, находим первый важный параметр массы оболочки: $m_{max} = m_0$, при котором сжимающаяся или расширяющаяся оболочка проходит через точку максимума потенциала:

$$m_0 = \sqrt{y_{max}} \left[1 - \frac{\varepsilon}{6\pi S^2} + \frac{1}{16\pi^2 S^2 y_{max}} + \left(2\pi S + \frac{\varepsilon}{3S} \right)^2 y_{max} \right]^{-3/2} > 0. \quad (18)$$

Потенциал $U(\rho_{max}) < 0$ при $m > m_0$ и, наоборот, $U(\rho_{max}) > 0$ при $m < m_0$. Таким образом, в зависимости от величины полной массы m оболочки потенциал либо пересекает ось $U = 0$, либо нет. Другими словами, это означает, что от величины полной массы m оболочки зависит наличие или отсутствие точки возврата (отскока) при временной эволюции радиуса оболочки. Следует иметь в виду, что параметр массы m_0 (и все введенные далее параметры массы) является функцией времени t , поскольку от t зависит плотность энергии ε в соответствии с уравнениями Фридмана (5). Поэтому при заданной полной массе m неравенства вида $m > m_0$ или $m < m_0$ могут изменяться со временем на противоположные. Соответственно при эволюции оболочки точка отскока может появляться и/или исчезать. Отметим также, что для линейного уравнения состояния $P = \alpha\varepsilon$ при $\alpha > -1$ и $k = 0$ плотность энергии ε уменьшается со временем. Поэтому на достаточно больших временах для массового параметра имеем асимптотику

$$m_0(t \rightarrow \infty) = \frac{4}{27\pi S}.$$

Соответственно на достаточно больших временах при $m \geq m_0(t \rightarrow \infty)$ будет выполняться неравенство $U(\rho_{max}) \leq 0$.

Далее, из уравнения (14) следует, что σ_{in} меняет знак ($\sigma_{in} = 0$) при радиусе оболочки $\rho = \rho_1$, где

$$\rho_1^3 = \frac{3}{4\pi} \frac{m}{\varepsilon - 6\pi S^2}. \quad (19)$$

Радиус ρ_1 существует только при $\varepsilon(t, k) > 6\pi S^2$. Для линейного уравнения состояния при $k = 0$ имеем $t < t_1 = n/4\pi S$. При $t > t_1$ радиус ρ_1 не существует ($\rho_1 < 0$). Из этих соотношений видно, что при временах $t < t_1$ в плоской вселенной существует радиус, при котором происходит изменение знака

величины σ_{in} , который, в свою очередь, связан с областями R_+ (где $dr/dq > 0$) и R_- (где $dr/dq < 0$). При каких временах будет существовать радиус ρ_1 для других уравнений состояний, зависит от решения уравнения Фридмана. Также заметим, что для замкнутой вселенной решением уравнения Фридмана может быть периодическая функция. Поэтому радиус ρ_1 может появляться и исчезать бесконечное число раз. Будем считать, что радиус существует только один раз. Это очень грубое приближение, которое затем на диаграммах Картера–Пенроуза может привести к противоречию, если это условие не учитывать.

В свою очередь, из уравнения (15) следует, что σ_{out} меняет знак ($\sigma_{out} = 0$) при радиусе оболочки $\rho = \rho_2$, где

$$\rho_2^3 = \frac{3}{4\pi} \frac{m}{\varepsilon + 6\pi S^2}. \quad (20)$$

Из выражений (17), (19) и (20) следуют соотношения между ρ_1 , ρ_2 и ρ_{max} :

$$\rho_2 < \rho_{max}, \quad (21)$$

$$\rho_1 > (\rho_2, \rho_{max}) \quad \text{при} \quad \varepsilon > 6\pi S^2. \quad (22)$$

Подставляя в уравнение (13) для потенциала $U(\rho)$ радиус $\rho = \rho_1$ и решая уравнение

$$U(\rho_1) \equiv \frac{1}{2} \left[1 - 2 \left(\frac{4\pi}{3} \right)^{1/3} \left(\frac{m\varepsilon^{3/2}}{\varepsilon - 6\pi S^2} \right)^{2/3} \right] = 0, \quad (23)$$

находим параметр массы $m = m_1$, где

$$m_1 = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \frac{\varepsilon - 6\pi S^2}{\varepsilon^{3/2}}. \quad (24)$$

