ЖЭТФ, 2008, том 134, вып. 3 (9), стр. 457–468

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА И ПРИМЕНЕНИЕ СОСТОЯНИЙ СВЕТА С ДВУМЯ ФОТОНАМИ, РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПО ТРЕМ МОДАМ

В. Н. Горбачев [a], *С. П. Кулик* [b*], *А. И. Трубилко* [a**]

[a] *Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения 190000, Санкт-Петербург, Россия*

[b] *Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова 119899, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 25 апреля 2008 г.

Рассмотрены статистические свойства, схемы генерации и использование двухфотонного трехмодового света в случае, когда в одной моде присутствует не более одного фотона. Такие состояния имеют субпуассоновскую статистику фотонов, могут быть сжатыми и перепутанными. Указаны степени свободы, для которых эти свойства могут одновременно проявляться в процессе измерений. На основе эффекта спонтанного параметрического рассеяния приведены две схемы для генерации таких состояний. Показано, что для процессов телепортации, плотного кодирования и квантового распределения ключа рассматриваемые состояния могут быть использованы в качестве квантового канала.

PACS: 42.50.Dv, 42.50.Gy

1. ВВЕДЕНИЕ

Основным элементом, используемым в квантовой теории информации, является кубит или любая квантовая система, имеющая два возможных собственных состояния. Например, такая система может быть реализована на двухуровневом атоме или фотоне, обладающем двумя состояниями поляризации. Вместе с тем в последнее время большой интерес вызывают физические системы, характеризуемые гильбертовым пространством более высокой размерности ($D > 2$). Использование таких систем в протоколах квантовой информации и квантовой связи приводит к количественным и качественным различиям по сравнению со случаем кубитов [1–4]. Поэтому непосредственное изучение свойств этих систем, методов их генерации и преобразований представляют несомненный интерес. Так, состояние кутрита (quantum trit), или системы с тремя собственными состояниями, может быть получено на основе бифотонного светового поля, состоящего из пары вырожденных по частоте поляризованных фотонов [5], распространяющихся в одном направлении или в одной пространственной моде. В серии работ [6] продемонстрированы методы генерации, преобразования и статистического восстановления состояния кутрита на основе бифотонов.

Если частоты фотонов, составляющих пару, не вырождены, то такой бифотон представляет собой четырехуровневую систему или кукварт (quantum quart) [7]. Одним из важных свойств двухфотонных состояний, которое предопределяет использование на практике, является возможность их приготовления в перепутанном состоянии. Например, степенью перепутывания пары частотно-вырожденных фотонов можно управлять путем их распределения по нескольким пространственным модам. Напомним, что перепутанные состояния являются главным ресурсом многих квантовых информационных протоколов — телепортации, плотного кодирования, некоторых протоколов квантового распределения ключа.

Система, где основным элементом является кутрит, может использоваться для увеличения секретности известного квантового криптогра-

[*] E-mail: Sergei.Kulik@gmail.com

[**] E-mail: tai@at3024.spb.edu

фического протокола $BB84$ [8]. Перепутанные состояния двух кутритов могут быть применены в вычислительном алгоритме Гровера [9]. Важное явление обмена перепутыванием (entanglement swapping) исследовано в работе [10], а особенности сохранения многочастичной системы кутритов для коллективного взаимодействия изучались в [11].

Основной целью работы является исследование двухфотонных фоковских состояний света, когда фотоны распределены по трем модам так, что в каждой находится не более одного фотона. Будут рассмотрены следующие вопросы: 1) статистические свойства; 2) методы генерации; 3) применение многомодовых двухфотонных состояний. Эти состояния имеют известные признаки неклассического света, такие как субпуассоновская статистика фотонов, сжатие и перепутанность. Они существуют одновременно и могут быть использованы в протоколах квантовых вычислений и квантовой связи.

С практической точки зрения это означает, что относительно простыми экспериментальными методами может быть создан источник света, у которого часть мод обладает субпуассоновской статистикой, а другая часть мод находится в сжатом состоянии. Состояние одной моды тоже может быть сжатым и одновременно субпуассоновским. Так, у суперпозиционного фоковского состояния с одним фотоном, $(1/2)(|0\rangle + \sqrt{3}|1\rangle)$, параметр Манделя отрицательный и равен $-3/4$. Дисперсия оператора канонической координаты в этом состоянии оказывается меньше, чем у когерентного состояния. Это означает, что такое состояние имеет субпуассоновскую статистику фотонов и является сжатым по координате.

Эти свойства не противоречат соотношению неопределенностей для оператора числа фотонов и оператора координаты и могут существовать одновременно. Однако в силу некоммутативности этих операторов их нельзя одновременно наблюдать при измерении и, следовательно, использовать. В эксперименте такие состояния можно приготовить с помощью эффекта спонтанного параметрического рассеяния света. В работе рассмотрены две схемы, которые решают задачу. Первая содержит два нелинейных кристалла, а процесс спонтанного рассеяния возбуждается трехмодовой накачкой. Вторая схема включает один кристалл, одну моду накачки и набор светоделительных пластинок, которые позволяют распределить два фоковских фотона по трем модам требуемым образом, однако, детерминистически, т. е. без пост-селекции.

Рассматриваемые нами состояния принадлежат W-классу, который хорошо известен в квантовой теории информации. Впервые схема для их генерации на основе параметрического взаимодействия в среде с кубической нелинейностью была предложена в работе [12]. Экспериментальные реализации на поляризованных фотонах представлены в работах [13]. В этих схемах, в отличие от нашей, требуется пост-селекция, поскольку используются поляризованные фотоны, что приводит к вероятностному приготовлению желаемых W-состояний, скорость генерации которых, однако, невелика.

Анализируемые состояния являются перепутанными, поэтому их можно использовать в квантовых информационных процессах. Они относятся к состояниям W-класса и могут быть использованы как квантовый канал для процессов телепортации перепутанных состояний, трехбитного плотного кодирования и квантового распределения ключа. Для этих задач нужно уметь осуществлять преобразования света, которые описываются операторами Паули. Эти преобразования хорошо известны для поляризованных фотонов[1)]. Для случая фоковских состояний фотонов мы предлагаем пример реализации преобразований σ_x и логического НЕТ на основе ячейки с проекционным измерением.

Статья построена следующим образом. Вначале с помощью характеристической функции рассматриваются статистические свойства состояний, затем приводятся две экспериментальные схемы для их генерации и обсуждаются протоколы телепортации, плотного кодирования и квантового распределения ключа. В заключение приведен пример реализации логической операции отрицания.

2. СТАТИСТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА

Если два фотона распределены по трем модам, то такой свет может иметь почти все особенности, характерные для неклассических состояний[2)] электромагнитного поля: субпуассоновскую статистику фотонов, сжатие и перепутанность. Более того, эти свойства могут существовать одновременно, их можно зарегистрировать и, следовательно, использовать для приложений.

[1)] Заметим, что обсуждение поляризационных свойств двухфотонного многомодового поля представляет собой отдельную задачу и выходит за рамки данной работы [14].

[2)] В квантовой оптике нет единого определения неклассического состояния света [15]. Будем использовать этот термин, имея в виду сингулярность квазивероятности Глаубера–Сударшана.

