ЖЭТФ, 2008, том 134, вып. 3 (9), стр. 481–489

ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА УРАВНЕНИЙ ЭЙНШТЕЙНА С КОСМОЛОГИЧЕСКИМ ЧЛЕНОМ, ЗАВИСЯЩИМ ОТ СКАЛЯРА РИЧЧИ

П. А. Наказной *

Киевский национальный университет им. Тараса Шевченко
03022, Киев, Украина

Поступила в редакцию 26 февраля 2008 г.

Рассмотрены основные свойства уравнений Эйнштейна, модифицированных космологическим членом Λ, зависящим от скаляра Риччи R. Показано, что кроме неравенства нулю дивергенции тензора энергии-импульса вещества и следующего из этого несохранения массы холодной материи в процессе расширения Вселенной, данная модель предполагает существенную модификацию уравнений для гравитационного потенциала и ускорения частицы в ньютоновском приближении. Данные обстоятельства позволяют сформулировать необходимые критерии для возможных функциональных зависимостей $\Lambda(R)$. Тем не менее, введение переменного Λ-члена позволяет по-новому взглянуть на проблемы темной материи и темной энергии. В частности, показано, что модель, в которой космологический член линейно зависит от скаляра Риччи (это соответствует приближению более сложной зависимости в случае малых значений плотностей материи), позволяет удовлетворительным образом описать кривые вращения галактик без привлечения гипотезы про темную материю и построить космологическую модель с переменной плотностью энергии вакуума, что качественно согласуется с современными представлениями о ранней Вселенной.

PACS: 04.20.Cv, 95.36.+x, 98.80.-k

1. ВВЕДЕНИЕ

Для удовлетворительного описания современных данных о составе и динамике Вселенной [1–5] в космологии и астрофизике вводится представление о так называемых темной материи и темной энергии [6–8]. Считается, что темная материя локализована в гало вокруг видимых частей галактик и проявляет себя при помощи гравитационного взаимодействия с обычным веществом. Темная энергия, напротив, однородно распределена во Вселенной с постоянной во времени плотностью. Это обстоятельство позволяет связать ее с физическим вакуумом — основным состоянием квантованных полей, а ее плотность — с космологической постоянной (Λ-членом) в уравнениях Эйнштейна [9, 10].

Проблема, как известно, заключается в том, что хотя с помощью феноменологического введения темной энергии и темной материи удается достичь удовлетворительного описания наблюдательных данных, остается открытым вопрос об их микроскопической природе и свойствах. В частности, нельзя исключить возможности слабой пространственно-временной зависимости тензора энергии-импульса физического вакуума, выражающей отклик вакуума на свое искривление. В этом случае для описания темной энергии одной космологической постоянной будет недостаточно, поскольку будет необходимо также учитывать соответствующие поправки, зависящие от кривизны (метрики) пространства-времени. Иными словами, в данном подходе можно говорить о космологическом члене, зависящем через метрический тензор от пространственно-временных координат, и о его роли в моделировании современного значения космологической постоянной. В данной работе исследуются основные характеристики такого подхода, причем в явном виде рассмотрена простейшая линейная зависимость космологического члена от скаляра Риччи.

*E-mail: nak@univ.kiev.ua

2. КОНЦЕПЦИЯ ПЕРЕМЕННОГО КОСМОЛОГИЧЕСКОГО ЧЛЕНА

Космологический член в уравнениях Эйнштейна обычно связывают с тензором энергии-импульса физического вакуума. Кривизна пространства-времени, как известно, характеризуется тензором Римана, поэтому тензор энергии-импульса вакуума в пространстве с римановой метрикой может зависеть от времени и пространственных координат только через его компоненты. Прежде всего, следует изучить простейшую возможность — линейную зависимость тензора энергии-импульса вакуума от тензора Римана. Нетрудно показать, что в общем случае она может быть сведена к линейной зависимости от скаляра Риччи. Действительно, тензор энергии-импульса вакуума T_{ik}^{vac} как тензор второго ранга может линейно зависеть от компонент тензора Риччи R_{ik} следующим образом[1]):

$$T_{ik}^{vac} = ARg_{ik} + BR_{ik} + Cg_{ik}, \tag{2.1}$$

где A, B, C — некоторые константы (A, B — безразмерные, C имеет размерность космологической постоянной, т.е квадрата обратной длины). Тогда из уравнений Эйнштейна сразу следует, что путем перенормировки гравитационной постоянной G можно убрать одно из двух зависящих от тензора Риччи слагаемых в (2.1). Например, оставим слагаемое, пропорциональное R — скаляру Риччи. Для этого запишем уравнения Эйнштейна в виде

$$R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R = \frac{8\pi\tilde{G}}{c^4}T_{ik} + \tilde{\Lambda}g_{ik}, \tag{2.2}$$

