

# СОЛИТОННЫЙ РЕЖИМ НЕПРЕРЫВНОГО СТОКСОВА САМОРАССЕЯНИЯ ГИПЕРЗВУКА В ПАРАМАГНИТНОМ КРИСТАЛЛЕ

*А. Н. Бугай<sup>a</sup>, С. В. Сазонов<sup>b\*</sup>*

*<sup>a</sup>Российский государственный университет им. И. Канта  
236041, Калининград, Россия*

*<sup>b</sup>Российский научный центр «Курчатовский институт»  
123182 Москва, Россия*

Поступила в редакцию 26 января 2007 г.,  
после переработки 3 марта 2008 г.

Предложен новый механизм непрерывного преобразования частоты гиперзвука в красную область при его распространении в низкотемпературном парамагнитном кристалле, помещенном в магнитное поле. Импульс поперечного гиперзвука, порождая за счет нелинейности импульс продольной деформации без несущей частоты, сам же в последствии испытывает на нем рассеяние. Как результат, частота поперечного гиперзвука смещается в красную область пропорционально его интенсивности, а дальнейшее распространение обоих импульсов происходит синхронно в солитонном режиме. При этом «красное» смещение частоты поперечного импульса сопровождается сужением его спектра. Для эффективной реализации данного процесса необходимо выполнение условия, при котором линейная групповая скорость поперечного гиперзвука равна фазовой скорости продольной волны деформации. Данные скорости перенормируются благодаря спин-фононному взаимодействию, а их равенства можно добиться изменением величины внешнего магнитного поля. Поперечная структура таких солитонов различается в зависимости от знака дисперсии групповой скорости поперечной компоненты. При положительном знаке возможно существование планарных солитонов, содержащих дефект типа поперечного «темного» вихря в поперечной компоненте и дырки в продольной компоненте. В противоположном случае может иметь место формирование двухкомпонентных акустических «пуль» или локализованных во всех направлениях вихрей.

PACS: 43.25.+y, 43.35.+d

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Вопрос преобразования частоты акустических полей является одним из центральных в нелинейной акустике. Широкое распространение получили такие эффекты как генерация второй гармоники, параметрическое рассеяние звука на звуке [1, 2]. В значительной степени данные явления идентичны соответствующим оптическим эффектам [3]. Вообще говоря, поиск взаимных аналогов в оптике и акустике является одной из современных тенденций развития этих двух областей физики.

В работе [4] теоретически предсказано явление

непрерывного саморассеяния квазимонохроматического оптического импульса обыкновенной волны на порождаемом им же в одноосном кристалле импульсе необыкновенной волны. При этом частота исходного импульса смещается в красную область, а величина данного смещения пропорциональна интенсивности входного импульса, т. е. способна изменяться непрерывным образом [4]. Данное явление может проявиться лишь в условиях близости значений линейных скоростей обыкновенной и необыкновенной компонент оптического импульса.

Следует заметить, что во многом аналогичное явление присутствует в так называемом эффекте оптического выпрямления, используемого для генерации излучения терагерцового диапазона. В соответст-

\*E-mail: sazonov.sergey@gmail.com

ющих экспериментах [5] также наблюдается сдвиг частоты в красную область.

Развивая тезис об оптико-акустических аналогиях [6, 7], следует предпринять попытку поиска эффекта акустического непрерывного саморассеяния и условий его реализации.

В кристаллах, вообще говоря, возможно распространение как продольного, так и поперечного звука. Благодаря нелинейности может осуществляться взаимодействие между этими составляющими акустического поля, аналогичное таковому в описанной выше оптической системе. Если упругая волна распространяется вдоль одной из акустических осей [2], в силу условий симметрии роль ее поперечной компоненты аналогична роли обыкновенной составляющей оптической волны. В то же время продольная акустическая волна ведет себя подобно необыкновенной световой волне [8–10]. Однако линейные скорости продольной и поперечной упругих волн в твердом теле, в отличие от скоростей обыкновенной и необыкновенной компонент оптического поля, различаются (и порой весьма значительно), что уменьшает эффективность взаимодействия между ними.

В качестве решения данной проблемы имеет смысл рассмотреть распространение продольно-поперечной акустической волны в кристалле, снабженном парамагнитными примесями и помещенном в постоянное магнитное поле [8–15]. В результате спин-фононного взаимодействия появляются дополнительные нелинейно-дисперсионные эффекты и, что особенно важно, перенормируются линейные скорости продольного и поперечного звука [11].

Хорошо известно, что наиболее сильное взаимодействие с колебаниями кристаллической решетки испытывают парамагнитные примеси, обладающие эффективным спином  $S = 1$  [16]. В этом случае оно на два–три порядка интенсивнее спин-фононного взаимодействия для спинов  $S = 1/2$ . Поэтому ниже изучим именно случай  $S = 1$ . Кроме того, в целях простоты будем рассматривать в качестве среды ионные кристаллы кубической симметрии.

В реальных средах импульсы имеют конечный поперечный размер (апертуру). Поэтому важной является проблема устойчивости одномерных импульсов к поперечным возмущениям. Если же апертура достаточно мала, то необходимо исследовать поперечную структуру импульса.

Таким образом, целью настоящей работы является исследование акустического непрерывного стокова саморассеяния, нахождение условий его реализации и определение поперечной структуры сформировавшихся акустических импульсов.

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Проанализируем вначале процесс рассеяния акустических волн друг на друге, апеллируя к законам сохранения энергии и импульса для фононов. Пусть на нелинейную диспергирующую среду подается поперечная монохроматическая акустическая волна, характеризуемая частотой  $\omega$  и волновым вектором  $\mathbf{k}_\perp$ . Рассеиваясь на продольной волне с частотой  $\Omega \ll \omega$  и волновым вектором  $\mathbf{k}_\parallel$ , поперечные фононы приобретают частоту  $\omega'$  и волновой вектор  $\mathbf{k}'_\perp$ . Тогда законы сохранения энергии и импульса в элементарных актах рассеяния примут вид

$$\omega = \omega' + \Omega, \quad \mathbf{k}_\perp = \mathbf{k}'_\perp + \mathbf{k}_\parallel.$$

Из второго соотношения легко находим

$$(k_\perp - k'_\perp)^2 + 4k_\perp k'_\perp \sin^2 \frac{\vartheta}{2} = k_\parallel^2, \quad (1)$$

где  $\vartheta$  — угол рассеяния поперечного фонона.

Поскольку предполагается, что  $\Omega \ll \omega, \omega'$ , можно записать

$$k'_\perp = k_\perp + \left( \frac{\partial k'_\perp}{\partial \omega'} \right)_{\omega=\omega'} (\omega' - \omega) = k_\perp - \frac{\Omega}{v_{g\perp}},$$

где  $v_{g\perp}$  — групповая скорость поперечной волны.

Подставляя данное выражение в формулу (1) и учитывая, что  $k_\parallel = \Omega/v_\parallel$ ,  $k_\perp = \omega/v_\perp$ , где  $v_\parallel$  и  $v_\perp$  — фазовые скорости соответственно продольной и поперечной волн, получим

$$\left( \frac{1}{v_{g\perp}^2} - \frac{1}{v_\perp^2} \right) \Omega^2 = \frac{4\omega}{v_{g\perp}} \left( \frac{\Omega}{v_{g\perp}} - \frac{\omega}{v_\perp} \right) \sin^2 \frac{\vartheta}{2}. \quad (2)$$

Данное соотношение следует рассматривать как квадратное уравнение для нахождения частоты  $\Omega$  генерируемых продольных фононов. В отсутствие дисперсии  $v_{g\perp} = v_\perp$ . Тогда, учитывая, что  $\Omega \ll \omega$ , в скобках правой части (2) можно пренебречь первым слагаемым, и выражение (2) примет вид

$$\left( \frac{1}{v_\perp^2} - \frac{1}{v_\parallel^2} \right) \Omega^2 = -4 \left( \frac{\omega}{v_\perp} \right)^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}. \quad (3)$$

Для всех кристаллов справедливо условие  $v_\parallel > v_\perp$  [17]. Следовательно, последнему равенству удовлетворить невозможно. Если же рассматривать рассеяние продольного фонона на порождаемом им поперечном фононе, то в данном равенстве следует провести замены  $v_\parallel \leftrightarrow v_\perp$ . В этом случае равенство (3) удовлетворяется. Таким образом, механизм

генерации одного класса фононов другими имеет черенковскую природу: скорость исходных фононов должна превышать скорость генерируемых.

Если среда обладает акустической дисперсией, то в принципе можно удовлетворить условию  $v_{g\perp} > v_{\parallel}$ , а вместе с ним и равенству (3). Ниже будем рассматривать акустические импульсы гиперзвуковых частот  $\omega \sim 10^{11} \text{ с}^{-1}$ , что соответствует длинам волн  $\lambda \sim 10^{-6} \text{ см}$ . В этих условиях следует учитывать дисперсию, обусловленную дискретной структурой кристалла (пространственную дисперсию). Дополнительную (временную) дисперсию могут вызвать парамагнитные примеси, эффективно взаимодействующие с гиперзвуком (спин-фононное взаимодействие). В качестве примеров можно привести примесные ионы  $\text{Fe}^{2+}$  или  $\text{Ni}^{2+}$  в матрице кубического кристалла  $\text{MgO}$  [18], характеризующиеся эффективным спином  $S = 1$ .

Рассмотрим ситуацию, когда выполнено условие

$$v_{g\perp} = v_{\parallel}, \quad (4)$$

называемое в теории нелинейных волн резонансом Захарова–Бенни (РЗБ) [19]. Тогда при  $\vartheta = 0$  равенство (2) превращается в тождество, т. е. выполняется при любых значениях  $\Omega$ . Следовательно, при условии (4) и рассеянии вперед величина смещения  $\Omega = \omega - \omega'$  частоты исходного акустического поля не может быть определена из рассмотрения элементарных актов фонон-фононных взаимодействий. В этих условиях данный параметр должен определяться коллективными процессами, т. е. может зависеть от интенсивности акустических полей. Для соответствующего исследования необходим анализ решений системы волновых уравнений, описывающих нелинейное взаимодействие продольной и поперечной акустических волн.