Из этого соотношения видно, что $U(\rho_1) \leq 0$ при $m \geq m_1$. Этот параметр существует, как и ρ_1 , только при $\varepsilon > 6\pi S^2$. Аналогично, подставляя в уравнение (13) для потенциала $U(\rho)$ радиус $\rho = \rho_2$ и решая уравнение

$$U(\rho_2) \equiv \frac{1}{2} \left[1 - 2 \left(\frac{4\pi}{3} \right)^{1/3} m^{2/3} (\varepsilon + 6\pi S^2)^{1/3} \right] = 0, \quad (25)$$

находим еще один параметр массы $m = m_2$, где

$$m_2 = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{3}{2\pi(\varepsilon + 6\pi S^2)}}. \quad (26)$$

Согласно уравнению (6) плотность энергии в мире Фридмана уменьшается по закону $\varepsilon \propto t^{-2}$ (для

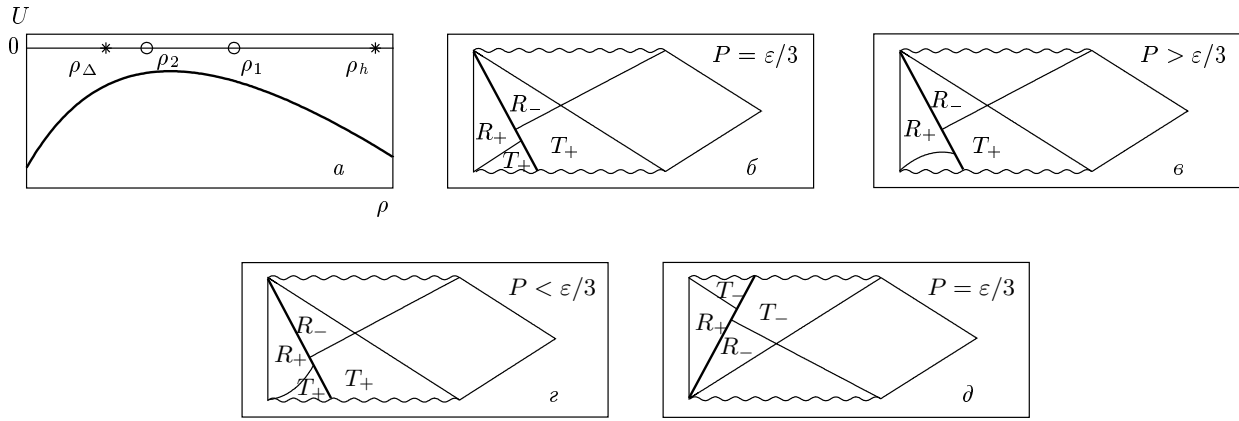


Рис. 2. Эффективный потенциал $U(\rho)$ и диаграммы Картера–Пенроуза для глобальной геометрии движущейся вакуумной оболочки в мире Фрийдмана–Шварцшильда для случая $m > m_3$. Графики эффективных потенциалов $U(\rho)$ и диаграммы Картера–Пенроуза для глобальной геометрии движущейся вакуумной оболочки в мире Фрийдмана–Шварцшильда для случаев $m_2 < m < m_0$, $m_1 < m < m_2$ и $m < m_1$

линейного уравнения состояния и при $k = 0$), поэтому параметр массы m_2 растет со временем:

$$\frac{dm_2}{dt} > 0, \quad m_2(t \rightarrow \infty) \rightarrow \frac{1}{8\pi S}.$$

При $m < m_2$ в точке с радиусом $\rho = \rho_2$ потенциал всегда положителен, т. е. $U(\rho_2) > 0$. Наоборот, при $m > m_2$ в точке с радиусом $\rho = \rho_2$ потенциал всегда отрицателен, т. е. $U(\rho_2) < 0$. Иными словами, при $m < m_2$ точка с координатами $(\rho_2, 0)$ находится под графиком потенциала $U(\rho)$, а при $m > m_2$ — над графиком потенциала $U(\rho)$. При $m = m_2$ радиус ρ_2 пересекает потенциал. Заметим также, что $m_2 > m_1$.