где $\tilde{G}, \tilde{\Lambda}$ — затравочные значения соответствующих параметров. Записывая

$$T_{ik} = T_{ik}^{vac} + T_{ik}^{mat},$$

где T_{ik}^{mat} — тензор энергии-импульса материи (индекс «mat» далее опускаем), и задавая T_{ik}^{vac} модельной зависимостью (2.1), из (2.2) можно получить

$$R_{ik} - \left(\frac{1}{2} - k\right) g_{ik}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{ik} + \Lambda_0 g_{ik}. \tag{2.3}$$

В выражении (2.3) введены обозначения

$$G = \frac{\tilde{G}}{1-B}, \quad \frac{\frac{1}{2}+A}{1-B} = \frac{1}{2} - k, \quad \Lambda_0 = \frac{C+\tilde{\Lambda}}{1-B}.$$

Из уравнений (2.3) видно, что введение тензора энергии-импульса вакуума (2.1) эквивалентно введению переменного космологического члена

$$\Lambda = \Lambda_0 - kR, \tag{2.4}$$

где Λ_0 и k — свободные параметры.

Модельную зависимость (2.4) можно рассматривать в качестве линейного приближения некоторой функции $\Lambda = \Lambda(R)$, явный вид которой, по-видимому, невозможно установить, оставаясь лишь в рамках теории гравитации. Данное приближение может быть применимо, когда значение R (и, следовательно, скаляр тензора энергии-импульса T) является в соответствующем смысле малым[2]). В этой работе модель (2.4) будет применена для описания современных стадий эволюции Вселенной и динамики галактик.

Следует подчеркнуть, что вопрос об изменении со временем космологического члена неоднократно поднимался в литературе (см., например, обзор [12]). Однако попытки его решения обычно сводились к постулированию для космологического члена некоторой убывающей зависимости от масштабного фактора[3]). В некоторых работах зависимости от масштабного фактора рассматривались на более фундаментальном уровне, предусматривающем построение ковариантных выражений (см., например, работу [11]), однако линейная зависимость от скаляра Риччи исключалась из рассмотрения на основании того, что при этом дивергенция тензора энергии-импульса материи будет отлична от нуля:

$$\nabla^i T_{ik} \neq 0.$$

Действительно, из уравнения (2.3) и тождества Бьянки следует, что

$$\nabla^k\left(R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R\right) = \nabla^k(\varkappa T_{ik} - kRg_{ik}) = 0.$$

Таким образом, в модели (2.4) нулевой будет дивергенция лишь полного тензора энергии-импульса, который является суммой тензоров энергии-импульса материи и вакуума, т. е. материя, вакуум и гравитационное поле обмениваются между собой энергией. Тензор энергии-импульса материи будет удовлетворять уравнению

$$\nabla^k T_{ik} = -\beta\nabla_i T, \tag{2.5}$$

---

1) Зависимость от компонент тензора Римана исключается, так как в этом случае было бы необходимо ввести выделенный тензор второго ранга, отличный от метрического g_{ik}, свертка с которым давала бы тензор второго ранга.

2) Разложение по размерному параметру R трактуется согласно работе [11].

3) Особое место занимает теория квинтэссенции, см., например, [13].

где

$$\beta \equiv \frac{k}{1-4k}.$$

Указанное свойство модели (2.4), очевидно, будет характерным для всех моделей переменного Λ-члена. Однако представляет методический интерес рассмотреть более детально это и другие свойства теории с переменным космологическим членом, т. е. выяснить, какие свойства могут оказаться полезными при решении современных физических задач, а какие являются недостатками теории, и учесть соответствующие результаты в будущих теоретических построениях.