Пусть кубический кристалл, содержащий парамагнитные примеси с эффективным спином  $S = 1$ , помещен во внешнее магнитное поле  $\mathbf{B}_0$ , параллельное одной из осей  $z$  кристаллической симметрии четвертого порядка. Перпендикулярно к  $\mathbf{B}_0$ , вдоль другой оси симметрии четвертого порядка (оси  $x$ ), распространяется акустический импульс, состоящий, вообще говоря, из продольной и поперечной компонент. При этом поперечная составляющая импульса поляризована вдоль третьей оси симметрии четвертого порядка (оси  $y$ ). В этих условиях гамильтониан акустического поля запишется в виде [1, 11, 20]

$$H_a = \frac{1}{2} \int \left\{ \frac{p_x^2 + p_y^2}{\rho_m} + c_{11}\eta_{xx}^2 + c_{44}\eta_{yx}^2 + \frac{c_{111}}{3}\eta_{xx}^3 + \frac{c_{166}}{3}\eta_{yx}^2\eta_{xx} + c_{44}(\nabla_{\perp}u_x)^2 + c_{44}(\nabla_{\perp}u_y)^2 - \frac{h^2}{12} \left[ c_{11} \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} \right)^2 + c_{44} \left( \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} \right)^2 \right] \right\} d\mathbf{r}. \quad (5)$$

Здесь  $\rho_m$  — средняя плотность среды,  $(u_x, u_y)$  и  $(p_x, p_y)$  — декартовы компоненты соответственно вектора  $\mathbf{u}$  локальных смещений кристалла и плотности  $\mathbf{p}$  их импульса,  $c_{11}, c_{44}$  — линейные модули упругости,  $c_{111}, c_{166}$  — составляющие тензора нелинейного модуля упругости третьего порядка,  $\nabla_{\perp}$  — поперечный градиент,  $h$  — постоянная кристаллической решетки в направлении оси  $x$ ,  $\eta_{jk}$  ( $j, k = x, y$ ) — компоненты тензора деформации, определяемые соотношениями [1]

$$\eta_{jk} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \sum_l \frac{\partial u_l}{\partial x_j} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right).$$

Интегрирование в правой части (5) осуществляется по всему объему среды.

В формуле (5) учтены нелинейные эффекты, соответствующие ангармонизму низшего, третьего, порядка. Следовательно, в данном выражении необходимо оставить члены  $\partial u_j / \partial x$  не выше третьей степени.

Дополним (5) гамильтоновыми операторами зеемановского  $\hat{H}_Z$  и спин-фононного  $\hat{V}$  взаимодействий [11]:

$$\hat{H}_Z = \hbar\omega_0\hat{S}_z, \quad (6)$$

$$\hat{V} = \frac{3}{2}G_{11}\hat{S}_x^2 \left( \eta_{xx} + \alpha_{xx}h^2\frac{\partial^2\eta_{xx}}{\partial x^2} \right) + G_{44}(\hat{S}_x\hat{S}_y + \hat{S}_y\hat{S}_x) \left( \eta_{yx} + \alpha_{yx}h^2\frac{\partial^2\eta_{yx}}{\partial x^2} \right), \quad (7)$$

где  $\hbar$  — постоянная Планка,  $\omega_0 = g\mu_B B_0 / \hbar$  — частота расщепления зеемановского триплета,  $g$  — фактор Ланде,  $\mu_B$  — электронный магнетон Бора,  $G_{11}$  и  $G_{44}$  — компоненты тензора спин-фононного взаимодействия, связывающие эффективные спины соответственно с продольной и поперечной составляющими акустического поля,  $\alpha_{xx}, \alpha_{yx}$  — постоянные параметры порядка единицы, учитывающие нелокальность спин-фононного взаимодействия [11, 20],  $\hat{S}_x, \hat{S}_y, \hat{S}_z$  — трехрядные спиновые матрицы [16].

При записи выражений (5), (7) принято паракарсимальное приближение  $|\partial u_j / \partial x| \gg |\nabla_{\perp} u_j|$ , соответствующее слабой зависимости поля импульса от

поперечных координат. Акустический ангармонизм, определяемый компонентами  $c_{111}$  и  $c_{166}$  нелинейного модуля упругости и пространственная дисперсия имеют характер разложения, поэтому в силу параксиального приближения в данных слагаемых необходимо учитывать лишь производные по переменной  $x$ .

Ниже для исследования самосогласованной динамики акустического поля и эффективных спинов используем полуклассический подход [10, 17], согласно которому спиновая динамика описывается уравнениями для элементов  $\rho_{jl}$  ( $j, l = 1, 2, 3$ ) матрицы плотности, а динамика акустического поля — уравнениями Гамильтона для сплошной среды.

В результате из (5)–(7) для эффективных спинов приходим к материальным уравнениям типа Блоха:

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial t} + \frac{R}{T_2} &= -2i\omega_0 R + 2i\Omega_R W, \\ \frac{\partial W}{\partial t} &= i(\Omega_R^* R - \Omega_R R^*), \end{aligned} \quad (8)$$

а для компонент деформации — к нелинейным волновым уравнениям вида

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial t^2} - a_{\parallel}^2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial x^2} + a_{\parallel}^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\Gamma \varepsilon_{xx}^2 + 2\Gamma_{\perp} \varepsilon_{yx}^2) - \\ - \frac{h^2}{12} a_{\parallel}^2 \frac{\partial^4 \varepsilon_{xx}}{\partial x^4} - a_{\perp}^2 \Delta_{\perp} \varepsilon_{xx} = \frac{nG_{11}}{2\rho_m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \times \\ \times \left( (R + R^*)(1 + \varepsilon_{xx}) + \alpha_{xx} h^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} (R + R^*) \right), \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_{yx}}{\partial t^2} - a_{\perp}^2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{yx}}{\partial x^2} + a_{\parallel}^2 \Gamma_{\perp} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\varepsilon_{xx} \varepsilon_{yx}) - \\ - \frac{h^2}{12} a_{\perp}^2 \frac{\partial^4 \varepsilon_{yx}}{\partial x^4} - a_{\perp}^2 \Delta_{\perp} \varepsilon_{yx} = \\ = i \frac{nG_{44}}{2\rho_m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( R - R^* + \alpha_{yx} h^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} (R - R^*) \right) + \\ + \frac{nG_{11}}{2\rho_m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( (R + R^*) \varepsilon_{yx} \right). \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь  $R \equiv \rho_{31}$ ,  $W = (\rho_{33} - \rho_{11})/2$  (нумерация уровней идет снизу вверх по энергетической шкале),  $\Omega_R = \Omega_{\parallel} - i\Omega_{\perp}$ ,  $T_2$  — время необратимой фазовой релаксации, введенное феноменологическим образом [6, 7, 16],

$$\begin{aligned} \Omega_{\parallel} &= \frac{3G_{11}}{4\hbar} \left( \varepsilon_{xx} + \frac{1}{2} (\varepsilon_{xx}^2 + \varepsilon_{yx}^2) + \alpha_{xx} h^2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial x^2} \right), \\ \Omega_{\perp} &= \frac{G_{44}}{2\hbar} \left( \varepsilon_{yx} + \alpha_{yx} h^2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{yx}}{\partial x^2} \right), \end{aligned}$$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yx} = \frac{\partial u_y}{\partial x},$$

$\Gamma = -(3/2)(1 + c_{111}/c_{11})$  — постоянная Грюнайзена [2],  $\Gamma_{\perp} = -(1 + c_{166}/c_{11})$ , скорости продольного и поперечного звука в отсутствие парамагнитных примесей определяются соответственно выражениями  $a_{\parallel} = \sqrt{c_{11}/\rho_m}$ ,  $a_{\perp} = \sqrt{c_{44}/\rho_m}$ ,  $n$  — концентрация парамагнитных ионов,  $\Delta_{\perp}$  — поперечный лапласиан.

Во втором уравнении (8) мы пренебрегли необратимой энергетической релаксацией, характеризуемой временем  $T_1$  и обусловленной некогерентным спин-фононным взаимодействием. В рассматриваемых здесь условиях это вполне допустимо, так как  $T_1 \gg T_2$  и необратимое затухание гиперзвука вызвано в основном фазовой релаксацией. В системе (8)–(10) мы не учитываем также неоднородное уширение переходов между зеемановскими подуровнями, так как ниже в настоящей работе будем считать, что спектры продольной и поперечной компонент акустического импульса лежат далеко от резонансной линии рассматриваемого спин-фононного перехода  $1 \leftrightarrow 3$ . Поэтому неоднородное уширение не может решающим образом повлиять на динамику акустического импульса. При таких условиях под  $\omega_0$  в формуле (8) следует понимать центральную частоту контура резонансной линии.

Спин-фононное взаимодействие может сколько-нибудь эффективно сказаться на распространении гиперзвука, если заметное значение имеет равновесная разность населенностей  $W_{\infty}$  зеемановских подуровней. Поскольку данные подуровни перед импульсным воздействием заселены в соответствии с больцмановским распределением, разность населенностей ощутима при температурах  $T \leq \hbar\omega_0/k_B$ , где  $k_B$  — постоянная Больцмана. Взяв  $\omega_0 \sim 10^{11}$  с<sup>-1</sup>, получим  $T \leq 1$  К. При таких температурах можно с хорошей точностью пренебречь затуханием гиперзвука, обусловленным его рассеянием на тепловых фононах и дефектах кристалла [2, 16]. По этой причине в уравнениях (9) и (10) соответствующие слагаемые отсутствуют. Подкрепим данное положение численными оценками. В рассматриваемом здесь кристалле MgO основной вклад в затухание звука гиперзвуковых частот при температурах жидкого гелия (или азота) вносит механизм Ландау–Румера рассеяния когерентных фононов на тепловых [16]. При этом коэффициент затухания  $\alpha_s$  пропорционален  $\omega T^4$ , где  $\omega$  — частота акустической волны [2, 16]. Как показывают эксперименты, для MgO при  $T \approx 45$  К и  $\omega \sim 10^{10}$  с<sup>-1</sup> коэффициент затухания

$\alpha_s \approx 70 \text{ см}^{-1}$  [21]. Тогда при  $T \approx 1 \text{ К}$  имеем  $\alpha_s \approx 70 \cdot 45^{-4} \sim 10^{-5} \text{ см}^{-1}$  и для кристаллических образцов с характерными размерами  $l_c \approx 10 \text{ см}$  данный механизм затухания гиперзвука исчезающе мал.