Для величины потенциала на горизонте событий метрики Шварцшильда, $\rho_h = 2m$, находим

$$U(\rho_h) = - \left[\pi S m \left(1 + \frac{\varepsilon}{6\pi S^2} \right) - \frac{1}{64\pi S m} \right]^2 \leq 0. \quad (27)$$

Видно, что точка с координатами $(\rho_h, 0)$ всегда либо находится над графиком потенциала $U(\rho)$, либо касается графика потенциала при $m = m_2$ ($U(\rho_h) = 0$). В случае $m = m_2$ радиус горизонта событий $\rho_h = 2m$ совпадает с радиусом ρ_2 смены знака величины σ_{out} . С помощью выражений (18), (20) и (26) для m_0 , ρ_2 и m_2 находим, что $m_0 > m_2$, а также

$$\rho_h \gtrless \rho_2 \quad \text{при} \quad m \gtrless m_2. \quad (28)$$

Наконец, подставляя в уравнение (13) для потенциала $U(\rho)$ радиус границы между пространственно-временными областями R и T в мире Фрийдмана, $\rho = \rho_\Delta$ из (9), находим

$$U(\rho_\Delta) = -\frac{1}{2\rho_\Delta} \left[2\pi S \left(1 - \frac{\varepsilon}{6\pi S^2} \right) \left(\frac{3}{8\pi\varepsilon} \right)^{3/4} + \frac{m}{4\pi S} \left(\frac{8\pi\varepsilon}{3} \right)^{3/4} \right]^2 \leq 0. \quad (29)$$

Видно, что точка с координатами $(\rho_\Delta, 0)$ не может быть под графиком потенциала $U(\rho)$. Только при $m = m_1$ точка с координатами $(\rho_\Delta, 0)$ лежит на графике потенциала и при этом $\rho_\Delta = \rho_1$. Соответственно $\rho_1 \gtrless \rho_\Delta$ при $m \gtrless m_1$. Заметим, что радиус ρ_Δ , на котором происходит смена областей R и T , обладает такими же свойствами, как и радиус горизонта метрики Шварцшильда, $r_h = 2m$, по отношению к нашему потенциалу. Также можно показать, что $\rho_\Delta > \rho_{max}$ при $m = m_{max}$.

Наконец, введем последний параметр массы

$$m_3 = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{3}{2\pi\varepsilon}}, \quad (30)$$

являющийся корнем уравнения $\rho_\Delta = \rho_h$. В результате получим соотношения $\rho_h \lesseqgtr \rho_\Delta$ при $m \lesseqgtr m_3$. Можно показать, что $m_3 > m_0$. Для линейного уравнения состояния при $k = 0$ имеем $m_3(t \rightarrow \infty) \rightarrow \infty$. Теперь у нас есть все необходимые параметры для построения полной классификации возможных типов решений уравнения движения оболочки в мире Фрийдмана–Шварцшильда и нахождения соответствующих глобальных геометрий.

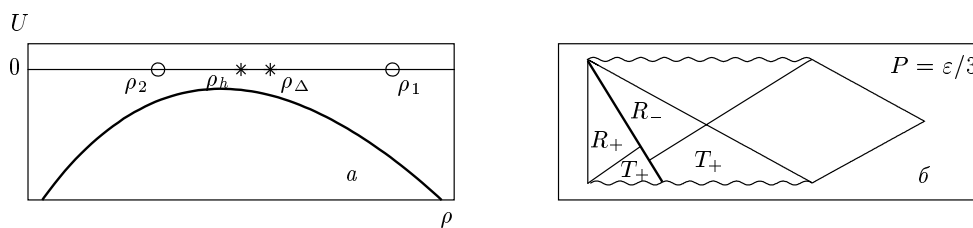


Рис. 3. То же, что на рис. 2, для случая $m_0 < m < m_3$

4. ГЛОБАЛЬНЫЕ ГЕОМЕТРИИ МИРА ФРИДМАНА – ШВАРЦШИЛЬДА

Рассмотрим все возможные типы решений уравнения движения вакуумной оболочки в мире Фридмана – Шварцшильда и затем дадим физическую интерпретацию этих решений.

4.1. Случай $m > m_3$

Начнем рассмотрение со случая, когда $m > m_3$, т. е. когда оболочка имеет большую массу, превышающую все характерные массы в данной задаче, и будем последовательно рассматривать оболочки со все меньшей и меньшей массой. В этом случае выполнены соотношения $\rho_h > \rho_\Delta$, $\rho_1 > \rho_2$ (если ρ_1 существует), $\rho_1 > \rho_\Delta$, $\rho_h > \rho_2$. Потенциал и расположение характерных радиусов для этого случая показаны на рис. 2а. Для вакуумной оболочки в этом случае точка отскока, как видно на рис. 2а, отсутствует.