Зависимость (2.4) была впервые предложена в работе [14] и является обобщением модели $\Lambda = -kR$, предложенной Фоминым [15] в рамках теории квантового рождения Вселенной. В данной теории неравенство нулю дивергенции тензора энергии-импульса вещества и следующее из него увеличение массы материи во Вселенной является ключевым. Оно применяется при описании эволюции замкнутой Вселенной, причем рост энергии вещества компенсируется увеличением абсолютного значения энергии гравитационного поля, так что полная энергия замкнутого мира, как и должно быть, равна нулю.

Важно подчеркнуть, что введение переменного космологического члена $\Lambda = \Lambda(R)$, вообще говоря, нарушает лагранжевость теории в том смысле, что данное слагаемое невозможно получить путем варьирования некоторой скалярной функции — аналога действия для гравитационного поля. В частности, как можно легко убедиться, не является вариацией левая часть уравнения (2.3). Указанное обстоятельство существенно различает описываемый подход и широкий класс теорий, изучающих обобщения классического действия Гильберта–Эйнштейна для гравитационного поля:

$$S_g = -\frac{c^3}{16\pi G}\int (R + 2\Lambda)\,\sqrt{-g}\;d\Omega \to \\ \to -\frac{c^3}{16\pi G}\int f(R)\,\sqrt{-g}\;d\Omega,$$

где $f(R)$ — произвольная функция, либо выбираемая феноменологическим образом, либо заимствованная из редукции высокоразмерных теорий гравитации (см., например, [16–21]). В последнем случае уравнения Эйнштейна также модифицируются дополнительными членами, зависящими от кривизны, с помощью которых можно пытаться моделировать темную энергию, однако в силу лагранжевости данных теорий в их рамках можно удовлетворить условие равенства нулю суммарной 4-дивергенции соответствующих поправочных слагаемых и, таким образом, без дополнительных предположений сохранить «классический» закон $\nabla^i T_{ik} = 0$ для вещества.

Предположение о нарушении данного соотношения, вытекающее из введения в теорию переменного космологического члена, как будет показано ниже, приводит к появлению дополнительных слагаемых во втором законе Ньютона, описывающем эффективное ускорение частицы в гравитационном поле, что позволяет изучать возможность моделирования не только темной энергии, но и темной материи. В этом аспекте результаты излагаемого подхода перекликаются с выводами ряда теорий, в которых для объяснения проблемы темной материи рассматриваются модификации ньютоновской динамики и соответствующие релятивистские обобщения (подробнее см., например, обзор [22]).

3. НЬЮТОНОВСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ И КРИВЫЕ ВРАЩЕНИЯ ГАЛАКТИК

Исследуем ньютоновское приближение в теории (2.4). Используя известные выражения [23]

$$R_0^0 = \frac{1}{c^2}\Delta\varphi, \quad T_0^0 = T = \varepsilon = \rho c^2, \tag{3.1}$$

где ε и ρ — соответственно плотность энергии вещества и плотность вещества, с помощью (2.3) можно получить уравнение для гравитационного потенциала φ — аналог уравнения Пуассона с перенормированной гравитационной постоянной G:

$$\Delta\varphi = 4\pi G\frac{1-6k}{1-4k}\rho - \frac{c^2\Lambda_0}{1-4k}.$$

(Слагаемое, пропорциональное Λ_0, очевидно, несущественно в ньютоновском приближении.)

Для получения эффективного ускорения частицы в гравитационном поле (с учетом взаимодействия с вакуумом) используем соотношение (2.5) и подставим в него выражение для тензора энергии-импульса идеальной жидкости

$$T_{ik} = (\varepsilon + p)\,u_i\,u_k - pg_{ik},$$

(ε — плотность энергии материи, p — давление материи, u_i — четырехмерная скорость), тогда получим

$$\nabla^k\left[(\varepsilon + p)\,u_i\,u_k - pg_{ik}\right] = -\beta\partial_i(\varepsilon - 3p).$$