2.1. Характеристическая функция исходного состояния

Рассмотрим состояние света, когда два фотона распределены по трем модам так, что на каждую приходится не более одного фотона:

$$\eta = A|110\rangle + B|101\rangle + C|011\rangle, \tag{1}$$

где $|A|^2+|B|^2+|C|^2=1$, $|110\rangle = |1\rangle\otimes|1\rangle\otimes|0\rangle$ и т. д., $|n\rangle$ — фоковские состояния света. Поскольку фотоны обладают бозонной статистикой, в одной моде могут находиться два фотона. Поэтому в общем случае нужно учитывать вклады типа $|200\rangle$. Это означает, что реализация состояния (1) нетривиальна: его нельзя приготовить с помощью линейных оптических элементов детерминированным образом. Однако состояние η может быть получено при нелинейных взаимодействиях. Так, например, процесс деления частоты, в котором три классические волны накачки преобразуются в пары фотонов a–b, a–c, b–c, можно описать эффективным гамильтонианом взаимодействия вида [16]

$$H_{eff} = i\hbar(k_1 a^\dagger b^\dagger + k_2 a^\dagger c^\dagger + k_3 b^\dagger c^\dagger - \\ - k_1 ab - k_2 ac - k_3 bc), \tag{2}$$

где $x, x^\dagger$ — операторы уничтожения и рождения фотонов трех мод $x = a, b, c$, коэффициенты k_j $(j = 1,2,3)$ — константы взаимодействия. Рассматривая с помощью гамильтониана (2) генерацию света из вакуумного состояния, в линейном приближении имеем

$$\eta_* = \mu|\mathrm{vac}\rangle + \epsilon[A|110\rangle + B|101\rangle + C|011\rangle], \tag{3}$$

где константы μ и ϵ будем считать вещественными и связанными условием нормировки $\mu^2+\epsilon^2=1$, $\epsilon A = k_1 t$, $\epsilon B = k_2 t$, $\epsilon C = k_3 t$.

Далее, вместо состояния (1), мы будем обсуждать свойства состояния η_*, определенного согласно (3), в условиях $\epsilon \ll 1$ с учетом вакуумного вклада. На наш взгляд, оно является наиболее близким к экспериментальной реализации. Для описания статистических свойств света используем нормально упорядоченную характеристическую функцию, которая определяется как среднее значение операторов сдвига $D_{\mathcal N}(\beta_j) = \exp(\beta_j x^\dagger)\exp(-\beta_j^* x)$ для мод $x = a, b, c$:

$$C(\beta_1,\beta_2,\beta_3) = \mathrm{Sp}\left(D_{\mathcal N}(\beta_1)D_{\mathcal N}(\beta_2)D_{\mathcal N}(\beta_3)|\eta_*\rangle\langle\eta_*|\right).$$

Характеристическая функция $C(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$ позволяет вычислить любые нормально упорядоченные средние от операторов путем дифференцирования по комплексным переменным β_1,β_2,β_3. Так,

$$\langle a^{\dagger M} b^{\dagger N} c^{\dagger P} a^Q b^R c^S\rangle = \\ = \Big\{ \frac{\partial^M}{\partial\beta_1^M}\,\frac{\partial^N}{\partial\beta_2^N}\,\frac{\partial^P}{\partial\beta_3^P}\,\frac{\partial^Q}{\partial(-\beta_1^*)^Q} \times \\ \times \frac{\partial^R}{\partial(-\beta_2^*)^R}\,\frac{\partial^S}{\partial(-\beta_3^*)^S} C(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\Big\}_{\beta_1,\beta_2,\beta_3=0}.$$

Для состояния η_* характеристическая функция имеет вид

$$C(\beta_1,\beta_2,\beta_3) = 1 + (\langle a^\dagger b^\dagger\rangle\beta_1\beta_2 + \langle a^\dagger c^\dagger\rangle\beta_1\beta_3 + \\ + \langle b^\dagger c^\dagger\rangle\beta_2\beta_3 + \mathrm{c.c.}) - \\ - (\langle b^\dagger c\rangle\beta_2\beta_3^* + \langle a^\dagger c\rangle\beta_1\beta_3^* + \langle a^\dagger b\rangle\beta_1\beta_2^* + \mathrm{c.c.}) - \\ - \langle n_a\rangle|\beta_1|^2 - \langle n_b\rangle|\beta_2|^2 - \langle n_c\rangle|\beta_3|^2 + \\ + \langle n_a n_b\rangle|\beta_1\beta_2|^2 + \langle n_a n_c\rangle|\beta_1\beta_3|^2 + \langle n_b n_c\rangle|\beta_2\beta_3|^2, \tag{4}$$

где средние определяются выражениями

$$\langle ab\rangle = \mu\epsilon A, \quad \langle ac\rangle = \mu\epsilon B, \quad \langle bc\rangle = \mu\epsilon C,$$

$$\langle a^\dagger b\rangle = \epsilon^2 B^* C, \quad \langle a^\dagger c\rangle = \epsilon^2 A^* C, \quad \langle b^\dagger c\rangle = \epsilon^2 A^* B,$$

$$\langle n_a\rangle = (|A|^2+|B|^2)\epsilon^2, \quad \langle n_b\rangle = (|A|^2+|C|^2)\epsilon^2,$$

$$\langle n_c\rangle = (|B|^2+|C|^2)\epsilon^2, \quad \langle n_a n_b\rangle = |A|^2\epsilon^2,$$

$$\langle n_a n_c\rangle = |B|^2\epsilon^2, \quad \langle n_b n_c\rangle = |C|^2\epsilon^2.$$

Эти средние являются базисными в том смысле, что через них будут выражаться все другие средние. Из выражения (4) нетрудно получить характеристические функции состояния поля для одной моды, например $C_a = C(\beta_1,0,0) = 1-\langle n_a\rangle|\beta_1|^2$, и любой пары мод, например

$$C_{ab} = C(\beta_1,\beta_2,0) = (\langle a^\dagger b^\dagger\rangle\beta_1\beta_2 - \langle a^\dagger b\rangle\beta_1\beta_2^* + \mathrm{c.c.}) - \\ - \langle n_a\rangle|\beta_1|^2 - \langle n_b\rangle|\beta_2|^2 + \langle n_a n_b\rangle|\beta_1\beta_2|^2.$$

С помощью характеристической функции можно вычислить наблюдаемые, которые определяют свойства состояния (3). Без вычислений можно указать две особенности, приводящие к неклассическим статистическим свойствам η_*: 1) фоковское состояние отдельных мод; 2) когерентность. Так, первая особенность является основой субпуассоновской статистики фотонов, а вторая может приводить к сжатию и перепутанности.

2.2. Субпуассоновская статистика фотонов

Для характеристики статистики фотонов будем использовать параметр Манделя ξ, который определяет отличие дисперсии числа фотонов от пуассоновской: $\langle(\Delta n)^2\rangle = \langle n^2\rangle - \langle n\rangle^2 = \langle n\rangle(1+\xi)$. При $\xi < 0$ статистика является субпуассоновской, что является признаком неклассического состояния света.

Обратим внимание на следующие статистические свойства света в состоянии (3).

1. Статистика фотонов каждой моды является субпуассоновской с параметром Манделя $\xi_x = -\langle n_x\rangle$, $x = a, b, c$. Так, например, $\xi_a = -(|A|^2 + |B|^2)\epsilon^2$. Если $\epsilon \ll 1$, то отклонение от пуассоновского уровня невелико.