Рассмотрим частный случай, когда вакуумная оболочка изначально расширяется. Для определения типа пространственно-временных областей R и T важно, какие знаки будут иметь величины σ_{in} и σ_{out} при пересечении оболочкой соответственно радиусов ρ_Δ и ρ_h . При пересечении радиуса ρ_Δ величина $\sigma_{in} = 1$ для любой функциональной зависимости $\varepsilon(t, k)$. Следовательно, оболочка изначально движется в области R_+ . При пересечении радиуса ρ_h имеем $\sigma_{out} = -1$ и, следовательно, оболочка оказывается в области R_- . Соответствующая этому случаю диаграмма Картера – Пенроуза (глобальная геометрия) изображена на рис. 2б-г (при $k = 0, -1$) для различных уравнений состояния (см. также работу [29]). В дальнейшем будем приводить диаграммы Картера – Пенроуза только для случая, когда $P = \varepsilon/3$, т. е. $\alpha = 1/3$, поскольку для других уравнений состояний с $\alpha = \text{const}$ соответствующие диаграммы строятся аналогично. Диаграммы Картера – Пенроуза для замкнутой вселенной будут такими же, как и для открытой вселенной (см. рис. 2б-г).

Для сжимающейся оболочки знаки величины σ ,

при которых оболочка пересекает радиусы ρ_h и ρ_Δ , останутся такими же. Соответствующая диаграмма Картера – Пенроуза для замкнутой геометрии изображена на рис. 2д. Дополнительные особенности появляются в случае замкнутой вселенной, т. е. при $k = 1$. Например, для замкнутой вселенной расширение вселенной сменяется сжатием, а из диаграммы Картера – Пенроуза для замкнутой вселенной (см. рис. 2б) видно, что расширение вселенной не может смениться сжатием, поскольку для замкнутого мира Фридмана отсутствует область T_- . Это, в частности, связано с тем, что всегда найдется такой промежуток времени, когда эта диаграмма не будет верна, а именно, нарушится условие $m > m_3$. Ответ на этот вопрос (и на аналогичные для других диаграмм) мы дадим в конце данного раздела.

4.2. Случай $m_0 < m < m_3$

Этот случай отличается от предыдущего только тем, что радиусы ρ_h и ρ_Δ меняются местами. Потенциал и диаграмма Картера – Пенроуза для расширяющейся оболочки при уравнении состояния с $\alpha = 1/3$ показаны соответственно на рис. 3а, рис. 3б ($k = 0, \pm 1$). Диаграммы Картера – Пенроуза для сжимающейся оболочки и для других значений α строятся аналогично предыдущему случаю.

4.3. Случай $m_2 < m < m_0$

Эффективный потенциал в этом случае, показанный на рис. 4а, имеет область, где $U(\rho) > 0$. В этом случае в точках $U(\rho) = 0$ происходит отскок оболочки, т. е. смена режимов сжатия и расширения. Если оболочка начинает свое движение из начала координат ($\rho(0) = 0$), то расширение оболочки сменится ее сжатием и в конце концов она сожмется в сингулярность. Диаграмма Картера – Пенроуза для замкнутого мира показана на рис. 4б. Если же оболочка начинает сжиматься из бесконечности, то это сжатие сменится растяжением и оболочка снова растянется

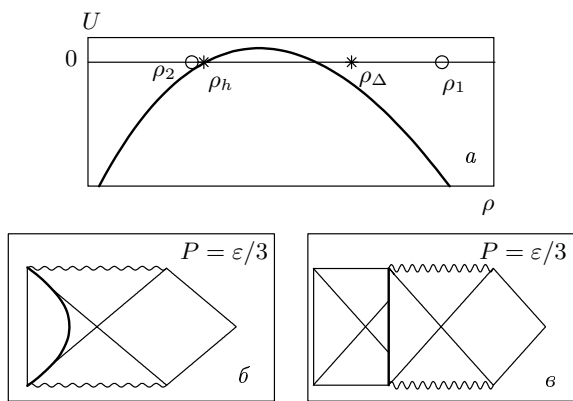


Рис. 4. То же, что на рис. 2, для случая $m_2 < m < m_0$

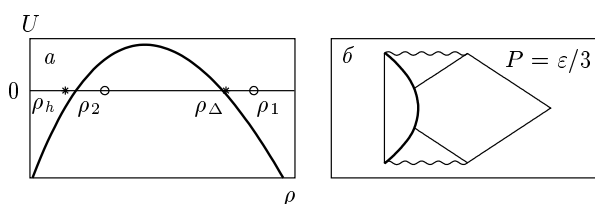


Рис. 5. То же, что на рис. 2, для случая $m_1 < m < m_2$

ся до бесконечности. Соответствующая диаграмма Картера–Пенроуза для замкнутого мира изображена на рис. 4в.

