

# ОСЦИЛЛИРУЮЩИЕ БЕГУЩИЕ ВОЛНЫ В ВОЗБУДИМЫХ СРЕДАХ

*Е. П. Земсков<sup>a\*</sup>, А. Ю. Лоскутов<sup>b\*\*</sup>*

<sup>a</sup> *Вычислительный центр им. А. А. Дородницына Российской академии наук  
119333, Москва, Россия*

<sup>b</sup> *Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова  
119992, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 27 ноября 2007 г.

Описывается новый тип автоволн в возбудимой среде, характеризующийся тем, что в профиле таких волн наблюдаются осцилляции. Возбудимая среда рассматривается в рамках двухкомпонентной системы с одним активатором и одним ингибитором. Исследуются два основных случая системы реакция–диффузия: с обычной (диагональной) диффузией и с перекрестной диффузией. В качестве примера волны выбран фронт (кинк), представляющий собой гетероклиническую траекторию в фазовом пространстве. Форма и скорость автоволн обсуждаются с использованием точных аналитических решений для волнового профиля.

PACS: 82.40.Bj, 82.40.Ck

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Распределенные активные (возбудимые) среды [1], в отличие от обычных сред, способны без затуханий и искажений передавать сигналы на большие расстояния. Формирование и распространение волн в таких средах описывается уравнениями типа реакция–диффузия [1–3], где нелинейные реакционные члены отвечают за кинетику, а процессы переноса представлены диффузией. Простейшее одномерное уравнение реакция–диффузия применительно к биологическим проблемам впервые было исследовано в 1937 г. [4].

Целью настоящей работы является изучение двухкомпонентной одномерной системы типа активатор–ингибитор

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= f(u, v) + D_u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + h_v \frac{\partial}{\partial x} \left[ Q_v(u, v) \frac{\partial v}{\partial x} \right], \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= g(u, v) + D_v \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + h_u \frac{\partial}{\partial x} \left[ Q_u(u, v) \frac{\partial u}{\partial x} \right], \end{aligned} \quad (1)$$

где реакционные члены представлены некоторыми нелинейными функциями  $f(u, v)$  и  $g(u, v)$ , а  $D_u$  и

$D_v$  — коэффициенты диффузии. При  $h_u = h_v = 0$  модель представляет собой обычную систему типа реакция–диффузия, а в случае  $h_{u,v} \neq 0$  система является кросс–диффузионной. Мы ограничимся здесь линейной перекрестной диффузией, когда  $Q_{u,v}(u, v) = \text{const}$ .

В реакционно–диффузионных системах могут наблюдаться различные виды волновых структур: однородные временные колебания, стационарные пространственные структуры, пространственно–временной хаос и др. В настоящей работе описывается новый вид одномерных волн — бегущие волны, профиль которых осциллирует, такой тип волн относится к автоволнам<sup>1)</sup>. В однокомпонентной системе

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f(u) + D_u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

для существования таких осциллирующих решений необходимо, чтобы одна из точек равновесия была фокусом. Тогда немонотонное автомодельное решение будет образовано траекторией, выходящей из фокуса. При этом волна может двигаться вправо и

\*E-mail: e-zemskov@yandex.ru

\*\*E-mail: loskutov@chaos.phys.msu.ru

<sup>1)</sup> Автоволнами называются волны, которые движутся с постоянной скоростью и сохраняют свою форму.

влево, так что осцилляции профиля могут находиться как на переднем фронте, так и в хвосте волны [5].

В данной работе на примере одной из простых моделей возбудимой среды типа ФитцХью–Нагумо (FitzHugh–Nagumo) [6] в модификации, удобной для точных аналитических вычислений [7], показано, что в случае двух компонент также возможно образование бегущих волн с осциллирующим профилем, когда их фронт образован траекторией, соединяющей две седловые точки. Осцилляции в профиле волны в нашем случае имеют место именно для автоволновых решений, т. е. для решений, зависящих только от одной автоволновой переменной  $\xi = x - ct$  (здесь  $c$  — скорость волны,  $x$  — пространственная переменная, а  $t$  — время). При этом волна с осцилляциями в профиле в автоволновой системе координат (системе координат, связанной с автоволновой переменной) является неподвижной. Таким образом, осцилляции в профиле автоволн являются частным случаем обычных пространственно-временных колебаний. В общем случае пространственно-временные осциллирующие решения были получены численно в работах [14].