2. Для каждой пары мод возникает группировка фотонов. Так, совместная скорость счета фотонов и скорость случайных совпадений двух мод, пусть a и b, соответственно равны $\langle n_a n_b\rangle = \epsilon^2|A|^2$ и $\langle n_a\rangle\langle n_b\rangle = \epsilon^4(|A|^2 + |BC|^2)$. Отсюда следует, что при $\epsilon \ll 1$ возникает группировка фотонов, поскольку $\langle n_a n_b\rangle > \langle n_a\rangle\langle n_b\rangle$.

3. Статистика разности числа фотонов двух мод является субпуассоновской. Рассматривая оператор разности числа фотонов мод a и b, который определяется выражением $n_- = n_a - n_b$, найдем параметр Манделя

$$\xi_- = -2|A|^2(2|A|^2 + |B|^2 + |C|^2)^{-1} - \epsilon^2(|B|^2 - |C|^2)^2(1 + |A|^2)^{-1}.$$

Это выражение справедливо при любом ϵ. Если $A = B = C$, то $\xi_- = -1/2$. Это означает, что дисперсия в два раза меньше, чем у распределения Пуассона. Найденное свойство обусловлено квантовой корреляцией фотонов между модами.

4. Статистика суммарного числа фотонов пары мод является суперпуассоновской. Так, для двух мод, a и b, рассматривая оператор суммарного числа фотонов $n_+ = n_a + n_b$, найдем параметр Манделя

$$\xi_+ = 2|A|^2(2|A|^2 + |B|^2 + |C|^2)^{-1} - \epsilon^2(|B|^2 + |C|^2)^2(2|A|^2 + |B|^2 + |C|^2)^{-1}.$$

Из этого выражения следует, что при $\epsilon \ll 1$ статистика суммарного числа фотонов пары мод является суперпуассоновской.

Схемы для измерения рассмотренных особенностей статистики фотонов показаны на рис. 1. Приведенные свойства, однако, не требуют наличия когерентности и остаются справедливы для смешанного состояния, которое описывается матрицей плотности

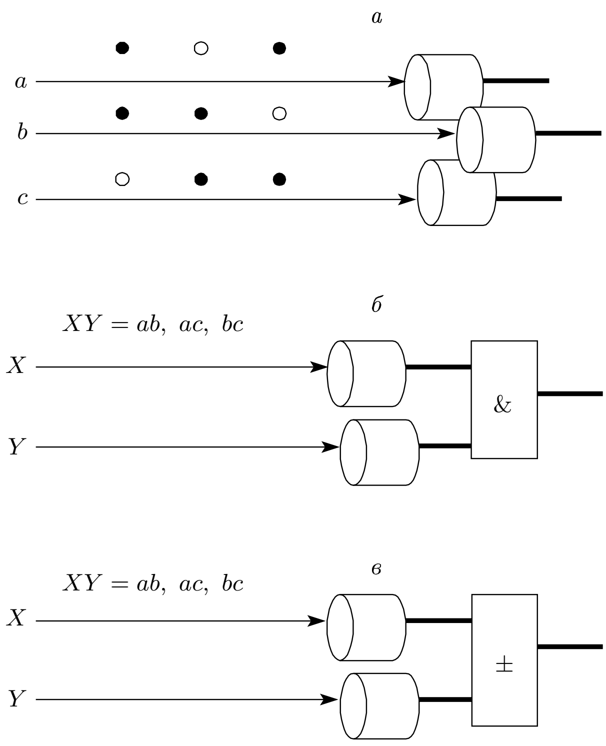

Рис. 1. Статистика фотонов в состоянии $\eta_* = \mu|\text{vac}\rangle + \epsilon[A|110\rangle + B|101\rangle + C|011\rangle]$: *а* — субпуассоновская статистика фотонов при измерении каждой моды; *б* — группировка фотонов в парах мод при измерении скорости счета; *в* — статистика суммарного числа фотонов суперпуассоновская, а статистика разностного числа фотонов субпуассоновская

$$\rho = (1-\epsilon^2)|\text{vac}\rangle\langle\text{vac}| + \epsilon^2[|A|^2|110\rangle\langle 110| + |B|^2|101\rangle\langle 101| + |C|^2|011\rangle\langle 011|]. \quad (5)$$

В отличие от (5), матрица плотности чистого состояния (3) имеет недиагональные элементы, или когерентность, которая приводит к неклассическим состояниям мод, например к сжатию.

2.3. Сжатые состояния

Для анализа сжатых состояний мод рассмотрим схему, представленную на рис. 2. Пусть две моды, например a и b, смешиваются на светоделительной пластинке с последующей регистрацией фотонов детекторами, а фотоны в третьей моде регистрируются непосредственно. Светоделительная пластинка осуществляет унитарное преобразование

$$D = \begin{pmatrix} t^* & -r \\ r^* & t \end{pmatrix}, \quad (6)$$

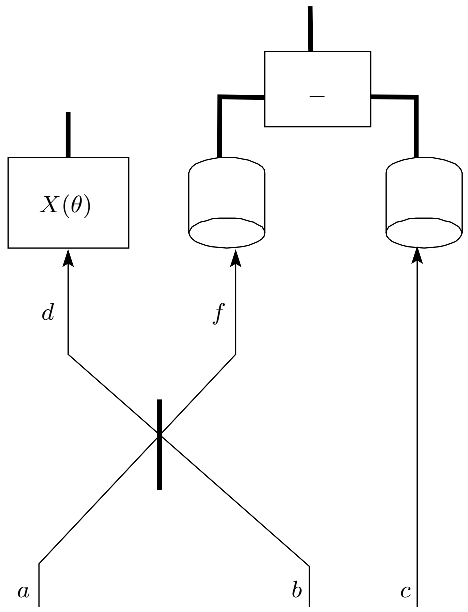

Рис. 2. Сжатые состояния и субпуассоновская статистика фотонов. Пара мод, a и b, смешиваются на полупрозрачной делительной пластинке. Образовавшаяся мода d оказывается сжатой. Одновременно статистика разностного числа фотонов в модах f и c является субпуассоновской

где коэффициенты пропускания t и отражения r связаны соотношением $|t|^2 + |r|^2 = 1$. Далее ограничимся простым случаем, когда коэффициенты t и r вещественны, полагая $t = t^* = u$, $r = r^* = -v$. Тогда операторы поля на выходе светоделительной пластинки имеют вид

$$\begin{aligned} d &= ua + vb, \\ f &= -va + ub, \end{aligned} \tag{7}$$

где $u^2 + v^2 = 1$. В результате на выходе схемы имеем три моды, которые описываются операторами d, f, c с последующей регистрацией. Особенностью состояния η_* является наличие сжатия моды d.