Уравнения (8) описывают динамику двухуровневой системы в поле импульса деформации. Обе компоненты акустического импульса в рассматриваемой геометрии распространения по отношению к магнитному полю вызывают квантовый переход  $1 \leftrightarrow 3$  в системе спиновых зеемановских подуровней. Средний уровень при этом не вовлекается во взаимодействие с полем.

Именно последнее обстоятельство эффективно сводит динамические уравнения для спина  $S = 1$  к блоховским уравнениям, справедливым для  $S = 1/2$ . Важно, однако, отметить, что в нашем случае рассмотрен именно спин  $S = 1$ , наиболее сильно взаимодействующий с колебаниями кристаллической решетки за счет механизма Ван Флека [7, 16]. В этом случае локальные деформации создают градиенты внутрискристаллического электрического поля, которые, в свою очередь, вызывают электро-квадрупольные переходы между зеемановскими подуровнями. Заметим, что данный механизм не способен проявиться для  $S = 1/2$ , так как в этом случае роль  $\hat{S}_j (j = x, y, z)$  выполняют матрицы Паули, для которых  $\hat{S}_x^2 = \hat{I}$ ,  $\hat{S}_x \hat{S}_y + \hat{S}_y \hat{S}_x = 0$  (см. (7)). Это приводит к отсутствию спин-фононного взаимодействия за счет механизма Ван Флека. При  $S = 1/2$  данное взаимодействие обусловлено модуляцией спин-орбитальной связи [16], т.е. является релятивистским, а соответствующий гамильтониан линеен по спиновым операторам. По этой причине спин  $S = 1/2$  значительно слабее связан с колебаниями кристалла [16]. Следовательно, с точки зрения экспериментов гораздо предпочтительнее использовать парамагнитные примеси с эффективным спином  $S = 1$  [18].

Система (8)–(10) самосогласованным образом описывает динамику эффективных спинов и продольно-поперечного акустического поля.

### 3. ПРИБЛИЖЕНИЕ ВОЛНОВОЙ ПРОЗРАЧНОСТИ И НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНОВЫЕ УРАВНЕНИЯ

Исключим из системы (8)–(10) материальные переменные  $R$  и  $W$ , выразив их через компоненты деформации акустического поля. Используем для этого приближение волновой прозрачности [22, 23]:

$$\delta \equiv (2\omega_0 \tilde{\tau})^{-1} \ll 1, \quad (11)$$

где  $\tilde{\tau}$  — характерный минимальный временной масштаб акустического импульса.

Данное приближение означает упомянутое выше отсутствие в спектре импульса фурье-компонент, резонансных квантовому переходу  $1 \leftrightarrow 3$ . Для импульса длительности  $\tau_p \approx 1 \text{ нс}$ , обладающего несущей частотой  $\omega \sim 10^{10} \text{ с}^{-1}$  имеем  $\tilde{\tau}^{-1} \sim \omega$  и  $\delta \sim 0.1$  при  $2\omega_0 \sim 10^{11} \text{ с}^{-1}$ . Если же наносекундный импульс не обладает несущей частотой, то  $\tilde{\tau} \sim \tau_p$  и  $\delta \sim 10^{-2}$ . В то же время  $T_2 \sim 10^{-6} \text{ с}$  [7]. Тогда  $T_2/\tilde{\tau} \sim 10^3\text{--}10^4$ . В этих условиях первое уравнение (8) можно разрешить относительно переменной  $R$  с помощью последовательных приближений по его левой части. В нулевом приближении имеем  $R = W\Omega_R/\omega_0$ . Подставляя данное выражение в левую часть первого уравнения (8), получим первое приближение и т.д. В результате придем к разложению

$$R = \frac{W\Omega_R}{\omega_0} + \frac{i}{2\omega_0^2} \frac{\partial}{\partial t} (W\Omega_R) - \frac{1}{4\omega_0^3} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (W\Omega_R) - \frac{1}{2\omega_0^3 T_2} \frac{\partial}{\partial t} (W\Omega_R) + \dots \quad (12)$$

Отсюда и из второго уравнения (8) следует, что изменение значения инверсии  $W$  в низшем порядке относительно  $\delta$  пропорционально квадрату величины  $\Omega_R$ . Тогда, как видно из (12), низшая степень нелинейности по  $\Omega_R$  в разложении (12) равна трем. С другой стороны, в (9), (10) пренебрежено кубической нелинейностью, а учтена только квадратичная нелинейность относительно компонент тензора деформации. По этой причине в выражении (12) также следует пренебречь кубической нелинейностью (изменением инверсии) и положить  $W = W_\infty$ . Это еще одна причина, по которой здесь можно не учитывать процессы необратимой энергетической релаксации. Подставляя получившееся выражение в правые части (9), (10) и используя приближение медленно меняющегося профиля [22] с учетом того, что нелинейность и дисперсия имеют характер разложений по малому параметру  $\delta$ , получим

$$\frac{\partial \varepsilon_{yx}}{\partial t} - \beta_\perp \frac{\partial}{\partial \zeta} (\varepsilon_{xx} \varepsilon_{yx}) - \frac{\sigma}{2} \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial \zeta^2} + g_\perp \frac{\partial^3 \varepsilon_{yx}}{\partial \zeta^3} - \eta_\perp \frac{\partial^2 \varepsilon_{yx}}{\partial \zeta^2} = -\frac{a_\perp^2}{2v_\perp} \Delta_\perp \int_{-\infty}^{\zeta} \varepsilon_{yx} d\zeta', \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial t} + \frac{v_{\parallel}^2 - v_{\perp}^2}{2v_{\perp}} \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial \zeta} - \frac{\partial}{\partial \zeta} (\beta_{\parallel} \varepsilon_{xx}^2 + 2\beta_{\perp} \varepsilon_{yx}^2) + \\ + \frac{\sigma}{2} \frac{\partial^2 \varepsilon_{yx}}{\partial \zeta^2} + g_{\parallel} \frac{\partial^3 \varepsilon_{xx}}{\partial \zeta^3} - \eta_{\parallel} \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial \zeta^2} = \\ = -\frac{a_{\perp}^2}{2v_{\perp}} \Delta_{\perp} \int_{-\infty}^{\zeta} \varepsilon_{xx} d\zeta'. \quad (14) \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} \zeta = x - v_{\perp} t, \quad \beta_{\perp} = \frac{a_{\parallel}^2 \Gamma_{s\perp}}{2v_{\perp}}, \quad \beta_{\parallel} = \frac{a_{\parallel}^2 \Gamma_s}{2v_{\perp}}, \\ g_{\perp} = \frac{a_{\perp}^2 v_{\perp}}{24\omega_0^2} \left[ \kappa_{\perp} \left( \frac{\omega_0 h}{v_{\perp}} \right)^2 + 3\mu_{\perp} \right], \\ g_{\parallel} = \frac{a_{\parallel}^2 v_{\perp}}{24\omega_0^2} \left[ \kappa_{\parallel} \left( \frac{\omega_0 h}{v_{\perp}} \right)^2 + 3\mu_{\parallel} \right], \\ \mu_{\parallel} = -\frac{9nG_{11}^2 W_{\infty}}{8\hbar\omega_0 \rho_m a_{\parallel}^2}, \quad \mu_{\perp} = -\frac{nG_{44}^2 W_{\infty}}{2\hbar\omega_0 \rho_m a_{\perp}^2}, \\ \sigma = -\frac{3nG_{11}G_{44}W_{\infty}}{8\hbar\omega_0^2 \rho_m}, \quad \eta_{\perp} = \frac{\mu_{\perp} a_{\perp}^2}{4\omega_0^2 T_2}, \quad \eta_{\parallel} = \frac{\mu_{\parallel} a_{\parallel}^2}{4\omega_0^2 T_2}, \\ v_{\parallel} = a_{\parallel} \sqrt{1 - \mu_{\parallel}}, \quad v_{\perp} = a_{\perp} \sqrt{1 - \mu_{\perp}}, \quad \Gamma_s = \Gamma + \frac{3\mu_{\parallel}}{2}, \\ \Gamma_{s\perp} = \Gamma_{\perp} + \frac{\mu_{\parallel}}{4}, \quad \kappa_{\parallel} = 1 - 24\mu_{\parallel} \alpha_{xx}, \\ \kappa_{\perp} = 1 - 24\mu_{\perp} \alpha_{yx}. \end{aligned}$$

Параметры  $v_{\parallel}$  и  $v_{\perp}$  имеют смысл линейных скоростей продольной и поперечной низкочастотных волн деформации при наличии в кристалле парамагнитных примесей и спин-фононного взаимодействия. При термодинамическом равновесии  $W_{\infty} < 0$ , поэтому  $\mu_{\parallel}, \mu_{\perp} > 0$ . Таким образом, из-за спин-фононного взаимодействия обе скорости уменьшаются. Можно говорить также о смягчении линейных упругих модулей кристалла. Если  $\mu_{\parallel} > 1$  или  $\mu_{\perp} > 1$ , возникает фазовый переход, сопровождаемый возникновением спонтанной деформации [24]. В настоящей работе мы не будем касаться фазового перехода, т. е. будем считать, что  $\mu_{\parallel} < 1$  и  $\mu_{\perp} < 1$ .

Параметры  $\Gamma_s$  и  $\Gamma_{s\perp}$  характеризуют квадратичные нелинейности соответственно по объемной и сдвиговой деформациям. Первый из них является параметром Грюнайзена, перенормированным за счет присутствия парамагнитных примесей и спин-фононного взаимодействия. Параметром Грюнайзена определяется способность кристалла к тепловому расширению, поэтому, как видно из выражения для  $\Gamma_s$ , последняя возрастает с ростом концентрации в нем парамагнитных ионов.

Параметр  $\sigma$  характеризует вращательную дисперсию или акустический эффект Фарадея. Коэффициентами  $\kappa_{\parallel}$  и  $\kappa_{\perp}$  определяется собственная пространственная дисперсия соответственно поперечной и продольной компонент. При этом единицы (первые слагаемые) в выражениях для этих коэффициентов соответствуют акустической пространственной дисперсии, не связанной со спин-фононным взаимодействием. Вторые же слагаемые в данных выражениях определяют пространственную дисперсию, вызванную пространственной нелокальностью спин-фононной связи. Как видно, эти механизмы вносят вклады в дисперсию с противоположными знаками. Вторыми слагаемыми в квадратных скобках выражений для  $g_{\perp}$  и  $g_{\parallel}$  определяется временная дисперсия, обусловленная спин-фононным взаимодействием.