Обычные бегущие волны (т. е. с профилями без осцилляций) давно известны и хорошо изучены. Для исследуемой нами конкретной системы кусочно-линейной аппроксимации модели ФитцХью–Нагумо обычные бегущие волны аналитически были впервые получены в работе Ринцеля и Келлера в 1973 г. [7], в то время как осциллирующие бегущие волны — в относительно недавней статье [12]. Данная работа является продолжением исследований в этом направлении и содержит новые результаты, полученные для кусочно-линейной системы типа реакция–диффузия при учете эффектов, связанных с перекрестной диффузией компонент.

## 2. БЕГУЩИЕ ВОЛНЫ С ОСЦИЛЛИРУЮЩИМ ПРОФИЛЕМ

В данном разделе мы рассматриваем одномерную двухкомпонентную модель типа реакция–диффузия, описываемую системой типа ФитцХью–Нагумо. В такой системе первое уравнение описывает временную динамику активатора, а второе — ингибитора. Обе компоненты в модели являются диффундирующими.

### 2.1. Модель без перекрестной диффузии

Модель ФитцХью–Нагумо для случая, когда обе компоненты являются диффундирующими, можно

записать как

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= u(u - a)(1 - u) - v + D_u \Delta u, \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= \varepsilon(u - bv) + D_v \Delta v,\end{aligned}\quad (2)$$

где  $a, b$  и  $\varepsilon$  — некоторые константы. Первые две определяют динамический режим, порождающий решения типа фронтов (гетероклиник), либо импульсов (гомоклиник), либо периодических последовательностей импульсов;  $\varepsilon$  связано с отношением временных масштабов (time scale) для обеих переменных.

Модель (2) очень широко используется как базовая во многих областях современной химической физики, но изначально она была предложена в качестве математического описания распространения возбуждения в нервном волокне. В приложении к динамике химических реакций переменные  $u$  и  $v$  соответствуют концентрации реагентов (соответственно активатора и ингибитора).

Для получения аналитических решений [8, 9, 10] в системе (2) нелинейный реакционный член в уравнении для активатора обычно представляют в виде кусочно-линейной функции

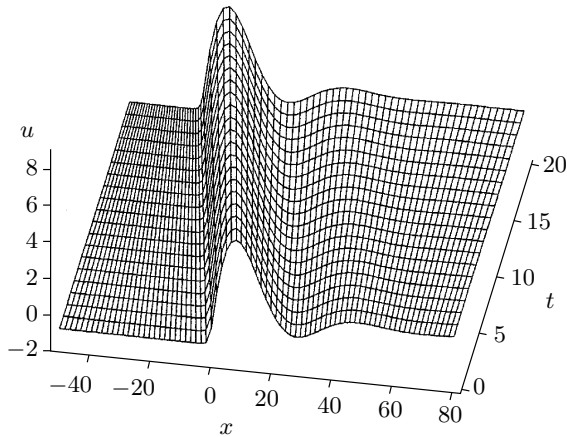
$$f(u, v) = -u - v + \theta(u - u_0),$$

где  $u_0$  — константа, а  $\theta(u)$  — ступенчатая функция Хэвисайда [11]. Рассмотрим сначала такую систему. В одномерном случае она описывается уравнениями

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= -\alpha u - v - 1 + 2\theta(u - u_0) + D_u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= \varepsilon(u - v) + D_v \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.\end{aligned}\quad (3)$$

При  $D_u = D_v = 1$  для этой системы были найдены точные аналитические решения для автоволн [12]. Вводя автомодельную переменную  $\xi = x - ct$ , систему (3) можно записать в виде обыкновенных дифференциальных уравнений. Благодаря тому, что реакционный член активатора является кусочно-линейной функцией, решения для этой системы представляют собой сшитые в месте сдвига куски из сумм экспонент, которые при определенной комбинации модельных параметров заменяются на синусы и косинусы, отвечающие решениям с осцилляциями профиля. Подробно это рассмотрено в работе [12].