4.4. Случай $m_1 < m < m_2$

Для оболочки, сжимающейся из бесконечности, ситуация не изменится по сравнению с предыдущим случаем. Однако для оболочки, расширяющейся из начала координат, ситуация кардинально изменится. Теперь $\sigma_{out} = +1$. Соответствующий график потенциала и диаграмма Картера–Пенроуза для замкнутого мира изображены на рис. 5а и 5б.

4.5. Случай $m < m_1$

Потенциал для этого последнего случая изображен на рис. 6а. Ситуация, когда оболочка расширяется из начала координат, не изменится по сравнению с предыдущим случаем. А ситуация, когда оболочка сжимается из бесконечности, отличается тем, что радиус ρ_1 окажется под графиком потенциала (если он вообще будет к тому времени существовать). При этом возможны два варианта. Если на момент времени, когда оболочка пересекает радиус

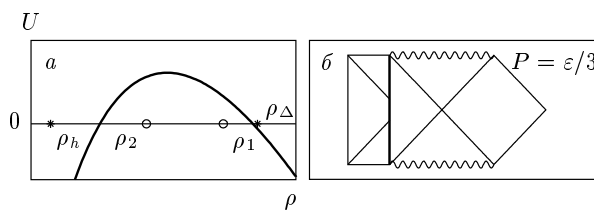


Рис. 6. То же, что на рис. 2, для случая $m < m_1$

ρ_Δ , радиус ρ_1 отсутствует, то ситуация сводится к предыдущему случаю. Если же на момент времени, когда оболочка пересекает радиус ρ_Δ , радиус ρ_1 существует, то изменится знак величины σ_{in} , а именно, $\sigma_{in} = -1$. Диаграмма Картера–Пенроуза для такого варианта изображена на рис. 6б.

Рассматриваемая классификация позволяет полностью описать динамику вакуумной оболочки без ограничения общности малым интервалом времени t . Действительно, пусть задана масса m и выполнено условие $m > m_3$ для некоторого малого интервала времени. Параметр m_3 растет со временем t и в некоторый момент станет больше m . Тогда будет выполнено условие $m_0 < m < m_3$, и вакуумная оболочка, в зависимости от того, пересекла она другие характерные радиусы или нет, будет удовлетворять соответствующему решению для этого нового неравенства. Аналогичным образом можно проследить за всей последующей динамикой оболочки.

Эволюцию сжимающейся вакуумной оболочки можно рассматривать аналогично эволюции расширяющейся вакуумной оболочки в силу инвариантности уравнений Фридмана (5) относительно замены знака времени t на $-t$. Пусть вакуумная оболочка начинает свое движение из начала координат при $t = 0$. Тогда параметр m будет больше всех других параметров массы $m_i = (m_0, m_1, m_2, m_3)$, поскольку $\varepsilon \rightarrow \infty$ и $m_i \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$.

Пусть сначала внутри вакуумного пузыря существует открытая или плоская вселенная. Ничто не будет препятствовать расширению вакуумной оболочки. В зависимости от соотношения между параметрами может возникнуть несколько ситуаций. Либо оболочка пересечет радиус ρ_Δ , а затем радиус ρ_h , либо сначала произойдет обмен между радиусами ρ_Δ и ρ_h (поскольку m_3 растет линейно со временем, в некоторый момент времени параметр m_3 станет больше заданного параметра m). Если $m > m_0(t \rightarrow \infty) = 4/27\pi S$, то оболочка просто уйдет на бесконечность. Если же $m < m_0(t \rightarrow \infty) = 4/27\pi S$, то после некоторого момента времени будет выполняться неравенство