Последними слагаемыми в левых частях (13), (14) определяется затухание гиперзвука, обусловленное необратимой фазовой релаксацией при спин-фононном взаимодействии.

Продольная и поперечная компоненты акустического поля неравноправным образом входят в нелинейные слагаемые (13) и (14): поперечная составляющая способна за счет нелинейности породить продольную при отсутствии последней на входе в среду, в то время как противоположный процесс невозможен. Это обстоятельство является принципиальным для дальнейшего рассмотрения. Как было сказано выше, наиболее эффективно процесс генерации продольного акустического поля поперечным гиперзвуком развивается при условии РЗБ (4). Определим значения параметров среды, при которых данное условие может быть выполнено.

Представим поперечную составляющую акустического поля в виде квазимонохроматического импульса с несущими частотой  $\omega$ , волновым числом  $k$  и медленно меняющейся (в стандартном смысле) огибающей  $\psi$ :

$$\varepsilon_{yx} = \frac{1}{2} \psi(\mathbf{r}, t) \exp[i(\omega t - kx)] + \text{c.c.} \quad (15)$$

В то же время будем считать, что продольная компонента не имеет несущей частоты. В этом случае поперечная компонента является высокочастотной, а спектр продольной составляющей центрирован на нулевой частоте. В этих условиях, как легко видеть из формул (13) и (14), можно пренебречь вращательной дисперсией. Полагая сначала в выражении (15)  $\psi = \text{const}$ , приходим в одномерном случае к дисперсионному уравнению

$$\omega = v_{\perp} k - g_{\perp} k^3 + i\eta_{\perp} k^2. \quad (16)$$

Здесь последнее слагаемое определяет затухание поперечного гиперзвука. Считая его малым (ниже будут проведены соответствующие оценки), найдем отсюда групповую скорость

$$v_g = \partial\omega/\partial k = v_{\perp} - 3g_{\perp}k^2.$$

Тогда условие (4) эквивалентно равенству

$$v_{\perp} - v_{\parallel} \approx \frac{v_{\perp}^2 - v_{\parallel}^2}{2v_{\perp}} \approx 3g_{\perp}k^2.$$

Используя выражения для  $v_{\perp}$ ,  $v_{\parallel}$  и  $g_{\perp}$ , перепишем предыдущее соотношение в виде

$$1 - \mu_{\perp} - \left(\frac{a_{\parallel}}{a_{\perp}}\right)^2 (1 - \mu_{\parallel}) = \left(\frac{\omega}{2\omega_0}\right)^2 \left[ \kappa_{\perp} \left(\frac{\omega_0 \hbar}{v_{\perp}}\right)^2 + 3\mu_{\perp} \right].$$

В силу условия (11) имеем  $(\omega/\omega_0)^2 \ll 1$ . Считая, кроме того, что  $(a_{\parallel}/a_{\perp})^2 \approx 2$  [17] и  $(G_{11}/G_{44})^2 \approx 10$  [16] и положив величину в квадратных скобках, приблизительно равной единице, найдем, что  $\mu_{\parallel} \gg \mu_{\perp}$  и

$$\left(\frac{a_{\parallel}}{a_{\perp}}\right)^2 (1 - \mu_{\parallel}) \approx 1 - \mu_{\perp} - \delta \approx 1.$$

Тогда  $\mu_{\parallel} \approx 1 - (a_{\parallel}/a_{\perp})^2 \approx 1/2$ , в то время как  $\mu_{\perp} \ll 1$ . Используя теперь выражение для  $\mu_{\parallel}$ , получим для концентрации парамагнитных примесей, при которой можно удовлетворить условию РЗБ:

$$n \sim \hbar\omega_0\rho_m a_{\parallel}^2/G_{11}^2.$$

Взяв  $G_{11} \sim 10^{-13}$  эрг [6],  $\omega_0 \sim 10^{11}$  с<sup>-1</sup> [6, 7],  $\rho_m \sim 1$  г/см<sup>3</sup>,  $a_{\parallel} \approx 5 \cdot 10^5$  см/с, найдем  $n \sim 10^{21}$  см<sup>-3</sup>, что составляет порядка процента по концентрации относительно атомов, образующих кубический кристалл.

Из уравнения (16) видно, что коэффициент затухания поперечного гиперзвука

$$\alpha_{s\perp} \approx \frac{\eta_{\perp}k^2}{v_{\perp}} \approx \frac{\mu_{\perp}}{4v_{\perp}T_2} \left(\frac{a_{\perp}}{v_{\perp}}\right)^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2.$$

Аналогично для коэффициента затухания продольной компоненты акустического поля имеем

$$\alpha_{s\parallel} \approx \frac{\eta_{\parallel}k^2}{v_{\parallel}} \approx \frac{\mu_{\parallel}}{4v_{\parallel}T_2} \left(\frac{a_{\parallel}}{v_{\parallel}}\right)^2 (\omega_0\tau_p)^{-2}.$$

Здесь с учетом того, что продольная компонента не имеет несущей частоты, совершена замена  $\omega \rightarrow 1/\tau_p$ .

Полагая  $\mu_{\perp} \sim 0.1$ ,  $\omega \sim 10^{10}$  с<sup>-1</sup>,  $\omega_0 \sim 10^{11}$  с<sup>-1</sup>,  $v_{\perp} \approx a_{\perp} \approx 3 \cdot 10^5$  см/с,  $T_2 \sim 10^{-6}$  с, найдем  $\alpha_{s\perp} \sim 10^{-3}$  см<sup>-1</sup>. При  $\mu_{\parallel} \approx 1/2$  и  $\tau_p \sim 1$  нс имеем также  $\alpha_{s\parallel} \sim 10^{-3}$  см<sup>-1</sup>. Такое затухание не может быть сколько-нибудь существенным для кристаллических образцов с характерными размерами  $l_c \sim 10$  см. Здесь большая концентрация парамагнитных примесей, оцениваемая как  $10^{21}$  см<sup>-3</sup>, не вносит существенного вклада в затухание акустической волны из-за нерезонансности спин-фононного взаимодействия. Таким образом, последними слагаемыми в левых частях (13) и (14) можно пренебречь. Понятно, что дисперсия существенна, главным образом, для высокочастотной поперечной составляющей. Тогда дисперсией продольной компоненты можно пренебречь.

Подставляя (15) в (13), (14), учитывая дисперсию минимальным образом и пренебрегая относительно быстро осциллирующими слагаемыми, приходим к системе

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{\omega_2}{2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2} - \beta_{\perp}k\varepsilon_{xx}\psi = \frac{a_{\perp}^2}{2v_{\perp}k}\Delta_{\perp}\psi, \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varepsilon_{xx}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial\xi}(\beta_{\parallel}\varepsilon_{xx}^2 + \beta_{\perp}|\psi|^2) = \\ = -\frac{a_{\perp}^2}{2v_{\perp}}\Delta_{\perp}\int_{-\infty}^{\xi}\varepsilon_{xx}d\xi', \quad (18) \end{aligned}$$

где  $\xi = x - v_g t$ ,

$$\omega_2 = -\partial^2\omega/\partial k^2 = 6g_{\perp}k$$

— параметр дисперсии групповой скорости (ДГС) для несущей частоты поперечной компоненты.

#### 4. АНАЛИЗ НЕПРЕРЫВНОГО СТОКСОВА САМОРАССЕЯНИЯ НА ОСНОВЕ ОДНОМЕРНОГО СОЛИТОННОГО РЕШЕНИЯ

Рассмотрим одномерные солитоноподобные решения системы (17), (18). В этом случае правые части данной системы полагаются равными нулю. Если, кроме того, пренебречь первым слагаемым в скобках левой части (18), то данная система сводится к системе Ядзими–Оикавы, интегрируемой с помощью метода обратной задачи рассеяния [25] и вытекающей из системы Захарова [26] в результате редукции к однонаправленному распространению.

Условие малости первого слагаемого в скобках левой части (18) в сравнении со вторым слагаемым можно представить в виде

$$\gamma \equiv \frac{8\beta_{\parallel}\varepsilon_m^2}{3\beta_{\perp}\psi_m^2} \ll 1,$$

где  $\psi_m$  и  $\varepsilon_m$  — амплитудные значения  $\psi$  и  $\varepsilon$ . В дальнейшем для определенности будем именовать первое слагаемое в скобках левой части (18) собственной нелинейностью продольной компоненты (в отличие от «индуцированной» нелинейности, определяемой поперечной компонентой деформации).

Считая, что  $\gamma$  является малым параметром, можно получить решение уравнений (17), (18) типа уединенной волны в виде разложения, ограничиваясь первой степенью  $\gamma$ :

$$\psi = \psi_m \operatorname{sch} \left( \frac{x-vt}{l} \right) \exp[-i(\Omega t - qx)] \times \left[ 1 + \frac{\gamma}{4} - \frac{\gamma}{8} \operatorname{sch}^2 \left( \frac{x-vt}{l} \right) \right], \quad (19)$$

$$\varepsilon_{xx} = -\varepsilon_m \operatorname{sch}^2 \left( \frac{x-vt}{l} \right) \times \left[ 1 + \frac{\gamma}{8} - \frac{5\gamma}{16} \operatorname{sch}^2 \left( \frac{x-vt}{l} \right) \right], \quad (20)$$

где

$$\psi_m = \frac{\omega_2}{\beta_{\perp} l} \sqrt{\frac{q}{k}}, \quad \varepsilon_m = \frac{\omega_2}{\beta_{\perp} k l^2},$$

$$\Omega = v_g q + \frac{\omega_2}{2} \left( q^2 - \frac{1}{l^2} \right), \quad (21)$$

а скорость солитона определяется выражением

$$v = v_g + \omega_2 q. \quad (22)$$

Полученное возмущенное решение, вообще говоря, не является солитоном в строгом смысле этого слова, так как взаимодействие таких импульсов является неупругим. Тем не менее, следуя общепринятой традиции в нелинейной оптике и нелинейной акустике, в дальнейшем будем использовать термин солитон вместо уединенной волны.

Роль свободных параметров в решении (19)–(22) играют характерный продольный размер солитона  $l$  и величина  $q$  смещения волнового числа.