Спроектируем полученное уравнение на ортогональные 4-векторы u^i и $g^{il} - u^i u^l$:

$$\nabla_i(\varepsilon u^i) + p\nabla_i u^i = -\beta u^i\partial_i(\varepsilon - 3p),$$

$$(\varepsilon+p)u^k\nabla_k u^i = (g^{ik} - u^i u^k)\nabla_k \left[p - \beta(\varepsilon - 3p)\right].$$

В ньютоновском приближении из первого уравнения получается модификация уравнения непрерывности (его можно получить также непосредственно из (2.5); этот факт давно известен, см., например, [24], и подчеркивает то обстоятельство, что в данной модели происходит нарушение баланса массы за счет взаимодействия с вакуумом):

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla(\rho\mathbf{v}) = -\beta\frac{\partial\rho}{\partial t}.$$

При этом из второго уравнения получается искомая модификация второго закона Ньютона, описывающего ускорение частицы в поле гравитационного потенциала φ:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla\varphi + \beta c^2\frac{\nabla\rho}{\rho}. \tag{3.2}$$

Таким образом, эффективное ускорение частицы в гравитационном поле будет содержать дополнительное слагаемое, которое можно интерпретировать как силу, действующую в сторону градиента плотности вещества[4)]. Попробуем использовать это обстоятельство для описания кривых вращения галактик без привлечения темной материи. Проблема здесь, как известно, заключается в том, что для объектов, расположенных в пределах гало, скорость вращения не уменьшается с ростом расстояния от центра галактики r по закону ньютоновской механики как

$$v^2 \propto \frac{GM}{r} \tag{3.3}$$

(где M — масса галактики), а остается постоянной или возрастает по закону

$$v \propto \sqrt{r}$$

(см. [25–27]). В частности, для спиральных галактик установлен феноменологический закон Талли–Фишера [28]

$$v_* \propto M^{1/4}, \tag{3.4}$$

определяющий соотношение между полной массой (светимостью) галактики и максимальной скоростью ее вращения.

Поверхностная яркость спиральных галактик $I(r)$ приближенно описывается эмпирическим экспоненциальным законом (закон Серсика) [29, 30]

$$I(r) = I_0\exp\left(-\frac{r}{r_0}\right), \tag{3.5}$$

где r_0 — радиальная шкала диска (параметр галактики), I_0 — центральная яркость, примерно одинаковая для всех галактик. Считая светимость и массу пропорциональными, для объектов, расположенных за видимыми границами галактики, т. е. при $r \gtrsim r_0$, с учетом (3.2) и (3.5) найдем[5)]:

$$\frac{v^2}{r} = \frac{GM}{r^2} + \frac{\beta c^2}{r_0}. \tag{3.6}$$

Начиная с расстояния

$$r_* = \sqrt{\frac{GMr_0}{\beta c^2}}$$

постоянное слагаемое в формуле (3.6) начинает доминировать над убывающим ньютоновским потенциалом. Расстоянию r_* соответствует скорость вращения

$$v_* = \left(\frac{\beta c^2 GM}{r_0}\right)^{1/4},$$

что согласуется с законом Талли–Фишера (3.4). При $r > r_*$ из уравнения (3.6) следует, что скорость v увеличивается по закону

$$v(r) \approx v_*\sqrt{\frac{r}{r_*}}.$$

Потребуем, чтобы $r_* \sim r_0$. Тогда из этого требования вытекает оценка на параметр $\beta \approx k$:

$$\beta \sim \frac{GM}{r_0 c^2}.$$

Для численных оценок используем параметры Галактики: $M = 2\cdot 10^{11} M_\odot$ ($M_\odot = 2\cdot 10^{33}$ г — масса Солнца), $r_0 = 5$ кпк (кпк $= 3.1\cdot 10^{21}$ см). В результате получим:

$$\beta \approx k \sim 10^{-6}. \tag{3.7}$$

Скорость вращения v_* при этом составит

$$v_* \sim c\sqrt{\beta} = 300\ \frac{\text{км}}{\text{с}},$$

4) На это обстоятельство и его применение при интерпретации кривых вращения галактик впервые было указано Ю. В. Штановым (частное сообщение).

5) Здесь для простоты мы пренебрегаем различием между r_0 и размером галактики, а также одно- и двугорбыми кривыми вращения (см., например, [30]).