В качестве иллюстрации пространственно-временного поведения автоволн с осцилляциями в профиле на рис. 1 показан пример решения для фронта активатора с отрицательным значением скорости.



**Рис. 1.** Диагональная диффузия. Пространственно-временная диаграмма для фронта активатора при  $\varepsilon = 0.05$ ,  $\alpha = 0.1$  и  $u_0 = 0$

Видно, что с увеличением пространственной координаты осцилляции в профиле затухают, в то время как сама форма волны с течением времени остается неизменной. Этим рассматриваемый фронт отличается от волн с пульсациями по пространству и времени, полученных в работах [14].

В данной работе мы остановимся на уравнении для скорости фронта (при  $\alpha = 1$ ), которое можно получить при уменьшении числа уравнений при сшивке. Используя порог возбуждения  $u_0$ , это уравнение можно записать следующим образом:

$$u_0 = \frac{c}{4} \frac{1}{1 - \gamma^2/\varepsilon} \frac{1}{\sigma\rho} \left[ \sigma - \frac{\gamma^2}{\varepsilon} \rho - \frac{\gamma}{\varepsilon} (\sigma - \rho) \right], \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{c^2/4 + (\varepsilon + 1)/2} + \sqrt{(\varepsilon - 1)^2/4 - \varepsilon}, \\ \sigma &= \sqrt{c^2/4 + (\varepsilon + 1)/2} - \sqrt{(\varepsilon - 1)^2/4 - \varepsilon}, \\ \gamma &= (\varepsilon - 1)/2 + \sqrt{(\varepsilon - 1)^2/4 - \varepsilon}. \end{aligned} \quad (5)$$

Отсюда сразу видно, что для симметричной системы, когда  $u_0 = 0$ , существует покоящийся фронт.

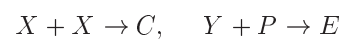
Диаграмма для соотношения между скоростью фронта и отношением временных шкал  $\varepsilon$  содержит бифуркацию типа вилки, которая известна в литературе как неравновесная бифуркация Изинга–Блоха [13, 14]. На рис. 2а–в показан график зависимости скорости фронта от величины порога возбуждения (см. (4), (5)). Неравновесная бифуркация Изинга–Блоха проявляется здесь как одно- (рис. 2в) или многозначное (рис. 2а) соответствие  $c - u_0$  между скоростью и порогом возбуждения, изображае-

мое соответствующей кривой. В случае многозначности (рис. 2а) кривая содержит три ветви, верхняя и нижняя из которых представляют собой два блоховских фронта, распространяющихся в противоположных направлениях. Эти ветви соединяются со средней ветвью при некоторых критических значениях порога возбуждения. Отвечающие этим двум ветвям фронты представляют собой устойчивые решения, в то время как средняя ветвь, которой соответствует изинговский фронт, образует неустойчивое решение. В работе [15] описаны только два фронта с положительными скоростями, что соответствует крайней и части средней ветвям на наших диаграммах. Полный сценарий неравновесной бифуркации Изинга–Блоха был получен в работе [14] для кубической системы типа ФитцХью–Нагумо.

Когда величина отношения шкал  $\varepsilon$  возрастает, многозначная кривая распрямляется до однозначной кривой (рис. 2в). Эта ситуация соответствует единственному изинговскому фронту. При этом оба блоховских фронта исчезают, а изинговский фронт становится устойчивым. В зависимости от величины  $\varepsilon$  изинговские и блоховские фронты могут быть как осциллирующими, так и не осциллирующими. Когда  $\varepsilon_{im}^- < \varepsilon < \varepsilon_{im}^+$ , где  $\varepsilon_{im}^\pm = 3 \pm 2\sqrt{2}$  [12], фронты являются осциллирующими. При этом такие осцилляции явно выражены у бегущих фронтов и различимы на хвосте бегущей волны. Отметим, что в данной модели это имеет место и для импульсов. В случае периодической последовательности импульсов осцилляции по пространственной координате порождают аномальное дисперсионное соотношение (соотношение между скоростью и периодом).