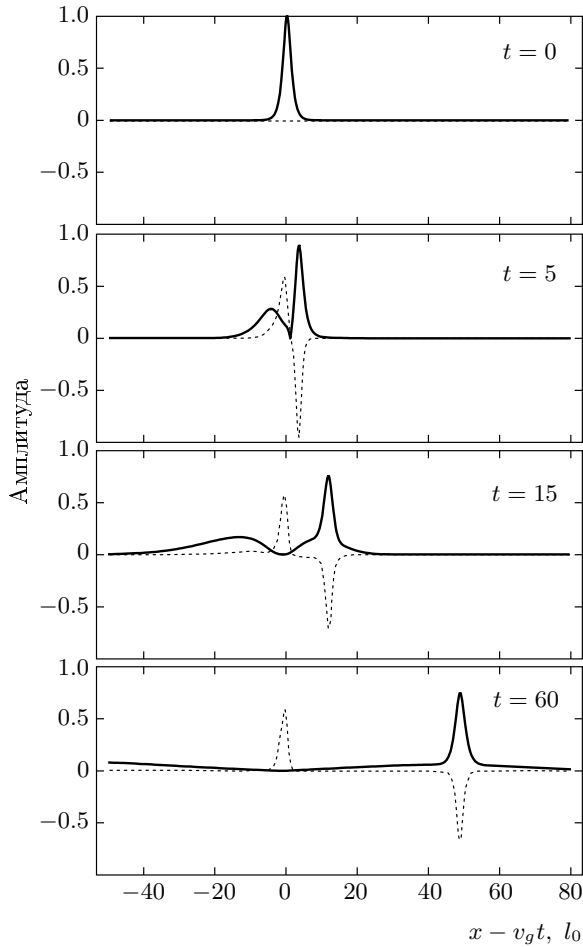
Решение (19)–(22) является двухпараметрическим, т. е. зависит от двух свободных параметров.

В качестве таковых удобно рассматривать продольный размер солитона  $l$  и величину  $q$  смещения волнового числа. Что касается параметра  $\Omega$ , то он имеет смысл нелинейного сдвига несущей частоты квази-монохроматической компоненты солитона в результате ее рассеяния на импульсе продольной деформации вида (20). Из выражения для  $\psi_m$  следует, что  $q \geq 0$ . Отсюда, а также из (15) и (19) приходим к выводу об отрицательном сдвиге волнового числа поперечной составляющей акустического импульса:  $k \rightarrow k - q$ . Согласно определению,  $\omega_2 = -\partial^2 \omega / \partial k^2 \sim v_g / k$ . В соответствии с приближением квазиднонаправленного распространения  $\omega_2 q \ll v_g$  (см. (22)). В силу же приближения медленно меняющейся огибающей  $q \ll k$  и  $kl \gg 1$ . Следовательно, выражение (21) с хорошей точностью можно переписать в виде  $\Omega \approx v_g q > 0$ . Таким образом, частота поперечной компоненты испытывает сдвиг в красную область спектра:  $\omega \rightarrow \omega - \Omega$ . Это соответствует потере энергии поперечными фононами при возбуждении ими продольных фононов и последующем рассеянии на них. Как было выяснено во втором разделе настоящей статьи, при условии (4) и рассеянии вперед ( $\vartheta = 0$ ) значение  $\Omega$  не может быть определено из законов сохранения энергии и импульса в элементарных актах фонон-фононного рассеяния.

Величина  $\Omega$  зависит от входных параметров поперечного импульса и может быть определена из соответствующей обратной спектральной задачи. Другой способ определения частотного сдвига состоит в непосредственном численном интегрировании системы (17), (18) при различных входных параметрах световых импульсов. Здесь же можно заметить, что, как видно из выражения для  $\psi_m$ , асимптотическое значение красного частотного сдвига увеличивается пропорционально интенсивности  $I_{\perp} \sim \psi_m^2$  входного поперечного импульса или плотности образующих данный импульс фононов, характеризуясь, таким образом, коллективными, а не элементарными процессами. Вследствие данного сдвига скорость солитона отклоняется от  $v_g$ , что приводит к нарушению условия РЗБ (4). В результате нелинейное взаимодействие между компонентами акустического импульса ослабевает и красный частотный сдвиг испытывает насыщение, достигая максимума на некоторой длине своего распространения.

Чтобы проиллюстрировать типичный характер протекания процесса рассеяния, мы проинтегрировали уравнения (17), (18) численно в одномерном случае (см. рис. 1). Как видно из рис. 1, в процессе рассеяния происходит перекачка энергии из попе-



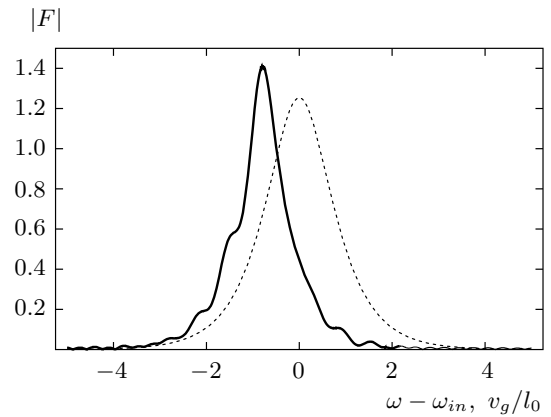


**Рис. 1.** Эволюция импульса в процессе саморассеяния в случае положительной ДГС ( $\omega_2 > 0$ ). Величины модуля огибающей поперечной компоненты  $|\psi|$  (сплошная линия) и поля продольной компоненты  $\varepsilon_{xx}$  (пунктирная линия) нормированы соответственно на  $|\omega_2|/\beta_{\perp} \sqrt{kl_0^3}$  и  $|\omega_2|/\beta_{\perp} kl_0$ . Пространственный масштаб задан в единицах начальной протяженности  $l_0$  поперечного импульса, временной масштаб — в единицах  $l_0^2/|\omega_2|$

речной компоненты в продольную с последующим образованием их связанного состояния.

На основе изменения спектра квазимонохроматической компоненты, изображенного на рис. 2, можно определить сдвиг частоты в красную область. В данном примере он составляет  $\Omega \approx 0.8v_g/l_0$ . Помимо сдвига в красную область спектр испытывает некоторое сужение, также наблюдавшееся в аналогичных оптических экспериментах [5].

Таким образом, в рассмотренном солитонном режиме параметр  $\Omega$ , имея смысл сдвига несущей частоты входного квазимонохроматического импульса



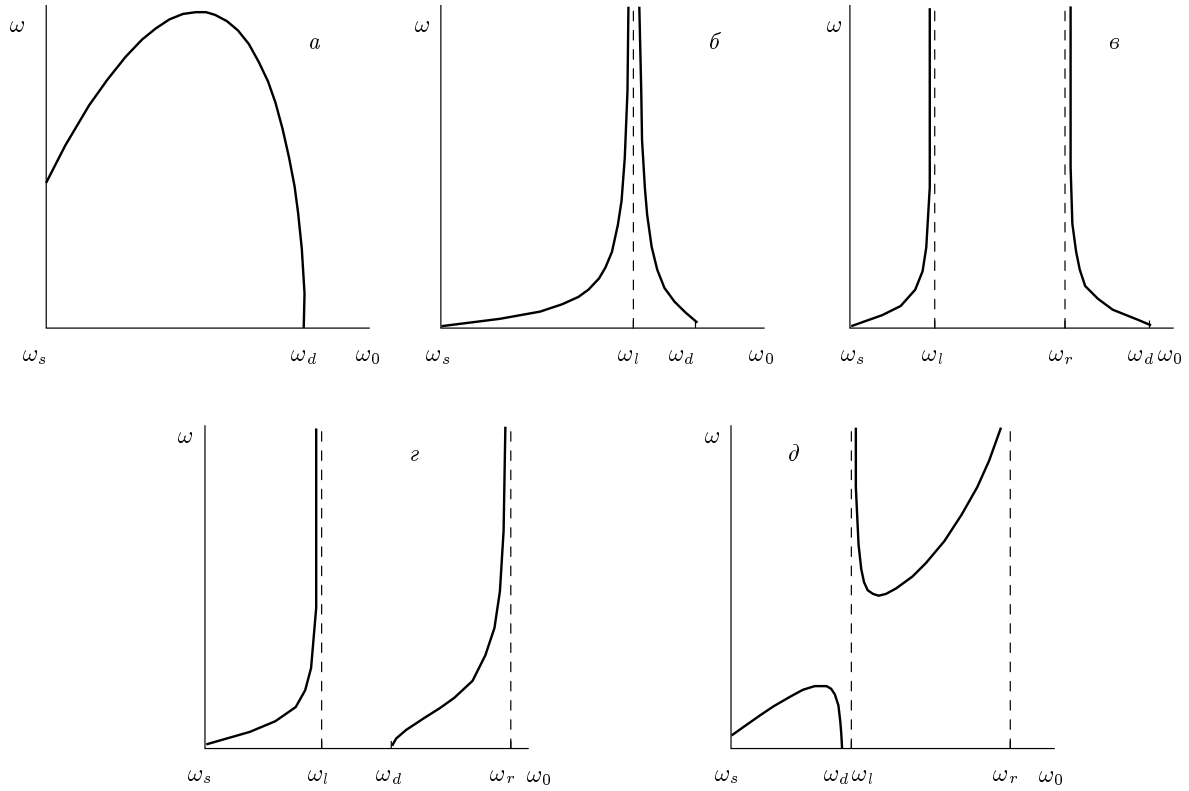
**Рис. 2.** Спектр  $|F(\omega)|$  огибающей поперечной компоненты импульса в начальный момент времени (пунктирная линия) и после образования двухкомпонентного солитона (сплошная линия) в момент времени  $t = 60l_0^2/|\omega_2|$ . По горизонтальной оси задано изменение частоты импульса  $\omega$  относительно его частоты на входе  $\omega_{in}$

в красную область, при установленных ограничениях сверху может принимать непрерывный ряд значений, возрастая с увеличением входной интенсивности поперечного упругого импульса. Отметим, что снизу ограничений на параметр  $\Omega$  нет. Поэтому, как видно из выражения для  $\psi_m$ , формирование солитона в режиме РЗБ имеет беспороговый характер. Таким же свойством, как известно, обладает эффект вынужденного комбинационного саморассеяния, при котором оптический импульс возбуждает оптические колебательные моды среды, а его частота непрерывно, пропорционально интенсивности смещается в красную область [27–29]. В нашем случае ситуация в некотором смысле аналогична: исходный поперечный импульс порождает в режиме РЗБ импульс продольной волны без несущей частоты, а затем сам же и рассеивается на этом импульсе. По аналогии с вынужденным комбинационным рассеянием назовем рассмотренный здесь эффект акустическим стоксовым саморассеянием.