что согласуется с астрофизическими данными (скорость вращения звезд в окрестности Солнца составляет 220 км/с [29]). Для карликовых галактик оценим, принимая $M = 10^8 M_\odot$, $r_0 = 2$ кпк:

$$v_* = 50\ \frac{\text{км}}{\text{с}},$$

что также согласуется с астрофизическими данными (10–100 км/с [29, 30]).

4. КОСМОЛОГИЧЕСКИЕ СЛЕДСТВИЯ

Рассмотрим космологические следствия модели (2.4) в рамках плоской однородной и изотропной Вселенной, описываемой уравнениями Фридмана

$$\begin{aligned} \dot a^2 &= \frac{1}{3}\varkappa c^2(\varepsilon+\lambda)a^2, \\ \ddot a &= -\frac{1}{6}\varkappa c^2(\varepsilon+3p-2\lambda)a, \end{aligned} \tag{4.1}$$

где $a(t)$ — масштабный фактор,

$$\lambda = \frac{\Lambda}{\varkappa}, \quad \varkappa = \frac{8\pi G}{c^4}.$$

Из (2.3) следует выражение для Λ-члена:

$$\Lambda = \Lambda_0 + \frac{k}{1-4k}\left(\varkappa T + 4\Lambda_0\right),$$

подстановка которого в уравнения (4.1) позволяет получить уравнения для масштабного фактора в модели (2.4):

$$\begin{aligned} \dot a^2 &= \frac{\varkappa c^2}{1-4k}\left(\left(\frac{1}{3}-k\right)\varepsilon - kp + \frac{\lambda_0}{3}\right)a^2, \\ \ddot a &= -\frac{\varkappa c^2}{1-4k}\left(\left(\frac{1}{6}-k\right)\varepsilon + \left(\frac{1}{2}-k\right)p - \frac{\lambda_0}{3}\right)a, \end{aligned} \tag{4.2}$$

где

$$\lambda_0 = \frac{\Lambda}{\varkappa}.$$

Из уравнений (4.2) следует

$$\varepsilon a^\sigma = \varepsilon_0 a_0^\sigma, \quad \sigma = \frac{3(1-4k)(1+\omega)}{1-3k(1+\omega)}, \tag{4.3}$$

где $\omega = p/\varepsilon$ — параметр уравнения состояния вещества, a_0, ε_0 — нормировочные значения масштабного фактора и плотности энергии. Показатель σ для холодного вещества и излучения равен

$$\sigma = \begin{cases} \dfrac{3(1-4k)}{1-3k}, & \omega = 0, \quad \text{холодная материя (пыль)}, \\[2ex] 4, & \omega = \dfrac{1}{3}, \quad \text{излучение}. \end{cases}$$

Отсюда видно принципиальное различие модели (2.4) и стандартной космологии, в которой энергия холодной (имеющей нулевое давление, пылевидной) материи в объеме $V \sim a^3$ сохраняется при расширении Вселенной. Из соотношения (4.3) при положительном значении параметра k следует увеличение со временем энергии пылевидной материи. Это означает, что масса материи M в данной модели будет увеличиваться в процессе эволюции Вселенной по закону

$$M(t) \propto a(t)^{3k/(1-3k)}, \tag{4.4}$$

а баланс полной энергии в этом случае будет обеспечиваться учетом псевдотензора энергии-импульса гравитационного поля [31] («потенциальной» энергии гравитационного поля).

С помощью соотношения (4.3) можно найти интеграл системы (4.2)[6)]

$$\tau = \int_0^x \frac{dy}{\sqrt{\dfrac{1-3k}{1-4k}(\Omega_{\mathcal{D}0}+\Omega_{\mathcal{B}0})y^{-\frac{1-6k}{1-3k}} + \dfrac{\Omega_{\mathcal{R}0}}{y^2} + \dfrac{\Omega_0}{1-4k}y^2}}, \tag{4.5}$$

где

$$x = \frac{a}{a_0}, \quad \tau = tH_0, \quad \Omega_0 = \frac{\Lambda_0}{\varkappa\rho_c c^2}, \quad \rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G}$$