### 2.2. Анализ системы с перекрестной диффузией

При учете взаимной диффузии компонентов можно построить различные автоволновые модели. Так, например, следующая схема реакций (подробнее см. [2])



приводит к распределенной модели вида

$$\frac{\partial x}{\partial t} = Ay - Bx - x^2 + \frac{\partial}{\partial r} \left( D_{xx} \frac{\partial x}{\partial r} + D_{xy} \frac{\partial y}{\partial r} \right),$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = Bx - Py + \frac{\partial}{\partial r} \left( D_{yy} \frac{\partial y}{\partial r} + D_{yx} \frac{\partial x}{\partial r} \right).$$

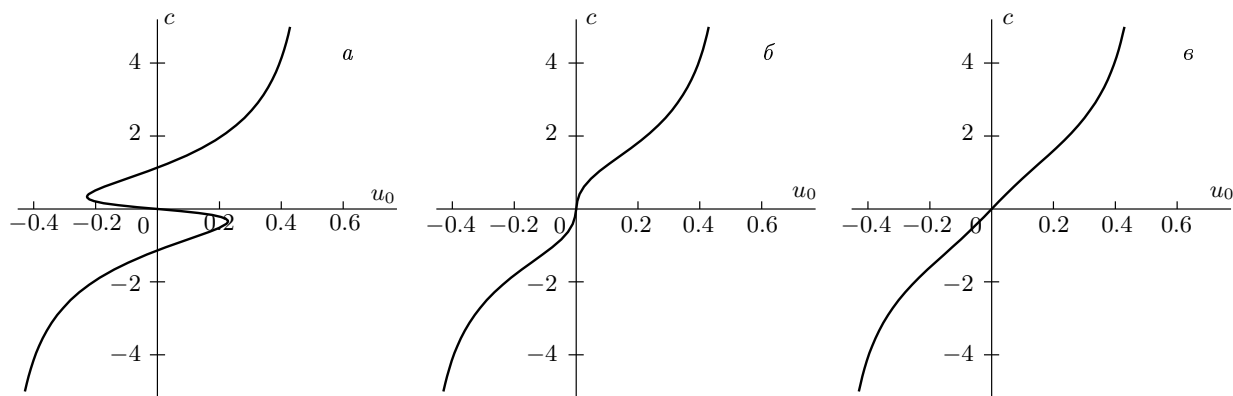


Рис. 2. Диагональная диффузия. Зависимость скорости от порога возбуждения при различных значениях отношения шкал времени  $\varepsilon = 0.01$  (а),  $0.3$  (б),  $1$  (в)

Такие модели описывают разнообразные автоволновые процессы при минимальных требованиях к точечной кинетике, основное из которых сводится к тому, чтобы система имела достаточно большой приток «извне». В данном случае это приток вещества  $A$  [2].

Перекрытая диффузия встречается и в экологии в системах хищник–жертва, когда пространственная эволюция включает в себя положительный таксис<sup>2)</sup> хищников по направлению роста градиента жертвы (процесс преследования) и отрицательный таксис жертвы при уменьшении градиента хищника (процесс уклонения) [3].

Система реакция–диффузия с линейной перекрытой диффузией имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= f(u, v) + D_u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + h_v \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= g(u, v) + D_v \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - h_u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \end{aligned} \quad (6)$$

где выбор знаков при  $h_{u,v}$  отражает взаимодействие преследование–уклонение для хищника и жертвы. Известно [20], что включение таксиса  $\partial_x(u\partial_x v)$  и  $\partial_x(v\partial_x u)$  в системы реакция–диффузия порождает волны с солитоноподобным поведением. Эти волны проходят друг сквозь друга и отражаются от непроницаемых границ. Мы следуем здесь подходу, предложенному в [21], и вместо традиционного описания распространения компонент с помощью обычного диффузионного механизма рассматриваем только вклад от перекрытой диффузии.

<sup>2)</sup>Под таксисом в биологии понимают явления, когда особи в популяции, кроме случайного блуждания, перемещаются по ареалу в определенном направлении [5], например, благодаря течениям.

Кросс-диффузионные (без обычной диффузии) члены означают, что пространственное перемещение одного объекта, описываемого одной из переменных, происходит за счет диффузии другого объекта, описываемого другой переменной. На популяционном уровне простейший пример — паразит (первый объект), находящийся внутри «хозяина» (второго объекта), перемещается за счет диффузии хозяина [16]. Модели с чистой перекрытой диффузией исследовались ранее во многих работах [17–19].