Сделаем соответствующие численные оценки параметров продольно-поперечного акустического солитона (19)–(22). Полагая, что  $\omega_2 \sim v_g/k$ , будем иметь

$$\psi_m \sim \frac{1}{\Gamma_{s\perp} kl} \left( \frac{v_{\perp}}{a_{\parallel}} \right)^2 \sqrt{\frac{q}{k}}, \quad \varepsilon_m \sim \frac{1}{\Gamma_{s\perp} (kl)^2} \left( \frac{v_{\perp}}{a_{\parallel}} \right)^2.$$

Пусть в поперечной компоненте содержатся порядка ста колебаний. Тогда  $kl \sim 10^3$ . Взяв, кроме того,  $\Gamma_{s\perp} \approx 1$ ,  $q/k \sim 10^{-2}$ ,  $v_{\perp}/a_{\parallel} \approx 0.3$ , найдем



**Рис. 3.** Различные типы зависимости  $\omega(\omega_0)$ , соответствующей условию резонанса Захарова–Бенни:  $\text{Im}(\omega_{l,r}) \neq 0$  (а),  $\omega_l = \omega_r < \omega_d$  (б),  $\omega_l \neq \omega_r$  (в-д). Случаи а-в возможны только в области положительной ДГС, остальные соответствуют положительной ДГС при  $\omega_0 < \omega_l$  и отрицательной ДГС при  $\omega_l < \omega_0 < \omega_r$

$\psi_m \sim 10^{-5}$ ,  $\varepsilon_m \sim 10^{-7}$ . При этом  $\Omega/\omega \sim 10^{-2}$ , т.е. относительное смещение несущей частоты поперечной компоненты упругого импульса порядка одного процента.

При  $\omega_2/\Gamma_{s\perp} < 0$  продольная компонента является деформацией сжатия, в противном случае — деформацией растяжения.

Для эффективности процесса саморассеяния необходимо выполнение равенства (4), которое с учетом условия  $\mu_\perp \ll 1$  можно переписать в виде

$$\omega^2 = \frac{4a\omega_0^2(\omega_d - \omega_0)}{3\omega_s + (\hbar\omega_0/a_\perp)^2(\omega_0 - a\omega_s)}, \quad (23)$$

где

$$\omega_d = \omega_s G/a, \quad \omega_s = -nG_{44}^2 W_\infty / 2\hbar\rho_m a_\perp^2$$

— коллективная акустическая частота, введенная здесь по аналогии с соответствующей оптической частотой, характеризующей интенсивность взаимодействия поля с системой двухуровневых атомов [30],

$$\alpha = 24\alpha_{yx} - 1, \quad G = 9G_{11}^2/4G_{44}^2 - 1,$$

$$a = a_\parallel^2/a_\perp^2 - 1.$$

Как видно из данного равенства, частота исходного поперечного импульса тесно связана с величиной  $\omega_0$  зеemanовского расщепления спиновых подуровней, которая, в свою очередь, пропорциональна значению внешнего магнитного поля. Таким образом, изменение входной частоты сопряжено с изменением величины магнитного поля.

На рис. 3 представлены зависимости  $\omega(\omega_0)$ , построенные на основе равенства (23), при котором выполняется условие РЗБ. В зависимости от соотношения между характерными частотами  $\omega_d, \omega_l, \omega_r$  имеют место различные варианты, когда возможна только положительная ДГС (рис. 3а-в) или положительная и отрицательная ДГС (рис. 3г, д). Как будет видно из следующего раздела, от знака ДГС принципиально зависит характер поперечной структуры импульса.

Из выражений для  $\omega_2$  и  $g_\perp$  видно, что ДГС может быть отрицательной ( $\omega_2 < 0$ ) только при наличии пространственной нелокальности спин-фонон-

ного взаимодействия, причем необходимо выполнение условия  $\kappa_{\perp} < 0$  или

$$24\mu_{\perp}\alpha_{yx} > 1.$$

Соответствующее достаточное условие вытекает из неравенства  $g_{\perp} < 0$ , которое можно переписать в виде

$$\left(\frac{\omega_0 h}{v_{\perp}}\right)^2 > \frac{3\mu_{\perp}}{|\kappa_{\perp}|}.$$

Полагая  $|\kappa_{\perp}| \approx 1$ ,  $\mu_{\perp} \approx 0.1$ ,  $h \approx 5 \cdot 10^5$  см,  $v_{\perp} \approx 5 \cdot 10^5$  см/с, найдем  $\omega_0 \gtrsim 10^{13}$  с<sup>-1</sup>. Такие зеемановские расщепления соответствуют сильным магнитным полям порядка  $10^6$  Э. При этом несущая частота поперечной компоненты  $\omega \sim 10^{12}$  с<sup>-1</sup>, а длина волны порядка  $10^{-6}$  см.

Последнее условие при  $\mu_{\perp} \ll 1$  эквивалентно следующему кубическому неравенству относительно частоты зеемановского расщепления  $\omega_0$ :

$$\left(\frac{\omega_0 h}{a_{\perp}}\right)^2 (\alpha\omega_s - \omega_0) > 3\omega_s.$$

Его решение тригонометрическим способом [31] показывает, что отрицательная ДГС возможна при непременном выполнении условия

$$\alpha^3 \left(\frac{2\omega_s h}{9a_{\perp}}\right)^2 > 1. \quad (24)$$

Соответствующие значения частот зеемановского расщепления лежат в области

$$\omega_l < \omega_0 < \omega_r,$$

где

$$\begin{aligned} \omega_l &= \frac{\alpha\omega_s}{3}(1 - 2\cos\theta_s), \\ \omega_r &= \frac{\alpha\omega_s}{3}\left(1 + \cos\theta_s - \sqrt{3}\sin\theta_s\right), \\ \theta_s &= \frac{2}{3}\left(\arctg\sqrt{\alpha^3\left(\frac{2\omega_s h}{9a_{\perp}}\right)^2 - 1} - \pi\right). \end{aligned}$$

Область положительной ДГС в этом случае соответствует следующему диапазону зеемановских частот:

$$\omega_s < \omega_0 < \omega_l, \quad \omega_0 > \omega_r.$$

Ограничение снизу отражает отсутствие структурного фазового перехода, обусловленного спин-фононной связью, что, как указано ранее, отвечает условию  $\mu_{\perp} = \omega_s/\omega_0 < 1$ .

Характерные частоты  $\omega_l$  и  $\omega_r$  зависят от постоянной  $\alpha$ , выражающей нелокальность спин-фононного

взаимодействия, а также от отношения частоты  $\omega_s$ , характеризующей интенсивность взаимодействия поля с системой парамагнитных ионов, к дебаевской частоте  $\omega_D \sim a_{\perp}/h$ .

Частоты  $\omega_l$  и  $\omega_r$  определяют области смены знака коэффициента ДГС в зависимости от значений частоты зеемановского расщепления. Данное обстоятельство вызывает две особенности в зависимости (23). Частота  $\omega_d$ , определяемая расстройкой линейных скоростей продольного и поперечного звуков, соответствует нулю зависимости  $\omega(\omega_0)$ .

Приведем оценки типичных значений упомянутых характерных частот, рассмотрев в качестве примера кристалл MgO с примесными ионами Fe<sup>2+</sup>. Полагая  $\omega_s \sim 10^{11}$  с<sup>-1</sup>,  $(a_{\parallel}/a_{\perp})^2 \approx 2$ ,  $h \approx 5 \cdot 10^{-8}$  см,  $a_{\perp} \approx 5 \cdot 10^5$  см/с [17] и  $(G_{11}/G_{44})^2 \approx 2$  [16],  $\alpha \approx 1$ , получим  $\omega_d \approx 4 \cdot 10^{11}$  с<sup>-1</sup>. Подстановка этих параметров в левую часть (24) показывает, что данное условие не выполняется. Следовательно, в кристалле MgO:Fe<sup>2+</sup> для акустических импульсов имеет место лишь положительная ДГС, что соответствует случаю, изображенному на рис. 3а. Пусть  $\omega_0 \approx 2 \cdot 10^{11}$  с<sup>-1</sup>, тогда несущая частота импульса, удовлетворяющая условию РЗБ, составляет  $\omega \sim 10^{10}$  с<sup>-1</sup>.

Подставляя в выражение для  $\gamma$  принятые выше значения параметров, найдем, что  $\gamma \sim 10^{-4}$ , т. е.  $\gamma$  действительно является малым параметром.

В случае, если амплитуды составляющих импульса различаются лишь на порядок,  $\gamma \sim 10^{-2}$  и, как видно из приведенных выше соотношений, необходимо учесть квадратичную нелинейность продольной компоненты акустического поля (т. е.  $\beta_{\parallel} \neq 0$ ).

С точки зрения возможного эксперимента очень важным является вопрос о длине, на которой формируется исследованный в этом разделе солитон. Эта длина имеет порядок длины  $l_d$  дисперсионного расплывания. Из соотношения (17) следует, что  $l_d \sim a_{\perp} l^2/|\omega_2|$ . Замечая, что  $l \sim a_{\perp} \tau_p$ , а также учитывая (16) и выражение для  $g_{\perp}$ , запишем

$$l_d \sim a_{\perp} (\omega_0 \tau_p)^2 / \mu_{\perp} \omega.$$

При использованных выше численных оценках присутствующих здесь параметров найдем, что  $l_d \sim 1$  см. Таким образом, исследованный в настоящем разделе солитонный режим акустического саморассеяния можно наблюдать в кристаллическом образце MgO, допированном парамагнитными ионами Fe<sup>2+</sup> с концентрацией порядка  $10^{21}$  см<sup>-3</sup> и имеющем размер приблизительно 10 см в направлении распространения импульса.