Для моды d введем квадратурный оператор

$$X(\theta) = d^\dagger e^{i\theta} + \text{H.c.},$$

где θ — разность фаз между исследуемой модой и волной гетеродина, и определим его дисперсию $\langle(\Delta X)^2\rangle = \langle X^2\rangle - \langle X\rangle^2$. Состояние будет сжатым, если $\langle(\Delta X)^2\rangle < 1$, где единица отвечает значению дисперсии когерентного состояния. Выражение для дисперсии имеет вид

$$\begin{aligned} \langle(\Delta X)^2\rangle = 1 + 2\epsilon^2(|A|^2 + |uB + vC|^2) + \\ + 2\epsilon\mu uv(Ae^{-2i\theta} + \text{c.c.}). \end{aligned} \tag{8}$$

Отсюда следует, что у моды d может возникать сжатое состояние. Так, полагая $u = v$, $B = C$ и $\arg A - 2\theta = \pi$, найдем

$$\langle(\Delta X)^2\rangle = 1 - 2\epsilon\mu|A| \left(1 - \frac{\epsilon}{\mu}|A|\right).$$

Сжатие появляется при условии

$$\epsilon|A|/\mu < 1. \tag{9}$$

Это состояние можно зарегистрировать, измеряя квадратурный оператор X, схема измерения которого хорошо известна. Она включает классическую опорную волну, с которой смешивается исследуемый сигнал, с последующей регистрацией разностного фототока двух приемников излучения. Наличие сжатого состояния света приводит к подавлению дробового шума в спектре разностного фототока

$$i^2(\omega) = \int d\tau\, e^{i\omega\tau} \langle X(t)X(t+\tau)\rangle$$

в окрестности нулевых частот. Выражение для $i^2(\omega \approx 0)$ имеет вид

$$i^2(\omega \approx 0) = 1 - 2\epsilon\mu|A| \left(1 - \frac{\epsilon}{\mu}|A|\right), \tag{10}$$

где единица отвечает уровню дробового шума, а квантовая эффективность детекторов принята равной единице. Отсюда следует, что при условии (9), когда возникает сжатое состояние, уровень шумов становится ниже дробового: $i^2(\omega \approx 0) < 1$.

2.4. Сжатие и субпуассоновская статистика фотонов

Если мода d находится в сжатом состоянии, то она не обладает субпуассоновской статистикой. Так для случая $B = C$, $u = v$ параметр Манделя моды d равен $\xi_d = |A|^2 - \epsilon^2$. Отсюда следует, что при условии (9), когда возникает сжатие, $\xi_d > 0$.

Вместе с тем особенностью состояния η_* является одновременное наличие субпуассоновской статистики фотонов и сжатия, однако у разных степеней свободы. Для одной степени свободы, или моды, наблюдать два этих свойства нельзя из-за соотношения неопределенностей, поскольку операторы наблюдаемых — оператор числа фотонов и квадратурный оператор — не коммутируют. Для нашего случая оба свойства можно зарегистрировать с помощью рассмотренной схемы, представленной на рис. 2, где сжатое состояние моды d будет проявляться одновременно с субпуассоновской статистикой фотонов при измерении дисперсии оператора разностного числа фотонов $n_g = f^\dagger f - c^\dagger c$ двух оставшихся мод f и c. Заметим, что для выделенных степеней свободы операторы наблюдаемых, n_g и $X(\theta)$, коммутируют.

Так, рассматривая разностный фототок детекторов, регистрирующих моды f и c, найдем, что его спектр в низкочастотной области определяется параметром Манделя ξ_s:

$$i_s^2(\omega \approx 0) = i_0(1 + \xi_s), \tag{11}$$

где $i_0 = \langle r^\dagger r + c^\dagger c\rangle$ — дробовый шум и квантовая эффективность фотоприемников положена равной единице. В условиях, когда $u = v$, $B = C$ и $\epsilon \ll 1$, выражение для ξ_s имеет вид $\xi_s = 1 - 4|B|^2$, где в принятых приближениях $|B|^2 < 1/2$. Отсюда следует, что при $|B|^2 > 1/4$ наряду со сжатым состоянием моды d возникает субпуассоновская статистика разностного числа фотонов мод f и c. Последнее приводит к подавлению уровня дробового шума. Так, например, дробовый шум будет подавлен в четыре раза, если $|B|^2 = 7/16$: $i_s^2(0) = i_0/4$.

2.5. Перепутанность

Поскольку волновая функция η_* нефакторизована, состояние трех мод, a, b и c, является перепутанным. Чтобы проиллюстрировать это свойство, вернемся к рассмотренной выше схеме, где моды a и b смешиваются на делительной пластинке, на выходе которой измеряется число фотонов мод d и f. Из-за перепутанности результат интерференции входных мод a и b будет зависеть от исхода измерения моды c. Другими словами, перепутывание приводит к тому, что условные (при условии регистрации фотона в моде c) распределения вероятностей обнаружить фотон в модах d и f носят осциллирующий характер в зависимости от состояния входных мод и параметров светоделителя.

Пусть измеряется число фотонов в моде c. Это измерение описывается фоковским базисом $|n\rangle_c$. Вероятности измерить 0 и 1 фотон равны

$$\mathrm{Prob}(0) = \mu^2 + \epsilon^2|A|^2, \quad \mathrm{Prob}(1) = \epsilon^2(|B|^2 + |C|^2).$$

При этом волновая функция исходного состояния, в соответствии с проекционным постулатом, коллапсирует к следующим состояниям:

$$\begin{aligned} \eta_* &\to \frac{(\mu|vac\rangle + \epsilon A|110\rangle)}{\sqrt{\mathrm{Prob}(0)}}, \\ \eta_* &\to \frac{(B|101\rangle + C|011\rangle)}{\sqrt{\mathrm{Prob}(1)}}. \end{aligned} \tag{12}$$

Для этих двух исходов измерения результат интерференции мод a и b оказывается существенно разным. Если в моде c зафиксировано 0 фотонов, то средние числа фотонов на выходе светоделительной пластинки одинаковы и равны

$$\langle d^\dagger d\rangle_0 = \langle f^\dagger f\rangle_0 = \frac{\epsilon^2|A|^2}{\mu^2 + \epsilon^2|A|^2} \propto \epsilon^2. \tag{13}$$

Если в моде c зарегистрирован фотон, то

$$\begin{aligned} \langle d^\dagger d\rangle_1 &= \frac{|uB + vC|^2}{2(|B|^2 + |C|^2)}, \\ \langle f^\dagger f\rangle_1 &= \frac{|vB - uC|^2)}{2(|B|^2 + |C|^2)}. \end{aligned} \tag{14}$$

Для случая $\epsilon \ll 1$ вероятность зарегистрировать 1 фотон в моде c будет весьма малой величиной: $\mathrm{Prob}(1) \ll \mathrm{Prob}(0)$. Пусть зарегистрировано 0 фотонов в моде c, тогда, в соответствии с выражением (13), среднее число фотонов в модах f и d будет одинаковым и малым. Напротив, если в моде c зарегистрирован 1 фотон, то, в соответствии с соотношениями (14), оставшийся фотон можно направить в один из каналов. Так, например, фотон будет распределен в моду d, если $vB = uC$, или в моду f, если $vB = -uC$. Такое перераспределение фотонов между модами f и d происходит вследствие перепутанности, или квантовой корреляции фотонов в состоянии η_*.

3. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ РЕАЛИЗАЦИИ

3.1. Схема с двумя кристаллами

В эксперименте двухфотонное состояние типа (3) может быть осуществлено с помощью явления спонтанного параметрического рассеяния света. Феноменологически это явление объясняется распадом фотона лазерной накачки (p), которую можно считать заданной в когерентном состоянии, на пару фотонов, состоящую из сигнального (s) и холостого (i). В стационарных условиях частоты фотонов связаны условием $\omega_p = \omega_s + \omega_i$, а максимальная интенсивность достигается в направлениях $\mathbf{k}_p = \mathbf{k}_s + \mathbf{k}_i$, где $\mathbf{k}_p, \mathbf{k}_s, \mathbf{k}_i$ — волновые векторы накачки, сигнального и холостого фотонов.