Исследуемая нами модифицированная модель ФитцХью–Нагумо с учетом перекрытой диффузии имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -u - v - 1 + 2\theta(u - u_0) + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= \varepsilon(u - v) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \end{aligned} \quad (7)$$

В случае  $\varepsilon = 1$  для этой системы легко построить точные аналитические решения. Общие решения для  $u(\xi)$  и  $v(\xi)$  записываются в виде

$$\begin{aligned} u(\xi) &= \sum_n A_n e^{\lambda_n \xi} + u^*, \\ v(\xi) &= \sum_n B_n e^{\lambda_n \xi} + v^*, \end{aligned} \quad (8)$$

где  $A_n, B_n, u^*$  и  $v^*$  — некоторые константы, определяемые для каждой области  $u < u_0$  и  $u > u_0$ ; константы  $B_n$  могут быть выражены через постоянные  $A_n$ , их выражения будут приведены ниже.

Подставляя выражения (8) в систему (7), получим следующее матричное уравнение:

$$\begin{pmatrix} c\lambda - 1 & \lambda^2 - 1 \\ -(\lambda^2 - 1) & c\lambda - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = 0. \quad (9)$$

Отсюда характеристическое уравнение

$$(\lambda^2 - 1)^2 - i^2(c\lambda - 1)^2 = 0$$

(здесь  $i^2 = -1$ ) дает четыре корня:

$$\lambda_{\pm} = -\frac{ic}{2} \pm \sqrt{1 - \frac{c^2}{4} + i} = \pm y \pm iz - \frac{ic}{2}, \tag{10}$$

$$\lambda_{\pm}^* = \frac{ic}{2} \pm \sqrt{1 - \frac{c^2}{4} - i} = \pm y \mp iz + \frac{ic}{2},$$

где

$$y = \sqrt{\frac{\sqrt{(1 - c^2/4)^2 + 1} + 1 - c^2/4}{2}}, \tag{11}$$

$$z = \sqrt{\frac{\sqrt{(1 - c^2/4)^2 + 1} - (1 - c^2/4)}{2}}$$

— положительные величины. При этом решения для фронта запишутся как

$$\begin{aligned} u_1(\xi) &= e^{y\xi} [A_+ \cos(p_- \xi) + A_+^* \sin(p_- \xi)] - 1/2, \\ u_2(\xi) &= e^{-y\xi} [A_- \cos(p_+ \xi) + A_-^* \sin(p_+ \xi)] + 1/2, \\ v_1(\xi) &= e^{y\xi} [B_+ \cos(p_- \xi) + B_+^* \sin(p_- \xi)] - 1/2, \\ v_2(\xi) &= e^{-y\xi} [B_- \cos(p_+ \xi) + B_-^* \sin(p_+ \xi)] + 1/2. \end{aligned} \tag{12}$$

Здесь введено обозначение  $p_{\pm} = z \pm c/2$ . Константы интегрирования  $B$  выражаются как

$$\begin{aligned} B_{\pm} &= \pm \frac{c(2y - q_{\mp})A_{\pm} - (c^2 + 2yq_{\mp})A_{\pm}^*}{c^2 + q_{\mp}^2}, \\ B_{\pm}^* &= \pm \frac{c(2y - q_{\mp})A_{\pm}^* + (c^2 + 2yq_{\mp})A_{\pm}}{c^2 + q_{\mp}^2}, \end{aligned} \tag{13}$$

где

$$q_{\pm} = \frac{1 \pm cy}{p_{\pm}}.$$

Процедура сшивки включает в себя пять уравнений: два уравнения для функций  $u$  и  $v$  и два уравнения для их производных, пятое уравнение представляет собой просто равенство, указывающее, что значение  $u$  в точке сшивки известно и равно  $u_0$ . Эти пять уравнений содержат пять неизвестных  $A_{\pm}, A_{\pm}^*, c$ , так что скорость  $c$  фронта может быть определена. Ее зависимость от порога возбуждения  $u_0$  показана на рис. 3. Из этого рисунка ясно видно, что кривая скорости качественно не меняется по сравнению с ранее рассмотренным случаем диагональной диффузии. Единственное отличие — в значении параметра  $\varepsilon$ , при котором имеет место многозначность: при  $\varepsilon = 1$  в случае перекрестной диффузии мы имеем многозначную кривую, в то время как для обычной диффузии — однозначную (см.