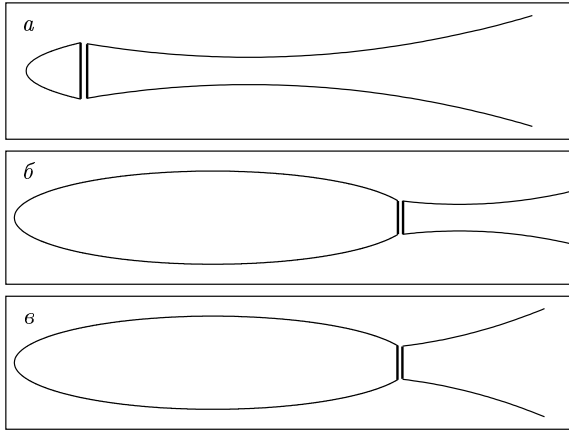


Рис. 7. Диаграммы погружения оболочки в мире Фрийдмана – Шварцшильда, содержащей внутри себя соответственно открытый, плоский (а) и замкнутый (б, в) миры Фрийдмана

$m < m_0$ (т. е. потенциал пересечет ось $U = 0$ и возникнет точка отскока). Но поскольку внутри пузыря вселенная является открытой, расширение не может смениться сжатием, т. е. вакуумная оболочка может перейти только в область справа от графика потенциала (если оболочка перейдет в область слева от потенциала, то затем она отразится в точке отскока и станет сжиматься). В области справа от потенциала вакуумная оболочка продолжит свое расширение, устремляясь в бесконечность. Могут быть и другие частные случаи при расширении. Например, $m < m_2(t \rightarrow \infty)$, но этот вариант аналогичен предыдущему. Таким образом, в общем случае диаграмма Картера – Пенроуза эволюционирует со временем и эта эволюция описывается в разные промежутки времени приведенными выше диаграммами.

Если же внутри пузыря существует замкнутая вселенная, то поскольку расширение должно смениться сжатием, всегда наступит время, когда $m < m_0(t \rightarrow \infty) = 4/27\pi S$. Тогда вакуумная оболочка может находиться только слева от потенциала, и возможно отражение от точки отскока (т. е. расширение сменится сжатием). В конце концов такая оболочка сожмется (сколлапсирует) в сингулярность.

Качественно диаграммы погружения [31] для вакуумных оболочек в мире Фрийдмана – Шварцшильда изображены на рис. 7а для открытого и плоского мира Фрийдмана, а на рис. 7б, в для замкнутого мира Фрийдмана (см. также работы [32–34]). Из диаграмм Картера – Пенроуза можно видеть, что практически во всех случаях эволюции оболочки образуются полужамкнутые миры. Это связано с тем, что оболоч-

ка движется в области R_- мира Шварцшильда, а области R_+ и R_- связаны между собой туннелем (кротовой норой).

5. ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ

В некоторых предельных случаях уравнение движения вакуумной оболочки в мире Фрийдмана – Шварцшильда можно решить приближенно. В случае, когда оболочка сжимается из бесконечности и эффективный потенциал пересекает ось $U = 0$, в эффективном потенциале (13) можно пренебречь слагаемыми

$$-\frac{m}{\rho} \left(1 - \frac{\varepsilon}{6\pi S^2}\right) - \frac{m^2}{16\pi^2 S^2 \rho^4}. \quad (31)$$

Уравнение движения оболочки (11) тогда существенно упростится и может быть приведено к виду

$$\left(\frac{d\rho}{d\tau}\right)^2 = \phi^2 \rho^2 - 1, \quad (32)$$

где введено обозначение $\phi = 2\pi S + \varepsilon/3S$. При этом уравнение (12) для сшивки внутренней метрики Фрийдмана и метрики на оболочке переписется в виде

$$\left[1 + \left(\frac{d\rho}{d\tau}\right)^2\right] \dot{\rho}^2 - 2 \left(\frac{d\rho}{d\tau}\right)^2 H \rho \dot{\rho} + \left(\frac{d\rho}{d\tau}\right)^2 (H^2 \rho^2 - 1) = 0, \quad (33)$$

где $H = \dot{a}/a = \sqrt{8\pi\varepsilon/3}$ – постоянная Хаббла. Из двух уравнений, (32) и (33), получаем

$$\dot{\rho} = \left(H\sqrt{\phi^2 \rho^2 - 1} \pm |\phi - 4\pi S|\right) \frac{\sqrt{\phi^2 \rho^2 - 1}}{\phi^2 \rho}. \quad (34)$$