Одна из возможных схем для генерации состояний (3) приведена на рис. 3. На нелинейный кристалл, обладающий квадратичной восприимчивостью, подаются три классических волны накачки: $k_p^{(ab)}$, $k_p^{(ac)}$, $k_p^{(bc)}$. Каждая из них вызывает спонтанное параметрическое рассеяние в неколлинеарном режиме, когда фотоны, составляющие пары a–b,

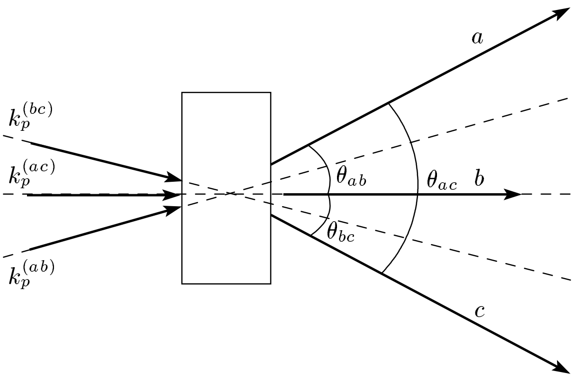

Рис. 3. Схема генерации состояния $\eta_* = \mu|\mathrm{vac}\rangle + +\epsilon[A|110\rangle + B|101\rangle + C|011\rangle]$ с тремя накачками. Из-за спонтанного параметрического рассеяния каждая волна накачки распадается на пару сигнальных и холостых фотонов

a–c и b–c, распространяются под определенным углом к направлениям волновых векторов накачек каждой пары. Этот процесс описывается эффективным гамильтонианом (2). Из рис. 3 видно, что углы разлета фотонов должны удовлетворять условию $\theta_{ac} = \theta_{ab} + \theta_{bc}$. Заметим, что в эксперименте такой способ получения состояний (3) представляется не оптимальным, поскольку, во-первых, он не предполагает простого управления амплитудами A, B и C и, во-вторых, для его осуществления требуются как минимум два кристалла.

3.2. Схема с одним кристаллом

Однако обсуждаемый способ можно модифицировать, выбрав другие условия пространственного синхронизма. Рассмотрим схему, показанную на рис. 4. Здесь накачка $k_p^{(1)}$ падает на кристалл, обладающий квадратичной восприимчивостью, под некоторым углом к оптической оси так, чтобы в кристалле осуществлялся коллинеарный частотно-вырожденный режим спонтанного параметрического рассеяния (рис. 4*а*). Поляризация родившихся фотонов обыкновенная, а накачка необыкновенная. Оба фотона, таким образом, принадлежат одной пространственной моде a'. Пространственные моды a и b — это две выходные моды поляризационно-нечувствительного светоделителя BS1, у которого «загруженной» оказывается одна входная мода (a'), а другая (b') находится в вакуумном состоянии. С вероятностью $|t|^2$ светоделитель направляет один из фотонов пары в моду a, а с вероятностью $|r|^2 = (1 - |t|^2)$ другой фотон в моду b. Заметим, что с такой же вероятностью оба фотона оказываются либо в моде a, либо в моде b.

В том же кристалле возможен и неколлинеарный режим генерации пар фотонов, когда фотоны, составляющие пару, разлетаются под некоторым углом θ_2 к направлению распространения θ_1 классической накачки $k_p^{(2)}$ (рис. 4*б*). Таким образом, объединяя две схемы в одну (рис. 4*в*), можно осуществить процесс, в котором пары фотонов оказываются распределенными по трем пространственным модам:

$$\Psi = t_0|110\rangle + e^{i\varphi} r_0 (t|101\rangle + r|011\rangle). \qquad (15)$$

Здесь t_0 и r_0 — амплитуды вероятности того, что пара фотонов возникнет от накачки $k_p^{(1)}$ или $k_p^{(2)}$ в процессах соответственно коллинеарного или неколлинеарного спонтанного параметрического рассеяния. Регулировать амплитуды t_0, r_0, t, r можно, если использовать в качестве BS0 и BS1 светоделители с переменными коэффициентами отражения/пропускания, например, интерферометры Маха–Цандера. Относительную фазу φ можно варьировать, осуществляя фазовую задержку в одном из выходных плеч светоделителя BS0.

Преимуществом обсуждаемой схемы служит возможность приготовления произвольного состояния вида (3). Недостатком является то, что состояние (15) возникает лишь в результате пост-селекции или случайным образом. При этом учитываются лишь события, при которых фотоны, родившиеся в коллинеарном режиме, оказываются в разных пространственных модах a и b. Такую пост-селекцию можно реализовать, например, при помощи схемы совпадений фотоотсчетов и пары счетчиков фотонов, помещенных в моды a и b.

Полное состояние без пост-селекции, генерируемое в схеме, показанной на рис. 4*в*, имеет вид

$$\Psi = A|110\rangle + B|101\rangle + C|011\rangle + D|200\rangle + E|020\rangle, \qquad (16)$$

в котором коэффициенты определяются параметрами светоделителей $A = 2t_0 tr$, $B = r_0 t e^{i\varphi}$, $C = r_0 r e^{i\varphi}$, $D = t_0 t$, $E = t_0 r$.

В отличие от (1) состояние Ψ содержит два фотона в одной моде. Однако с помощью линейных оптических элементов его можно преобразовать к виду (1), где в каждой моде содержится только один фотон. Это можно сделать с помощью двух светоделительных пластинок путем распределения двух фотонов по каждой моде и деструктивной интерференции всех состояний с двумя фотонами. Пусть светоделительные пластинки описываются коэффициентами $u_z, v_z, z = 1, 2$ и осуществляют унитарное