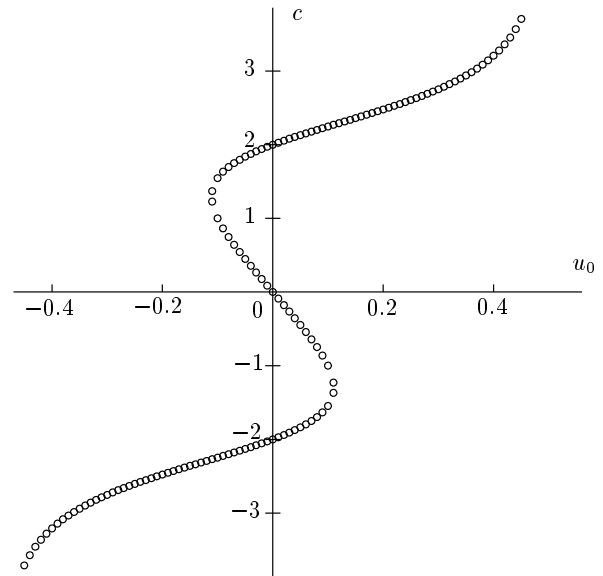
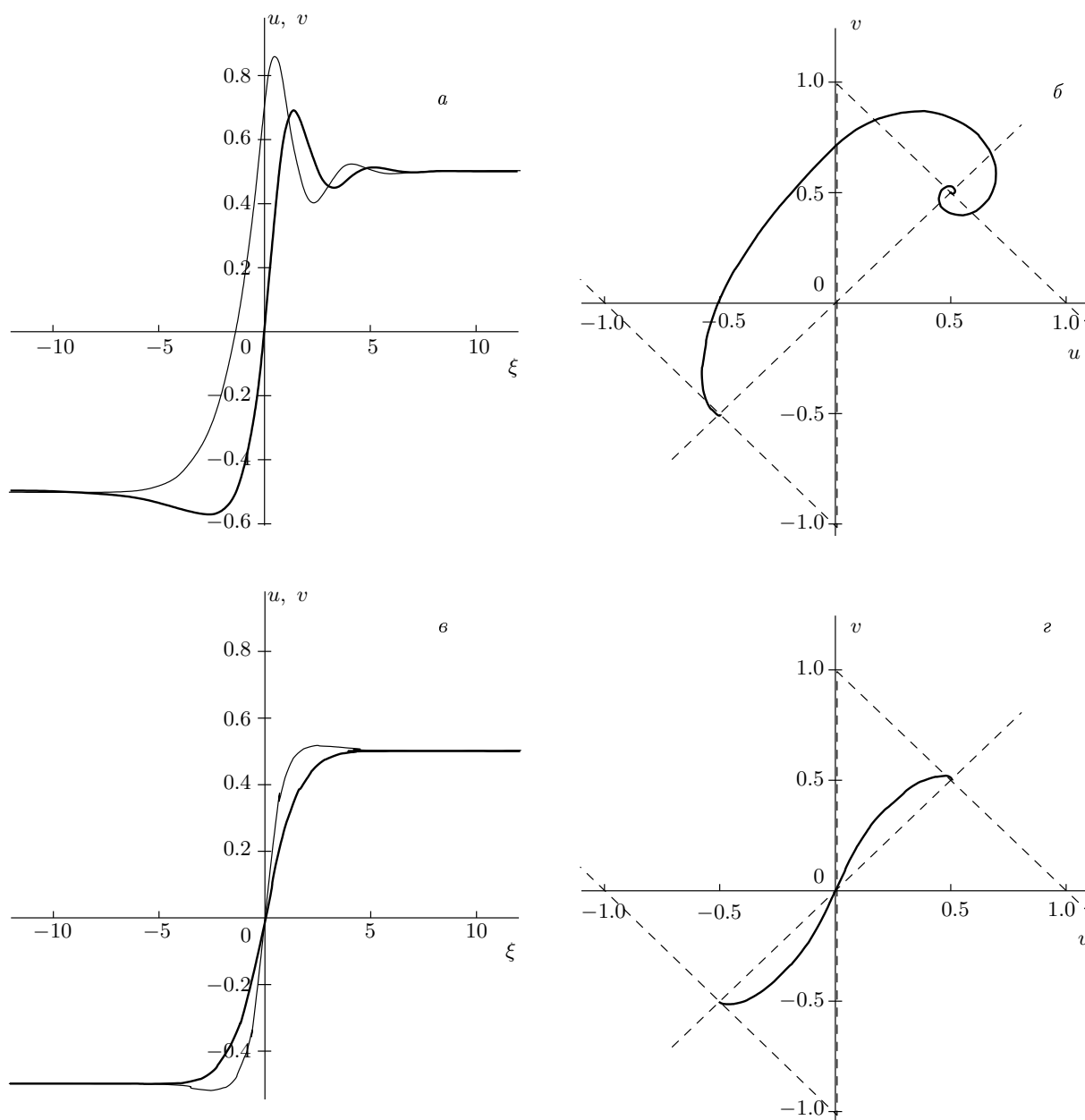