В этом уравнении мы уже можем считать, что ρ зависит только от t . Проинтегрировав это уравнение, получим зависимость $\rho(t)$ и затем можем найти зависимость $\tau(t)$ с помощью уравнения (12) при $\rho = aq$:

$$\dot{\tau}^2 = 1 - (\dot{\rho} - H\rho)^2. \quad (35)$$

Находя отсюда обратную зависимость $t = t(\tau)$, получим в итоге зависимость $\rho(\tau)$. Для линейного уравнения состояния ($k = 0$) с учетом решения уравнения Фрийдмана (6) имеем соотношение $H = \dot{a}/a = n/t$. Найдем асимптотическое решение уравнения (34) при $t \rightarrow \infty$. В этом пределе уравнение (34) переписется в виде

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\sqrt{(2\pi S\rho)^2 - 1}}{(2\pi S\rho)^2} \left[\frac{n}{t} \sqrt{(2\pi S\rho)^2 - 1} \pm 2\pi S\right]. \quad (36)$$

Интегрируя последнее уравнение при $n \neq 1$, получим

$$\rho = \frac{1}{2\pi S} \sqrt{1 + \frac{(2\pi S)^2 [t - Bn(n-1)t^n]^2}{(n-1)^2}}, \quad (37)$$

где B — постоянная интегрирования. Соответственно при $n = 1$ получим

$$\rho = \frac{1}{2\pi S} \sqrt{1 + (2\pi S)^2 t^2 (B + \ln t)^2}. \quad (38)$$

В рассматриваемом пределе $t \rightarrow \infty$ в итоге получим

$$\rho \approx \begin{cases} \frac{t + B(1-n)nt^n}{1-n}, & n \neq 1, \\ t \ln t, & n = 1. \end{cases} \quad (39)$$

Из этого решения и уравнения (35) следует, что $d\tau/dt = 0$, т. е. в рассматриваемом пределе зависимость t от τ исчезает.

Уравнение движения оболочки можно решить и в другом предельном случае, когда $t \rightarrow 0$. В этом пределе уравнение движения оболочки имеет вид

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{n}{t} \rho \pm 1. \quad (40)$$

Решение этого уравнения есть

$$\rho \approx \begin{cases} Ct^n \pm t/(1-n), & n \neq 1, \\ Ct \pm t \ln t, & n = 1, \end{cases} \quad (41)$$

где C — постоянная интегрирования. В этом предельном случае также отсутствует зависимость t от τ .

Аналогичным образом можно найти приближенное решение уравнения движения вакуумной оболочки, когда она движется, находясь слева от потенциала. В этом случае в потенциале можно пренебречь слагаемыми вида

$$-\frac{\varepsilon^2 \rho^2}{9S^2} - 4\pi^2 S^2 \rho^2 - \frac{4\pi}{3} \varepsilon \rho^2. \quad (42)$$

Соответствующие решения уравнения движения вакуумной оболочки в пределах $t \rightarrow \infty$ и $t \rightarrow 0$, имеют вид, аналогичный (39) и (41).

6. ВЫВОДЫ

Рассмотрена динамика тонкой вакуумной оболочки в мире Фридмана–Шварцшильда. Удобным параметром для классификации возможных типов эволюции оболочки является ее полная масса m

(масса Шварцшильда), измеряемая наблюдателем на пространственной бесконечности. Эта масса с учетом гравитационного дефекта массы включает в себя полную энергию внутреннего мира Фридмана, а также полную энергию оболочки с учетом ее энергии поверхностного натяжения и ее кинетической энергии. Рассматриваемая классификация позволяет полностью описать динамику вакуумной оболочки без ограничения общности малым интервалом времени. Показано, что в широком интервале начальных условий, параметризуемых полной начальной массой оболочки, конечным результатом эволюции рассматриваемых вакуумных оболочек в мире Фридмана–Шварцшильда оказывается образование черных дыр, а также кротовых нор с дочерними вселенными внутри. Внутренняя часть такого мира может представлять собой замкнутую, плоскую или открытую вселенные Фридмана. Таким же образом, используя метод эффективного потенциала, можно исследовать более сложные конфигурации, например, когда внутри одного пузыря образуется еще один пузырь, внутри которого может находиться уже не мир Фридмана [13]. Такие конфигурации, когда эволюция внешнего и внутреннего пузыря определяется метриками внутри и вне оболочки, можно анализировать с помощью метода эффективного потенциала по отдельности. Следует отметить, что метод эффективного потенциала неприменим в ситуации, когда пузыри пересекаются. В случае очень маленьких пузырей, когда из-за краевых эффектов внутренность пузыря неоднородна и неприменимы уравнения Фридмана, мы выходим за рамки рассматриваемого формализма.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 06-02-16342) и Министерства образования и науки (грант № НШ-5573.2006.2).