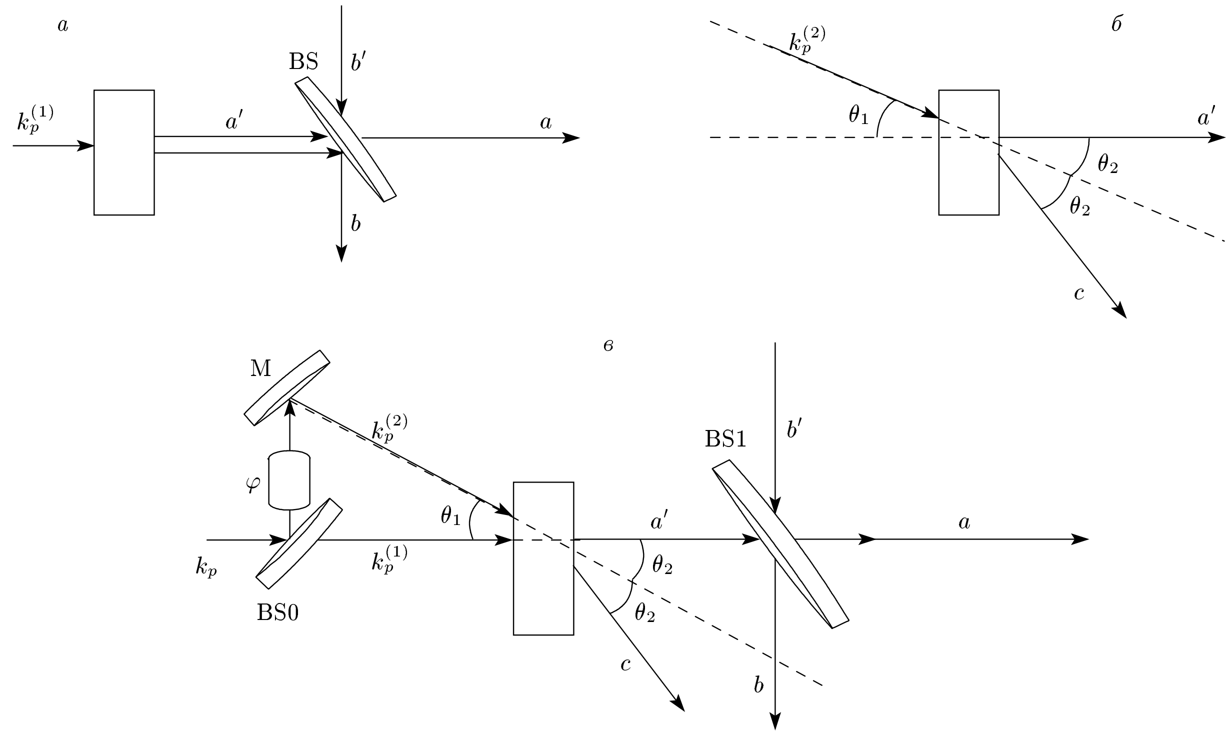

Рис. 4. Схема с одним кристаллом: *а* — коллинеарный частотно-вырожденный режим генерации холостого и сигнального фотонов с одинаковой поляризацией; *б* — неколлинеарный режим генерации, который возможен в том же кристалле; *в* — два режима спонтанного параметрического рассеяния в одном кристалле (φ — фазовращатель, M — зеркало, BS — светоделители). Без пост-селекции на выходе возникает состояние $\Psi = A|110\rangle + B|101\rangle + C|011\rangle + D|200\rangle + E|020\rangle$

преобразование вида (7). Тогда необходимое унитарное преобразование определяется коэффициентами волновой функции Ψ.

Рассмотрим последовательное преобразование волновой функции Ψ с помощью двух светоделительных пластинок. Пусть первая пластинка смешивает моды b и c и описывается оператором $T_{bc}(u_1, v_1)$, а вторая пластинка смешивает моду a с модой b и описывается оператором $T_{ab}(u_2, v_2)$. Тогда

$$\begin{aligned}
&[T_{ab}(u_2,v_2)\otimes 1][1\otimes T_{bc}(u_1,v_1)]\times\\
&\times\Big(A|110\rangle + B|101\rangle + C|011\rangle + D|200\rangle + E|020\rangle\Big) =\\
&= [(Au_1+Bv_1)(v_2^2-u_2^2) - 2Cu_1v_1u_2v_2 +\\
&\quad + 2Du_2v_2 - 2Eu_1^2u_2v_2]|110\rangle +\\
&+ [Av_1u_2 - Bu_1u_2 + C(v_1^2-u_1^2)v_2 + 2Eu_1v_1v_2]|101\rangle +\\
&+ [Av_1v_2 - Bu_1v_2 - Cu_2(v_1^2-u_1^2) - 2Eu_1v_1u_2]|011\rangle +\\
&+ [Au_1u_2v_2 + Bv_1u_2v_2 + Cu_1v_1v_2^2 + Du_2^2 + Eu_1^2v_2^2]|200\rangle +\\
&+ [-Au_1u_2v_2 - Bv_1u_2v_2 + Cu_1v_1v_2^2 + Dv_2^2 +\\
&\quad + Eu_1^2u_2^2]|020\rangle + [-Cu_1v_1 + Ev_1^2]|002\rangle. \qquad (17)
\end{aligned}$$

Отсюда видно, что три последних слагаемых, содержащие по два фотона в каждой моде, могут быть исключены, если равны нулю коэффициенты, стоящие при них. Как показывает анализ, необходимым условием для этого являются равенство $D = -E$ и связь коэффициентов пропускания и отражения первой светоделительной пластинки $Cu_1 = Ev_1$.

Можно получить условия для параметров u_2, v_2 второй светоделительной пластинки, которые в общем виде слишком громоздки. Поэтому здесь мы ограничимся частным случаем. Пусть в выражении (16) имеются следующие начальные коэффициенты:

$$A = -\frac{t_0}{\sqrt{2}}, \quad B = -C = \frac{r_0}{\sqrt{2}}, \quad D = -E = \frac{t_0}{2}.$$

Тогда

$$v_1 = \frac{\sqrt{2}r_0}{\sqrt{1+r_0^2}}, \quad u_1 = \frac{t_0}{\sqrt{1+r_0^2}},$$

а для второй светоделительной пластинки

$$v_2^2 = \frac{1}{2}\left[1 \pm \left(\frac{t_0^2(1+r_0^2)}{(\sqrt{2}r_0^2 - t_0^2)^2} + 1\right)^{-1/2}\right], \quad v_2^2 + u_2^2 = 1.$$

Будем считать, что $t_0 = r_0 = 1/\sqrt{2}$ и выполнены условия $v_1 \approx 0.82$, $u_1 \approx 0.58$, $v_2 \approx 0.79$, $u_2 \approx 0.62$. Тогда в результате на выходе образуется состояние

$$\eta = 0.484|110\rangle - 0.826|101\rangle - 0.246|011\rangle. \qquad (18)$$

В приведенных рассуждениях мы опустили вакуумный вклад, который не играл роли и может быть легко восстановлен. Тогда рассматриваемая схема с одним кристаллом, дополненная двумя светоделительными пластинками, позволяет сгенерировать состояние η_*.

4. ПРИМЕНЕНИЕ

Обсуждая возможные применения, ограничимся анализом состояния η, определенного согласно выражению (1). Оно является перепутанным и потому представляет интерес для задач квантовой теории информации. Основная особенность, которая позволяет установить круг приложений состояния η, связана с тем, что оно принадлежит состояниям W-класса, которые могут выступать в роли квантовых каналов.

4.1. Связь с W-состояниями

Рассматривая фоковские состояния $|0\rangle, |1\rangle$ как логические состояния кубита, легко видеть, что η с точностью до переобозначений $0 \to 1, 1 \to 0$ является состоянием W-класса [17], $\alpha|100\rangle + \beta|010\rangle + \gamma|001\rangle$. Известным представителем этого класса является полностью симметричное состояние

$$W = \frac{1}{\sqrt{3}}(|100\rangle + |010\rangle + |001\rangle).$$

Однако оно не представляет большого интереса для ряда приложений в отличие от несимметричного состояния

$$\widetilde{W} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|100\rangle + |0\Psi^+\rangle), \qquad (19)$$

где $\Psi^+ = (|10\rangle + |01\rangle)/\sqrt{2}$. Дело в том, что почти все протоколы на основе W носят вероятностный характер.