Рис. 3. Перекрестная диффузия. Зависимость скорости от порога возбуждения при  $\varepsilon = 1$

рис. 2в). Поэтому по аналогии будем называть соответствующие фронты изинговскими и блоховскими, как и ранее.

Примеры фронтов графически представлены на рис. 4. Блоховский фронт имеет ненулевую скорость, осцилляции в его профиле ярко выражены. Изинговский фронт является покоящимся и имеет типичный вид для фронтов в системах реакция–диффузия типа активатор–ингибитор. Единственное отличие здесь от случая изинговского фронта с обычной диффузией состоит в том, что профили  $u$  и  $v$  меняются местами. Для бегущих (блоховских) фронтов приведены волны с положительным значением скорости, т.е. фронты, изображенные на рис. 4а, движутся слева направо и выраженные осцилляции в профиле волны находятся впереди нее по направлению движения, что отличается от случая диагональной диффузии, рассмотренного нами ранее.

Бегущие волны описанного типа возможны и в системах с большим количеством уравнений. Так, например, совсем недавно [22] был описан случай осциллирующих фронтов в трехкомпонентной системе реакция–диффузия (с диагональной диффузией) с одним активатором и двумя ингибиторами.



**Рис. 4.** Перекрестная диффузия. Профили фронтов для (a,c) активатора  $u(\xi)$  (жирная линия) и ингибитора  $v(\xi)$  (тонкая линия) и (b,d) фазовые  $u-v$ -диаграммы; бегущий со скоростью  $c = 2$  фронт (a,b) и покоящийся фронт (c,d). Значение порога возбуждения фиксировано при  $u_0 = 0$ . Изоклины  $f(u, v) = 0$  и  $g(u, v) = 0$  показаны штриховыми линиями (b,d)

### 3. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Таким образом, двухкомпонентная система может демонстрировать новый по сравнению с однокомпонентной системой тип бегущих волн, которые в своем профиле содержат осцилляции. Характерной особенностью этих осцилляций является их за-

тухающее по пространству поведение, что кардинально отличает их от последовательностей импульсов, которые не затухают. Это дает право говорить о соответствующем квазиосцилляторном режиме, отличном от осцилляторного, порождающего периодические последовательности импульсов. Последние являются незатухающими и в двумерном случае

представляют собой спиральные волны или концентрические волны возбуждения от ведущего центра.

В случае рождения большого количества таких структур в возбудимой среде наблюдается возникновение пространственно-временного хаоса [14]. Известно, что подобный режим спирально-волновой турбулентности не является переходным и в отсутствие внешних воздействий будет сохраняться сколько угодно долго [1]. Сегодня, в связи с приложениями в аритмологии, исследование таких режимов привлекает очень большое внимание. Так, недавно было выяснено, что хаотическое поведение большинства модельных возбудимых сред может быть стабилизировано достаточно слабым параметрическим или силовым воздействием (см. [1] и приведенные там ссылки). Для более реалистичных систем, описывающих в определенном приближении возбудимую (например, сердечную) ткань, удалось показать [23], что спирально-волновая турбулентность может быть подавлена посредством слабого воздействия, прилаемого к небольшой (почти точечной) области среды.