## 5. ПОПЕРЕЧНАЯ СТРУКТУРА СОЛИТОНОВ

При экспериментальной реализации тех или иных солитонных режимов распространения возникает вопрос о поперечной устойчивости. Основными механизмами, определяющими поперечную динамику, выступают дифракция, ведущая к дефокусировке импульса, и нелинейная рефракция, которая в зависимости от типа нелинейности приводит к дефокусировке или самофокусировке. В результате взаимной конкуренции указанных эффектов могут возникнуть три типа поперечной динамики: дефокусировка, самофокусировка и самоканалирование.

Анализ влияния поперечных эффектов на процесс оптического саморассеяния был проведен в работе [32]. Принципиальных различий математического характера между оптическим и акустическим аналогами нет, поэтому приведем лишь основные результаты.

Применим вариационный метод типа усредненного лагранжиана Ритца–Уизема [33, 34]. Пробные решения, обобщающие одномерное решение получим, проведя в формулах (19), (20) замены  $l \rightarrow \theta(t, \mathbf{r}_\perp)$  и  $\Omega t - qx \rightarrow \Phi(t, \mathbf{r}_\perp) - q\xi$ . Незвестные функции  $\theta$  («медленная») и  $\Phi$  («быстрая»), зависящие от времени и поперечных координат, соответствуют обратной протяженности импульса и эйконалу квазимонохроматической компоненты.

Согласно принятому методу, пробные решения подставляются в лагранжиан, соответствующий системе (17), (18). Последующее интегрирование полученного выражения по «быстрой» переменной  $\xi$  дает усредненный лагранжиан. Вывод уравнений Лагранжа–Эйлера для пробных функций  $\theta$  и  $\Phi$  с использованием усредненного лагранжиана дает квазигидродинамическую систему уравнений [32, 34, 35], где  $\theta$  имеет смысл «плотности», а  $\Phi$  — «потенциала скорости».

Данную систему можно переписать в виде одного уравнения для комплексной функции, связанной с параметрами солитона преобразованием Маделунга [32, 35, 36]. Соответствующее уравнение формально эквивалентно уравнениям, описывающим нелинейную динамику пространственных пучков с учетом замены  $x \rightarrow t$  [37]. Это обстоятельство позволяет сделать ряд выводов на основании уже известных в данной области результатов, а также воспользоваться хорошо развитыми методами исследования. В зависимости от знаков нелинейности здесь возможны решения типа «пуль», а также «светлых»

или «темных» вихрей с различными топологическими зарядами — «завихренностями» [36–40].

Благодаря упомянутой аналогии удается найти стационарные (сохраняющие форму при распространении) решения уравнения для комплексной функции, связанной с параметрами солитона. В цилиндрических координатах  $(r, \varphi, t)$  выражения для неизвестных функций, соответствующие стационарным решениям, имеют вид [32]

$$\theta = \frac{U^2(r)}{l} \left( 1 - \frac{\gamma}{3} U^4(r) \right), \quad (25)$$

$$\Phi = \frac{\omega_2}{2} \left( q^2 - \frac{1}{l^2} \right) t + m\varphi. \quad (26)$$

Здесь  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  — топологический заряд солитона (завихренность фазы), а безразмерная функция  $U(r)$  удовлетворяет уравнению [32]

$$(1 - \gamma\nu_1 U^4) \left( \frac{d^2 U}{dr'^2} + \frac{1}{r'} \frac{dU}{dr'} \right) - 2\gamma\nu_1 U^3 \left( \frac{dU}{dr'} \right)^2 - \frac{\nu^2}{r'^2} U + \text{sign}(\omega_2) (U - U^5 + \gamma U^9) = 0, \quad (27)$$

где

$$r' = \frac{r}{R_s}, \quad R_s = a_\perp l \nu_0 (v_\perp |\omega_2|)^{-1/2}, \quad \nu = \nu_0 |m|,$$

$$\nu_0 = 3 \left( \pi^2 + 12 + \frac{k(\pi^2 - 6)}{q} \right)^{-1/2},$$

$$\nu_1 = \frac{4\nu_0^2}{9} \left( \frac{\pi^2}{15} + 2 + \frac{k}{2q} \right).$$

Как видно из уравнения (27), типы решений зависят от знака ДГС.

Рассмотрим сначала область положительных значений ДГС ( $\omega_2 > 0$ ). В этом случае возможны только решения с ненулевой асимптотикой на бесконечности. Решение в виде константы при  $m = 0$  соответствует параметрам одномерного солитона. Если же  $m \neq 0$ , то имеем решения типа «темных» вихрей. На рис. 4а приведены соответствующие решения, полученные численно с использованием краевых условий  $U(0) = 0, U(\infty) = \text{const} \neq 0$ . Как показывает анализ, такие решения существуют только при  $\gamma < \gamma_{max}^{(+)} \approx 0.25$  (знак в верхнем индексе соответствует знаку дисперсной групповой скорости высокочастотной компоненты). Асимптотически данные решения ведут себя следующим образом:  $U \sim r^\nu$  вблизи нуля и  $U \approx 1 + \gamma/4$  на бесконечности.

Таким образом, в области положительной ДГС на фоне одномерного двухкомпонентного солитона

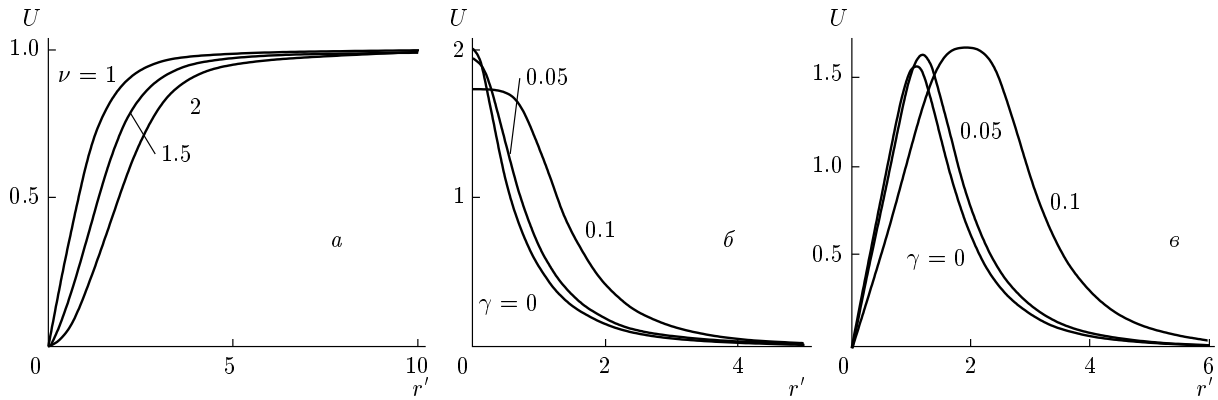


Рис. 4. Возможные типы решений уравнения (27) в области положительной (а) и отрицательной (б, в) ДГС

возможно существование поперечных дефектов. Поперечная компонента несет на себе «темный» вихрь во фронтальных плоскостях, а продольная компонента имеет «дырку». По этой причине будем именовать такие структуры «темными» акустическими дырочно-вихревыми солитонами.

Следует отметить, что существование аналогичных дефектов для квазимонохроматического импульса, описываемого нелинейным уравнением Шредингера с положительной ДГС, было предсказано сравнительно недавно [41].

Перейдем теперь к анализу случая отрицательной ДГС. При  $\omega_2 < 0$  уравнение (27) допускает экспоненциально локализованные решения (см. рис. 4б, в) при  $\gamma < \gamma_{max}^{(-)} \approx 0.137$ . Это соответствует полностью локализованным в пространстве «сгусткам» деформации. При  $m = 0$  распределения амплитуд компонент имеют квазиэллиптический характер, и по аналогии с нелинейной оптикой [42, 43] можно говорить о двухкомпонентных акустических пулях. Если же  $m \neq 0$ , то распределение амплитуд имеет вид тора, а фаза поперечной компоненты является завихренной. Подобные образования назовем «светлыми» акустическими дырочно-вихревыми солитонами.

Оценим характерные размеры рассматриваемых объектов. Пусть  $q/k \sim 10^{-2}$ , тогда  $\nu_0 \sim 10^{-1}$ . Полагая, что  $\omega_2 \sim v_g/k \sim a_{\perp}/k$ , найдем  $R_s \sim \nu_0^{-1}l$ . Считая  $a_{\perp} \sim 10^5$  см/с, получим, что при длительности импульса  $\tau_p \sim 10$  нс его характерные продольный  $l = a_{\perp}\tau_p$  и поперечный  $R_s$  размеры составляют  $l \approx 10$  мкм и  $R_s \approx 100$  мкм.

Анализ устойчивости полученных структур в общем случае довольно сложен и может быть проведен только с помощью численных методов. Однако с помощью вариационного метода можно получить

вполне приемлемые результаты [32].

Как следует из применения указанного выше подхода, решения типа «темных» дырочно-вихревых солитонов являются топологически устойчивыми.

В случае отрицательной ДГС ситуация несколько иная. Локализованные решения типа «пуль» и «светлых» вихрей могут существовать лишь при выполнении двойного ограничения на параметр  $\gamma$ :

$$\gamma_{min}^{(-)} < \gamma < \gamma_{max}^{(-)}. \tag{28}$$

Нижняя граница значений данного параметра является следствием условия устойчивости решения, а верхняя налагается структурой решения. Нижние значения  $\gamma$ , определяющие область устойчивости, в рамках вариационного подхода составляют [32]  $\gamma_{min}^{(-)} = 0.063$  для акустических «пуль» ( $\nu = 0$ ) и  $\gamma_{min}^{(-)} = 0.085$  для «светлых» дырочно-вихревых солитонов при  $\nu = 1$ .

Поясним физический смысл условия (28). Как отмечалось в разд. 4,

$$\gamma = \frac{8\beta_{\parallel}\epsilon_m^2}{3\beta_{\perp}\psi_m^2} \approx \frac{8\Gamma_s}{3\Gamma_{s\perp}} \frac{I_{\parallel}}{I_{\perp}},$$

где  $I_{\perp}$  и  $I_{\parallel}$  — интенсивности поперечной и продольной компонент импульса. Таким образом, трехмерный квазистационарный солитон может сформироваться лишь в фиксированном интервале отношений интенсивностей составляющих импульса:

$$\frac{3\Gamma_{s\perp}}{8\Gamma_s}\gamma_{min}^{(-)} < \frac{I_{\parallel}}{I_{\perp}} < \frac{3\Gamma_{s\perp}}{8\Gamma_s}\gamma_{max}^{(-)}.$$

При этом, как видно из данного условия, принципиальной для существования полностью локализованного солитона является проявление собственной нелинейности продольной компоненты импульса, определяемой перенормированным параметром Грюнайзена  $\Gamma_s$ .