Одной из особенностей, позволяющей использовать $\widetilde{W}$ в качестве квантового канала для процесса телепортации, плотного кодирования, квантового распределения ключа и других, является связь с состоянием Гринбергера–Хорна–Цайлингера

$$|\mathrm{GHZ}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle + |111\rangle),$$

которая осуществляется двухчастичным унитарным нелокальным оператором [18]

$$V = |\Psi^+\rangle\langle 11| + |00\rangle\langle 10| + |\Psi^-\rangle\langle 01| + |11\rangle\langle 00|, \qquad (20)$$

где $\Psi^- = (|10\rangle - |01\rangle)/\sqrt{2}$. Так,

$$(1 \otimes V)|\mathrm{GHZ}\rangle = |\widetilde{W}\rangle.$$

Указанные обстоятельства позволяют использовать состояние η во всех протоколах на основе состояния GHZ путем унитарного преобразования ресурсов.

4.2. Телепортация и плотное кодирование

Процесс телепортации неизвестного перепутанного состояния двух кубитов 1 и 2,

$$|X\rangle = (\alpha|01\rangle + \beta|10\rangle), \qquad (21)$$

где $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$, можно осуществить с помощью GHZ-канала, распределенного между тремя пользователями, A, B и C, находящимися в разных точках пространства. При этом требуются три бита классической информации, которая получается при совместном трехчастичном измерении в базисе [19]

$$\{\Phi_x : \pi^\pm \otimes \Phi^\pm, \pi^\pm \otimes \Psi^\pm\},$$

где

$$\Phi^\pm = \frac{|00\rangle \pm |11\rangle}{\sqrt{2}}, \quad \Psi^\pm = \frac{|10\rangle \pm |01\rangle}{\sqrt{2}},$$

$$\pi^\pm = \frac{|0\rangle \pm \exp(i\theta)|1\rangle}{\sqrt{2}}.$$

Уравнение, описывающее процесс телепортации перепутанного состояния (21), имеет вид

$$|X\rangle_{12} \otimes |\mathrm{GHZ}\rangle_{ABC} = \\ = \frac{1}{\sqrt{8}} \sum_x |\Phi_x\rangle_{12A} \otimes (B_x \otimes C_x)|X\rangle_{BC}, \qquad (22)$$

где B_x, C_x — операторы Паули. Отсюда следует, что при наличии исхода измерения x у получателей B и C с точностью до унитарного преобразования $B_x \otimes C_x$ возникает состояние X.

С помощью состояния GHZ можно решить задачу плотного кодирования, которое представляет вариант передачи классической информации через квантовый канал. В этом случае классический сигнал x кодируется состояниями D_x квантовой системы с последующим измерением, которое позволяет извлечь передаваемую информацию. Соответствующее уравнение имеет вид

$$|D_x\rangle = (\mathbb{1}\otimes B_x \otimes C_x)|\mathrm{GHZ}\rangle_{ABC}. \tag{23}$$

При использовании GHZ-канала три бита классической информации $x = 0, 1, \ldots, 7$ с помощью двух операторов $B_x \otimes C_x$ кодируются набором из восьми состояний D_x, которые получаются из состояния GHZ и образуют полный ортогональный базис. Указанный протокол позволяет отправить три бита классической информации, манипулируя двумя кубитами квантового канала. Это означает увеличение классической пропускной способности квантового канала в 3/2 раза [19]. Унитарное преобразование (20) позволяет в обоих протоколах вместо состояния GHZ использовать в качестве квантового канала состояние η. Для этого в выражениях (22) и (23) нужно применить унитарное преобразование V_{BC} с последующим переобозначением $0 \to 1$, $1 \to 0$. В результате этой операции $|\mathrm{GHZ}\rangle_{ABC} \to |\eta\rangle$. При этом в (22) и (23) заменятся соответственно операторы $B_x \otimes C_x \to V(B_x \otimes C_x)$ и $B_x \otimes C_x \to (B_x \otimes C_x)V^\dagger$ с последующим переобозначением нулей и единиц.

4.3. Квантовое распределение ключа

«Классическая» задача криптографии о распределении секретного ключа между удаленными легитимными пользователями может быть решена с помощью квантового канала на основе симметричного состояния

$$W = \frac{1}{\sqrt{3}}(|100\rangle + |010\rangle + |001\rangle),$$

вместо которого можно использовать состояние η.

Протокол распределения ключа, или формирование одинаковой последовательности битов у двух участников, основан на квантовой корреляции кубитов в состоянии W, которая проявляется при проекционных измерениях. Так, проецируя $|W\rangle_{ABC}$ на состояние $|0\rangle_A$ первого кубита, получим, что оставшиеся два кубита находятся в перепутанном состоянии $(1/\sqrt{2})(|01\rangle + |10\rangle)_{BC}$. Из-за перепутанности последующие измерения над кубитами B и C имеют скоррелированные исходы, которые представляют собой общие биты, или «сырой» ключ [20]. Рассмотрим физическую сторону протокола более детально, не касаясь вопросов коррекции ошибок (error correction) и усиления секретности (privacy amplification). Состояние W распределено между тремя пользователями, A, B и C, которые могут находиться в разных точках пространства и проводить над кубитами проекционные измерения наблюдаемых, представленных операторами Паули σ_x, σ_z. Пусть $|x_\pm\rangle = (1/\sqrt{2})(|0\rangle \pm |1\rangle)$, $|z_\pm\rangle = |0\rangle, |1\rangle$ — собственные векторы наблюдаемых, которые отвечают собственным числам $x_\pm, z_\pm = \pm 1$. Чтобы описать измерения, представим W в собственном базисе σ_x, σ_z:

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{\sqrt{3}}(|z_+z_-z_-\rangle + |z_-z_+z_-\rangle + |z_-z_-z_+\rangle) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}\left[|z_+\rangle(|x_+x_+\rangle - |x_-x_-\rangle)\right] + \frac{1}{2\sqrt{3}} \times \\ &\times \left[(|z_-\rangle(|x_+x_+\rangle + |x_-x_-\rangle + |x_+x_-\rangle - |x_-x_+\rangle)\right]. \end{aligned} \tag{24}$$

Пусть A проводит измерение σ_z, а B и C проводят измерения σ_x. Если A получает исход z_+, то у B и C возникают одинаковые исходы x_+ или x_-, которые представляют собой общий бит, или ключ. Тогда вероятность, с которой возникает ключ, будет равна 2/3. Случай, когда A получает исход измерения z_-, оказывается неблагоприятным и исключается. Переход от канала GHZ к новому квантовому каналу η получается простым переобозначением нулей и единиц, что не изменяет используемых наблюдаемых σ_x и σ_z.

Рассмотрим более детально протокол квантового распределения ключа с помощью состояния η_*, в котором присутствует вклад вакуума. Для этого запишем η_* в собственном базисе операторов σ_x, σ_z:

$$\begin{aligned} \eta_* = {}& \frac{1}{2}\mu|z_+\rangle\Big[|x_+x_+\rangle + |x_+x_-\rangle + |x_-x_+\rangle + |x_-x_-\rangle\Big] + \\ &+ \frac{1}{2}\epsilon\Big[A|z_-\rangle(|x_+x_+\rangle + |x_+x_-\rangle - |x_-x_+\rangle - |x_-x_-\rangle) + \\ &+ B|z_-\rangle(|x_+x_+\rangle - |x_+x_-\rangle + |x_-x_+\rangle - |x_-x_-\rangle) + \\ &+ C|z_+\rangle(|x_+x_+\rangle - |x_+x_-\rangle + |x_-x_+\rangle - |x_-x_-\rangle)\Big]. \end{aligned}$$

Пусть $A = B$, поскольку этот случай является наиболее благоприятным. Тогда при измерении z_- с вероятностью $\epsilon^2 2|A|^2$ у B и C возникает перепутанное состояние $(1/\sqrt{2})(|x_+x_+\rangle - |x_-x_-\rangle)$, которое позволяет им извлечь общий бит. Заметим, что при $\epsilon = 1$, $A = B = C = 1/\sqrt{3}$ имеем рассмотренный выше случай с W-состоянием. Поскольку вероятность пропорциональна ϵ, она будет невелика, однако высокая скорость генерации состояния η_* в предложенной выше схеме эксперимента делает рассмотренный протокол привлекательным с практической точки зрения.