Возникновение пространственно-временного хаоса в моделях типа моделей ФитцХью–Нагумо связано с бифуркацией фронтов, описанной в данной работе, когда в результате изменения параметра среды фронт меняет направление и спиральная волна или волны от ведущего центра разрываются на отдельные части. Интересно поэтому изучить эффект изменения скорости фронта применительно к таким типам двумерных волн как спиральные и концентрические волны возбуждения в части влияния осцилляций в их пространственном профиле.

Авторы искренне благодарны М. А. Цыганову за консультации по системам с перекрестной диффузией. Е. П. З. также благодарит фонд РФФИ (грант № 07-01-00295) за финансовую поддержку исследований.

## ЛИТЕРАТУРА

1. А. Ю. Лоскутов, А. С. Михайлов, *Основы теории сложных систем*, Изд-во «Регулярная и хаотическая динамика», Москва (2008).
2. В. А. Васильев, Ю. М. Романовский, В. Г. Яхно, *Автоволновые процессы*, Наука, Москва (1987).
3. J. D. Murray, *Mathematical Biology*, Springer-Verlag, Berlin (2003).
4. А. Н. Колмогоров, И. Г. Петровский, Н. С. Пискунов, Бюллетень МГУ. Серия А. Математика и механика **1**, 1 (1937); R. A. Fisher, *Ann. Eugenics* **7**, 355 (1937).
5. Ю. М. Свирежев, *Нелинейные волны, диссипативные структуры и катастрофы в экологии*, Наука, Москва (1987).
6. R. FitzHugh, *Biophys. J.* **1**, 445 (1961); J. Nagumo, S. Arimoto, and Y. Yoshizawa, *Proc. IRE* **50**, 2061 (1962).
7. J. Rinzel and J. B. Keller, *Biophys. J.* **13**, 1313 (1973).
8. A. Ito and T. Ohta, *Phys. Rev. A* **45**, 8374 (1992).
9. S. Koga, *Physica D* **84**, 148 (1995).
10. E. M. Kuznetsova and V. V. Osipov, *Phys. Rev. E* **51**, 148 (1995).
11. H. P. McKean, *Adv. Math.* **4**, 209 (1970).
12. E. P. Zemskov, V. S. Zykov, K. Kassner, and S. C. Müller, *Nonlinearity* **13**, 2063 (2000).
13. P. Couillet, J. Lega, B. Houchmanzadeh, and J. Lajzerowicz, *Phys. Rev. Lett.* **65**, 1352 (1990).
14. A. Hagberg and E. Meron, *Chaos* **4**, 477 (1994); A. Hagberg and E. Meron, *Nonlinearity* **7**, 805 (1994).
15. J. Rinzel and D. Terman, *SIAM J. Appl. Math.* **42**, 1111 (1982).
16. М. А. Цыганов, В. Н. Бикташев, Дж. Бриндли, А. В. Холден, Г. Р. Иваницкий, *УФН* **177**, 275 (2007).
17. R. Burridge and L. Knopoff, *Bull. Seismol. Soc. Amer.* **57**, 341 (1967).
18. J. H. E. Cartwright, E. Hernández-García, and O. Piro, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 527 (1997).
19. Y. A. Kuznetsov, Y. Antonovsky, V. N. Biktashev, and E. A. Aponina, *J. Math. Biol.* **32**, 219 (1994).
20. М. А. Тсыганов, J. Brindley, A. V. Holden, and V. N. Biktashev, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 218102 (2003); M. A. Tsyganov and V. N. Biktashev, *Phys. Rev. E* **70**, 031901 (2004).
21. V. N. Biktashev and M. A. Tsyganov, *Proc. R. Soc. London A* **461**, 3711 (2005).
22. E. P. Zemskov, *Phys. Rev. E* **73**, 046127 (2006).
23. А. Ю. Лоскутов, С. А. Высоцкий, *Письма в ЖЭТФ* **84**, 616 (2006).