— критическая плотность, $H_0 = 72$ км/Мпк·с — параметр Хаббла, $\Omega_{i0} = \rho_i/\rho_c$ — современные значения плотностей ($\mathcal{B}$ — барионной, $\mathcal{D}$ — небарионной (темной), $\mathcal{R}$ — радиационной компонент). Для предельных значений x из выражения (4.5) получаются параболический и деситтеровский режимы расширения [32]:

$$x \ll 1 \Rightarrow x(\tau) = (\Omega_{\mathcal{R}0})^{1/4}\sqrt{2\tau}, \tag{4.6}$$

$$x \gg 1 \Rightarrow x = x_0 e^{\eta\tau}, \quad \eta = \sqrt{\frac{\Omega_0}{1-4k}}. \tag{4.7}$$

Для безразмерной плотности Λ-члена находим

$$\Omega_\Lambda \equiv \frac{\Lambda}{\varkappa\rho_c c^2} = \frac{\Omega_0}{1-4k} + \frac{k}{1-4k}(\Omega_{\mathcal{D}0}+\Omega_{\mathcal{B}0})x^{-\frac{3(1-4k)}{1-3k}}.$$

---

6) Здесь холодная материя рассматривается традиционным образом, т. е. как состоящая из обычной (по историческим причинам называемой барионной) и темной (небарионной).

Таблица 1. Современные значения безразмерных плотностей различных компонент Вселенной, полученные в рамках стандартной космологической модели

Сорт материи	Безразмерная плотность Ω ($\pm 10\,\%$)
Темная энергия	$\Omega_{\Lambda 0} = 0.7$
Темная материя	$\Omega_{\mathcal{D}0} = 0.3$
Барионная материя	$\Omega_{\mathcal{B}0} = 0.04$
Излучение	$\Omega_{\mathcal{R}0} = 0.8 \cdot 10^{-5}\alpha$, $1 < \alpha < 30$

Для численных расчетов, иллюстрирующих решение (4.5), примем в качестве значений Ω_{i0} соответствующие значения, полученные в рамках стандартной космологической модели[7] (табл. 1). Для параметра k используем оценку (3.7). Для параметра Ω_0 заметим, что сравнение любого из соответствующих уравнений систем (4.1) и (4.2) дает

$$\Omega_0 = \Omega_{\Lambda 0} - k(4\Omega_{\Lambda 0} + \Omega_{\mathcal{D}0} + \Omega_{\mathcal{B}0}),$$

поэтому, учитывая (3.7), получим $\Omega_0 \approx \Omega_{\Lambda 0}$.

В табл. 2 приведены значения безразмерного масштабного фактора $x(t)$, плотностей барионной материи $\rho_{\mathcal{B}}$ и темной материи ρ_Λ, вычисленные в рамках модели (2.4), и величины, характеризующие соответствующие различия с результатами стандартной космологической модели

$$\Delta x = \frac{x_{k=0}(t) - x_{k=10^{-6}}(t)}{x_{k=0}(t)},$$

$$\Delta\rho_{\mathcal{B}} = \frac{\rho_{\mathcal{B},k=0} - \rho_{\mathcal{B},k=10^{-6}}}{\rho_{\mathcal{B},k=0}}$$

в очевидных обозначениях. Временной интервал в приведенной таблице намеренно расширен до планковских времен, чтобы проиллюстрировать качественную картину поведения изучаемых физических величин в данной области. Значения для масштабного фактора при $t > 10^{-4}$ с получены путем численного интегрирования выражения (4.5) при $k = 10^{-6}$ для модели (2.4) и $k = 0$ для ΛCDM-модели. Для меньших времен использована аналитическая зависимость (4.6), поэтому соответствующее значение Δx в табл. 2 положено тождественно равным нулю.

[7] Вслед за обзором [6] здесь приводятся средние значения соответствующих параметров.

Из приведенной таблицы видно, что малое значение параметра k, как и следовало ожидать, приводит к пренебрежимо малым различиям между результатами модели (2.4) и стандартной космологической модели для значений масштабного фактора и плотности барионной материи[8]. В то же время принципиальными отличиями будут уменьшение плотности энергии вакуума и увеличение массы холодной материи в ходе эволюции Вселенной. Первое свойство, очевидно, следует рассматривать, как положительное свойство модели (см., например, [9]). Начальным стадиям эволюции Вселенной, как принято считать, отвечала огромная величина плотности энергии вакуума, которая впоследствии уменьшалась из-за происходящих в расширяющейся Вселенной всевозможных фазовых переходов.