5. ОПЕРАЦИЯ NOT НАД ФОКОВСКИМИ СОСТОЯНИЯМИ

В протоколах телепортации, плотного кодирования и других требуется преобразование логических состояний, которые осуществляются операторами Паули. Однако в эксперименте фигурируют не логические состояния, а состояния физических систем. Для света набор преобразований, описываемых операторами Паули, легко реализуется для поляризованных фотонов с помощью линейных оптических поляризационных элементов. В нашем случае логическим состояниям отвечают фоковские состояния с отсутствием или наличием фотонов, которые имеют одинаковую поляризацию. Поэтому необходимые преобразования, включающие, например, операцию типа $|0\rangle \to |1\rangle$, являются нетривиальными из-за несохранения числа фотонов.

В качестве иллюстрации рассмотрим реализацию операции NOT, $\sigma_x = |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|$, на фоковских состояниях. Для этого возьмем схему, включающую процедуру измерения, однофотонный источник, генерирующий поляризованный фотон в состоянии $|1H\rangle$, фотон с горизонтальной поляризацией и ячейку Поккельса, управляющую поляризацией. Тогда можно осуществить необходимую операцию:

$$|0\rangle \to |1H\rangle \otimes |0V\rangle, \quad |1\rangle \to |0H\rangle \otimes |1V\rangle. \qquad (25)$$

Рассмотрим принцип ее работы. Ячейка Поккельса управляет поляризацией $|1H\rangle$ фотона в зависимости от входного сигнала, который получается при детектировании фоковских фотонов $|n\rangle$, $n = 0, 1$. Если исход измерения $n = 0$, то $|1H\rangle \to |1H\rangle$, если исход измерения $n = 1$, то $|1H\rangle \to |1V\rangle$. Поляризованные фотоны разделяются поляризационным делителем, выходы которого служат выходом схемы. С логической точки зрения, схема представляет ячейку с операцией типа управляемого «обмена» (swapping), которая реализуется с помощью проекционного измерения.

Работу ячейки можно характеризовать следующим образом. Пусть исходное состояние трех битов представляет собой $|n\rangle, |1H\rangle, |0V\rangle$. Первый бит измеряется в базисе $|0\rangle, |1\rangle$. В зависимости от исхода измерения $n = 0, 1$ над битами $|1H\rangle, |0V\rangle$ проводится операция «обмена»

$$|n\rangle \otimes |1H\rangle \otimes |0V\rangle = |0\rangle\langle 0|n\rangle \otimes |1H\rangle \otimes |0V\rangle + \\ + |1\rangle\langle 1|n\rangle \mathrm{SWAP}\Big(|0H\rangle \otimes |1V\rangle\Big). \qquad (26)$$

Такая ячейка осуществляет операцию (25).

6. ВЫВОДЫ

Если два фотона распределить по трем модам так, что в каждой будет только по одному фотону, то возникает состояние, которое имеет атрибуты неклассических свойств: субпуассоновскую статистику фотонов, сжатие и перепутанность. Поскольку фотоны подчиняются бозонной статистике, в одной моде могут быть два фотона. Это обстоятельство означает, что экспериментальная реализация такого состояния оказывается нетривиальной. Однако задача может быть решена с помощью процесса спонтанного параметрического рассеяния. Рассматриваемое состояние оказывается перепутанным и принадлежит W-классу. Это обстоятельство и определяет основной круг его приложений в качестве квантового канала для информационных процессов типа телепортации, плотного кодирования или квантового распределения ключа. В работе также рассмотрено несколько схем экспериментальной реализации таких состояний.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 06-02-16769-а).

ЛИТЕРАТУРА

1. H. Bechmann-Pasquinucci and W. Tittel, arXiv:quant-ph/9910095.
2. D. Kaszlikowski, D. K. L. Oi, M. Christandl et al., Phys. Rev. A **67**, 012310 (2003).
3. D. Collins, N. Gisin, N. Linden et al., Phys. Rev. Lett. **88**, 040404 (2002).
4. N. Langford, R. B. Dalton, M. D. Harvey et al., Phys. Rev. Lett. **93**, 053601 (2004).
5. Л. А. Кривицкий, С. П. Кулик, А. Н. Пенин, М. В. Чехова, ЖЭТФ **124**, 943 (2003).
6. А. В. Бурлаков, Л. А. Кривицкий, С. П. Кулик и др., Опт. и спектр. **94**, 743 (2003); А. А. Жуков, Г. А. Масленников, М. В. Чехова, Письма в ЖЭТФ **76**, 696 (2002); Yu. Bogdanov, M. Chekhova, L. Krivitsky et al., Phys. Rev. A **70**, 042303 (2004).
7. G. Maslennikov, E. Moreva, S. Spraupe, and S. P. Kulik, Phys. Rev. Lett. **97**, 023602 (2006).
8. H. Bechmann-Pasquinucci and A. Peres, Phys. Rev. Lett. **85**, 3313 (2000).
9. A. Chamoli and C. M. Bhandari, arXiv:quant/ph0609010.
10. J. Bouda and V. Buzek, J. Phys. A **34**, 4301 (2001).
11. A. Mandilara and V. M. Akulin, arXiv:quant/ph 0609121.

12. A. Zeilinger, M. A. Horne, and D. M. Greenberger, NASA Conf. Publ. №3135, Code NTT, Washington DC (1992), p. 73.

13. M. Bourennane, M. Eibl, C. Kurtsiefer et al., Phys. Rev. Lett. **92**, 087902 (2004); M. Eibl, N. Kiesel, M. Bourennane et al., Phys. Rev. Lett. **92**, 077901 (2004).

14. В. П. Карасев, С. П. Кулик, ЖЭТФ **131**, 37 (2007).

15. Д. Н. Клышко, УФН **166**, 613 (1996).

16. O. Pfister, S. Feng, G. Jennings et al., Phys. Rev. A **70**, 020302R (2004); A. S. Bradley, M. K. Olsen, O. Pfister, and R. C. Pooser, Phys. Rev. A **72**, 053805 (2005).

17. W. Dur, G. Vidal, and J. I. Cirac, Phys. Rev. A **62**, 062314 (2000).

18. V. N. Gorbachev, A. I. Trubilko, A. A. Rodichkina, and A. I. Zhiliba, Phys. Lett. **314 A**, 267 (2003).

19. V. N. Gorbachev, A. I. Zhiliba, A. I. Trubilko, and A. A. Rodichkina, J. Quant. Inform. and Comput. **2**, 367 (2002).

20. J. Joo, J. Lee, J. Jang, and Y.-J. Park, arXiv:quant/ph 0204003.