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. А. Киржниц, Письма в ЖЭТФ **15**, 745 (1972).
2. D. A. Kirzhnits and A. D. Linde, Phys. Lett. B **42**, 471 (1972).
3. Я. Б. Зельдович, И. Ю. Кобзарев, Л. Б. Окунь, ЖЭТФ **67**, 3 (1974).
4. И. Ю. Кобзарев, Л. Б. Окунь, М. Б. Волошин, ЯФ **20**, 1229 (1974).
5. S. Coleman, Phys. Rev. D **15**, 2929 (1977).
6. C. G. Callan and S. Coleman, Phys. Rev. D **16**, 1762 (1977).

7. S. Coleman and F. DeLuccia, *Phys. Rev. D* **21**, 3305 (1980).
8. W. Israel, *Nuovo Cimento B* **44**, 1 (1966).
9. V. A. Berezin, V. A. Kuzmin, and I. I. Tkachev, *Phys. Rev. D* **36**, 2919 (1987).
10. K. Sato, M. Sasaki, H. Kodama, and K. Maeda, *Progr. Theor. Phys.* **65**, 1443 (1981).
11. K. Sato, M. Sasaki, H. Kodama et al., *Phys. Lett. B* **108**, 103 (1982).
12. H. Kodama, M. Sasaki, and K. Sato, *Progr. Theor. Phys.* **68**, 1979 (1982).
13. H. Kodama, M. Sasaki, K. Sato et al., *Progr. Theor. Phys.* **66**, 2052 (1981).
14. В. А. Березин, В. А. Кузьмин, И. И. Ткачев, *ЖЭТФ* **86**, 785 (1984).
15. В. А. Березин, В. А. Кузьмин, И. И. Ткачев, *Письма в ЖЭТФ* **41**, 446 (1985).
16. V. A. Berezin, V. A. Kuzmin, and I. I. Tkachev, *Phys. Lett. B* **124**, 479 (1983).
17. V. A. Berezin, V. A. Kuzmin, and I. I. Tkachev, *Phys. Lett. B* **120**, 91 (1983).
18. V. A. Berezin, V. A. Kuzmin, and I. I. Tkachev, *Phys. Lett. B* **130**, 23 (1983).
19. J. Ipser and P. Sikivie, *Phys. Rev. D* **30**, 712 (1984).
20. A. Aurilia, G. Denardo, F. Legovivni, and E. Spallucci, *Phys. Lett. B* **147**, 258 (1984).
21. A. Aurilia, G. Denardo, F. Legovivni, and E. Spallucci, *Nucl. Phys. B* **252**, 523 (1985).
22. A. Aurilia, M. Palmer, and E. Spallucci, *Phys. Rev. D* **40**, 2511 (1989).
23. A. Aguirre and M. C. Johnson, *Phys. Rev. D* **72**, 103525 (2005).
24. S. K. Blau, E. I. Guendelman, and A. H. Guth, *Phys. Rev. D* **35**, 1747 (1987).
25. N. S. Kardashev, I. D. Novikov, and A. A. Shatskiy, *Int. J. Mod. Phys. D* **16**, 909 (2007).
26. В. И. Докучаев, С. В. Чернов, *Письма в ЖЭТФ* **85**, 727 (2007).
27. S. V. Chernov and V. I. Dokuchaev, *Class. Quant. Grav.* **25**, 015004 (2008); arXiv:gr-qc/0709.0616v1.
28. В. А. Рубаков, *Письма в ЖЭТФ* **39**, 89 (1984).
29. В. А. Березин, В. А. Кузьмин, И. И. Ткачев, *ЖЭТФ* **93**, 1159 (1987).
30. M. Ishak and K. Lake, *Phys. Rev. D* **65**, 044011 (2002).
31. Я. Б. Зельдович, *ЖЭТФ* **43**, 1037 (1962).
32. V. P. Frolov, M. A. Markov, and V. F. Mukhanov, *Phys. Rev. D* **41**, 383 (1990).
33. И. Д. Новиков, *Письма в ЖЭТФ* **3**, 223 (1966).
34. И. Д. Новиков, *Вестник МГУ, физика, астроном.* № 5, 90 (1962).