Для анализа второго свойства заметим, что при значении параметра $k = 10^{-6}$ из соотношения (4.4) и табл. 2 следует, что за период времени от $t = 10^{-1}$ с до $t = 10^{17}$ с масса холодной материи во Вселенной в рамках рассматриваемой модели увеличивается в $10^{3\cdot 10^{-5}}$ раз, т. е. масса каждой частицы увеличивается на $\Delta m = 7\cdot 10^{-5} m_0$, где m_0 — ее масса в момент времени $t = 10^{-1}$ с. Данное изменение массы на первый взгляд представляется незначительным, но, тем не менее, требует тщательного анализа в дальнейшем, тем более, что, как видно из выражения (4.7), на поздних стадиях эволюции Вселенной ее масса будет увеличиваться по экспоненциальному закону. В любом случае это свойство рассматриваемой модели представляется наиболее «радикальным» с концептуальной точки зрения и является ее самым слабым местом, не исключающим, однако, данную модель a posteriori.

5. ОБОБЩЕНИЕ МОДЕЛИ

Рассмотрим произвольную функциональную зависимость космологического члена от скаляра Риччи

$$\Lambda = \Lambda(R) g_{ik}. \tag{5.1}$$

С помощью тождества Бьянки из уравнений Эйнштейна для (5.1) получим обобщение уравнения (2.5):

[8] Это обстоятельство не должно вводить в заблуждение, так как ввиду отсутствия результатов обработки наблюдений анизотропии реликтового излучения в рамках изучаемой модели при расчетах была использована «традиционная» темная материя со значением плотности, принятой в ΛCDM-модели.

Таблица 2. Результаты вычислений значений безразмерного масштабного фактора $x(t)$, плотности барионной материи $\rho_{\mathcal{B}}$ в рамках модели (2.4) и соответствующие сравнения Δx и $\Delta\rho_{\mathcal{B}}$ с результатами стандартной космологической модели ($k = 0$), а также значения переменной плотности темной энергии (плотности энергии вакуума) ρ_Λ

t, с	$x(t)$	Δx	$\rho_{\mathcal{B}}$, ГэВ^4	$\Delta\rho_{\mathcal{B}}$	ρ_Λ, ГэВ^4
10^{-43}	$6\cdot10^{-32}$	0	$6\cdot10^{45}$	$2\cdot10^{-4}$	$5\cdot10^{40}$
10^{-40}	$2\cdot10^{-30}$	0	$2\cdot10^{41}$	$2\cdot10^{-4}$	$2\cdot10^{36}$
10^{-37}	$6\cdot10^{-29}$	0	$6\cdot10^{36}$	$2\cdot10^{-4}$	$5\cdot10^{31}$
10^{-34}	$2\cdot10^{-27}$	0	$2\cdot10^{32}$	$2\cdot10^{-4}$	$2\cdot10^{27}$
10^{-31}	$6\cdot10^{-26}$	0	$6\cdot10^{27}$	$2\cdot10^{-4}$	$5\cdot10^{22}$
10^{-28}	$2\cdot10^{-24}$	0	$2\cdot10^{23}$	$2\cdot10^{-4}$	$2\cdot10^{18}$
10^{-25}	$6\cdot10^{-23}$	0	$6\cdot10^{18}$	$2\cdot10^{-4}$	$5\cdot10^{13}$
10^{-22}	$2\cdot10^{-21}$	0	$2\cdot10^{14}$	$1\cdot10^{-4}$	$2\cdot10^{9}$
10^{-19}	$6\cdot10^{-20}$	0	$6\cdot10^{9}$	$1\cdot10^{-4}$	$5\cdot10^{4}$
10^{-16}	$2\cdot10^{-18}$	0	$2\cdot10^{5}$	$1\cdot10^{-4}$	$2\cdot10^{0}$
10^{-13}	$6\cdot10^{-17}$	0	$6\cdot10^{0}$	$1\cdot10^{-4}$	$5\cdot10^{-5}$
10^{-10}	$2\cdot10^{-15}$	0	$2\cdot10^{-4}$	$1\cdot10^{-4}$	$2\cdot10^{-9}$
10^{-7}	$6\cdot10^{-14}$	0	$6\cdot10^{-9}$	$9\cdot10^{-5}$	$5\cdot10^{-14}$
10^{-4}	$2\cdot10^{-12}$	0	$2\cdot10^{-13}$	$8\cdot10^{-5}$	$2\cdot10^{-18}$
10^{-1}	$5\cdot10^{-11}$	$4\cdot10^{-12}$	$1\cdot10^{-17}$	$7\cdot10^{-5}$	$9\cdot10^{-23}$
10^{2}	$2\cdot10^{-9}$	$1\cdot10^{-10}$	$3\cdot10^{-22}$	$6\cdot10^{-5}$	$3\cdot10^{-27}$
10^{5}	$6\cdot10^{-8}$	$-7\cdot10^{-2}$	$6\cdot10^{-27}$	$2\cdot10^{-1}$	$5\cdot10^{-32}$
10^{8}	$2\cdot10^{-6}$	$-1\cdot10^{-4}$	$2\cdot10^{-31}$	$5\cdot10^{-4}$	$2\cdot10^{-36}$
10^{11}	$7\cdot10^{-5}$	$-1\cdot10^{-6}$	$5\cdot10^{-36}$	$3\cdot10^{-5}$	$5\cdot10^{-41}$
10^{14}	$4\cdot10^{-3}$	$5\cdot10^{-6}$	$4\cdot10^{-41}$	$2\cdot10^{-6}$	$3\cdot10^{-46}$
10^{17}	$3\cdot10^{-1}$	$1\cdot10^{-6}$	$4\cdot10^{-47}$	$-1\cdot10^{-6}$	$3\cdot10^{-47}$