Механизм образования таких структур в области отрицательной ДГС можно качественно представить следующим образом. Волна поперечного гиперзвука порождает за счет нелинейности при распространении продольный гиперзвук. Как следует из проведенного анализа [32], с превышением критической мощности импульс начинает самофокусироваться, амплитуды его компонент растут. При этом проявляет себя собственная нелинейность продольной компоненты, создавая дефокусирующий эффект. В результате происходит подавление коллапса. Таким образом, действительно имеет место явление, подобное конкуренции нелинейностей. Однако в отличие от хорошо известных систем типа нелинейного уравнения Шредингера [37], где конкурирующие нелинейности фигурируют как разложение по степеням, в данной системе эффект возникает уже в том же порядке нелинейных членов путем взаимодействия полей различного типа (импульса с несущей и импульса без несущей частоты).

## 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе рассмотрен новый механизм непрерывного преобразования частоты акустических импульсов. Квазимонохроматический импульс поперечного гиперзвука, распространяясь в низкотемпературном парамагнитном кристалле перпендикулярно внешнему магнитному полю, генерирует за счет нелинейности импульс продольного звука, не имеющий несущей частоты, впоследствии рассеивается на этом же импульсе. Как результат, частота поперечного импульса испытывает непрерывное смещение в красную область, пропорциональное его же интенсивности. Важно, что данное смещение частоты сопровождается сужением импульсного спектра, вызванное дисперсионным расплыванием и также имеющее место при саморассеянии оптического сигнала на генерируемом им же терагерцовом импульсе в квадратично-нелинейной среде [5].

Для эффективной реализации описанного процесса необходимо выполнение условия резонанса Захарова – Бенни, согласно которому фазовая скорость продольной составляющей импульса равна групповой скорости его поперечной компоненты. Данное условие налагает связь между входной частотой акустического импульса и частотой расщеплений в земановском триплете, которая пропорциональна величине внешнего магнитного поля.

Именно строгое требование к выполнению данного условия приводит к насыщению частотного сме-

щения до определенной величины, пропорциональной интенсивности импульса. Этим рассмотренный в настоящей работе эффект коренным образом отличается от вынужденного комбинационного саморассеяния света [27–29], при котором частота входного импульса испытывает непрерывное стоковое смещение, пропорциональное как входной интенсивности оптического импульса, так и пройденному импульсом пути. В несколько большей степени рассмотренное здесь гиперзвуковое саморассеяние аналогично саморассеянию Мандельштама–Бриллюэна оптического импульса в условиях электромагнитно-индуцированной прозрачности [44]. Если групповая скорость света замедляется до скорости звука, становится возможным рассеяние Мандельштама–Бриллюэна вперед [45]. В последнем случае квазимонохроматический оптический импульс генерирует импульс деформации без несущей частоты и сам же рассеивается на нем, испытывая красный частотный сдвиг. С другой стороны, саморассеяние Мандельштама–Бриллюэна в условиях электромагнитно-индуцированной прозрачности возможно только, если частота оптического импульса лежит в области нормальной ДГС [44]. Знак же ДГС, как было показано выше в настоящей работе, существенным образом определяет поперечные структуры рассеивающегося и порождаемого импульсов.

Поперечная структура импульсов исследована нами в рамках вариационного подхода. В области положительной ДГС поперечного гиперзвука солитоноподобные импульсы могут нести на себе поперечные дефекты типа «дырки» и «темного» вихря («темные» акустические дырочно-вихревые солитоны).

В области отрицательной ДГС возможно образование полностью локализованных трехмерных структур типа двухкомпонентных акустических пуль или структур типа «светлого» вихря и пули («светлые» акустические дырочно-вихревые солитоны). Такие локализованные объекты способны сформироваться благодаря подавлению коллапса поперечной составляющей за счет взаимодействия с порождаемой ей продольной компонентой. Причем в подавлении коллапса принципиальную роль играет собственная нелинейность продольной компоненты деформации.

Вместе с тем, необходимо отметить некоторые сложности. Так, вариационный подход в принципе позволяет предсказать область устойчивости локализованных образований. Однако он не учитывает, например, азимутальные возмущения, приводящие к филаментации локализованных вихревых образо-

ваний, поэтому необходимы специальные исследования на устойчивость, которые имеет смысл провести отдельно. Кроме того, сложность данной системы требует в будущем проведения численного моделирования процесса саморассеяния, что также является самостоятельной задачей.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 06-02-16147) и фонда некоммерческих программ «Династия».

## ЛИТЕРАТУРА

1. Л. К. Зарембо, В. А. Красильников, *Введение в нелинейную акустику*, Наука, Москва (1966).
2. В. А. Красильников, В. В. Крылов, *Введение в физическую акустику*, Наука, Москва (1984).
3. Г. Агравал, *Нелинейная волоконная оптика*, Мир, Москва (1996).
4. С. В. Сазонов, А. Ф. Соболевский, *КЭ* **35**, 1019 (2005).
5. А. Г. Степанов, А. А. Мельников, В. О. Компанец, С. В. Чекалин, *Письма в ЖЭТФ* **85**, 279 (2007).
6. U. Kh. Korvillem, V. V. Samartsev, and N. K. Solovarov, *Adv. Mol. Relax. Process* **8**, 241 (1976).
7. В. А. Голенищев-Кутузов, В. В. Самарцев, Н. К. Соловаров, Б. М. Хабибулин, *Магнитная квантовая акустика*, Наука, Москва (1977).
8. A. V. Gulakov and S. V. Sazonov, *J. Phys.: Condens. Matter* **16**, 1733 (2004).
9. С. В. Сазонов, Н. В. Устинов, *ЖЭТФ* **127**, 289 (2005).
10. А. А. Заболотский, *ЖЭТФ* **123**, 560 (2003).
11. С. В. Сазонов, *ЖЭТФ* **118**, 20 (2000).
12. А. А. Заболотский, *ЖЭТФ* **123**, 1239 (2003).
13. А. А. Zabolotskii, *Physica D* **185**, 117 (2003).
14. А. А. Zabolotskii, *Phys. Rev. E* **67**, 066606 (2003).
15. S. V. Sazonov and N. V. Ustinov, *Phys. Rev. E* **73**, 056614-1 (2006).
16. Дж. Такер, В. Рэмpton, *Гиперзвук в физике твердого тела*, Мир, Москва (1975).
17. Ч. Киттель, *Введение в физику твердого тела*, Физматлит, Москва (1963).
18. N. S. Shiren, *Phys. Rev. B* **2**, 2471 (1970).
19. Р. Додд, Дж. Эйлбек, Дж. Гиббон, Х. Моррис, *Солитоны и нелинейные волновые уравнения*, Мир, Москва (1988).
20. S. V. Sazonov, *J. Phys.: Condens. Matter* **6**, 6295 (1994).
21. M. Pomerantz, *Phys. Rev. A* **139**, 501 (1965).
22. Э. М. Беленов, А. В. Назаркин, В. А. Ущуповский, *ЖЭТФ* **100**, 762 (1991).
23. А. Н. Бугай, С. В. Сазонов, *ФТТ* **47**, 1839 (2005).
24. Н. С. Буйнов, В. Р. Нагибаров, Н. К. Соловаров, *УФЖ* **22**, 151 (1977).
25. N. Yajima and M. Oikawa, *Progr. Theor. Phys.* **56**, 1719 (1976).
26. В. Е. Захаров, *ЖЭТФ* **62**, 1745 (1972).
27. Е. М. Дианов, А. Я. Карасик, П. В. Мамышев, А. М. Прохоров, В. Н. Серкин, М. Ф. Стельмах, А. А. Фомичев, *Письма в ЖЭТФ* **41**, 242 (1985).
28. F. M. Mitschke and L. F. Mollenauer, *Opt. Lett.* **11**, 659 (1986).
29. В. Н. Серкин, Т. Л. Беляева, Г. Х. Корро, М. Аргуеро Гранадос, *КЭ* **33**, 325 (2003).
30. А. В. Андреев, В. И. Емельянов, Ю. А. Ильинский, *Кооперативные явления в оптике*, Наука, Москва (1988).
31. Г. Корн, Т. Корн, *Справочник по математике для научных работников и инженеров*, Наука, Москва (1970).
32. A. N. Bugay and S. V. Sazonov, *Phys. Rev. E* **74**, 066608-1 (2006).
33. С. К. Жданов, *Письма в ЖЭТФ* **43**, 414 (1986).
34. С. К. Жданов, Б. А. Трубников, *ЖЭТФ* **92**, 1612 (1987).
35. С. В. Сазонов, *ЖЭТФ* **130**, 145 (2006).
36. A. S. Desyatnikov, L. Torner, and Yu. S. Kivshar, in *Progress in Optics*, ed. by E. Wolf (2005), Vol. **47**, ch. X.
37. Ю. С. Кившарь, Г. П. Агравал, *Оптические солитоны: от волоконных световодов к фотонным кристаллам*, Физматлит, Москва (2005).
38. I. Towers, A. V. Buryak, R. A. Sammut, B. A. Malomed, L. C. Crasovan, and D. Mihalache, *Phys. Lett. A* **288**, 292 (2001).

39. H. Michinel, J. Campo-Taboas, R. Garcia-Fernandez, J. R. Salgueiro, and M. L. Quiroga-Teixeiro, *Phys. Rev. E* **65**, 066604-7 (2002).
40. M. R. Matthews, B. P. Anderson, P. C. Haljan, D. S. Hall, C. E. Wieman, and E. A. Cornell, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 2498 (1999).
41. N. K. Efremidis, K. Hizanidis, B. A. Malomed, and P. Di Trapani, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 113901 (2007).
42. Y. Silberberg, *Opt. Lett.* **15**, 1282 (1990).
43. Н. Н. Ахмедиев, А. Анкевич, *Солитоны: нелинейные импульсы и пучки*, Физматлит, Москва (2003).
44. С. В. Сазонов, *ЖЭТФ* **128**, 1123 (2005).
45. A. B. Matsko, Yu. V. Rostovtsev, M. Fleishhauer, and M. O. Scully, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 2006 (2001).