$$\varkappa\nabla^k T_{ik} = -\nabla_i\Lambda(R) = -\Lambda'(R)\nabla_i R.$$

С помощью данного соотношения можно показать, что дополнительное ускорение частицы в поле гравитационного потенциала (обобщение (3.2)) будет иметь вид

$$\mathbf{a} = \frac{1}{\varkappa}\,\frac{\nabla\Lambda(R)}{\rho} = c^2\frac{\nabla F(\rho)}{\rho}, \qquad (5.2)$$

где $F(\rho)$ имеет размерность плотности (в последнем равенстве учтена связь между скаляром Риччи R и сверткой тензора энергии-импульса вещества T, следующая из уравнений Эйнштейна). Для согласования изучаемой теории с классической механикой отсюда следует условие на $F(\rho)$:

$$c^2\frac{\nabla F(\rho)}{\rho} \ll \frac{GM}{r^2}, \quad \rho \gg \rho_c. \qquad (5.3)$$

В то же время для интерпретации кривых вращения галактик без привлечения гипотезы о темной материи необходимо, чтобы выполнялись соотношения

$$c^2\frac{\nabla F(\rho)}{\rho} \sim \frac{GM}{r^2}, \quad \rho \sim \rho_c. \qquad (5.4)$$

Иными словами, дополнительное ускорение частицы должно быть сравнимо с ньютоновским для малых астрофизических плотностей материи (порядка критической плотности вещества во Вселенной ρ_c) и пренебрежимо мало по сравнению с ньютоновским для макроскопических плотностей. Необходимо подчеркнуть, что если функция $F(\rho)$ имеет разложение в ряд в окрестности нуля, то в этом случае для малых плотностей материи справедлива рассмотренная выше линейная теория. Таким образом, условие (5.4) будет удовлетворено автоматически и ключевым останется условие (5.3).

Другое условие на $\Lambda(R)$ можно получить, рассматривая уравнение для гравитационного потенциала φ в модели (5.1). С помощью выражений (3.1) получим уравнение

$$\Delta\varphi = 4\pi G\rho - c^2\Lambda(R(\rho)),$$

из которого следует, что в случае нелинейной зависимости $\Lambda(R)$ решение для φ будет содержать, вообще говоря, дополнительные члены кроме ньютоновского (с перенормированной гравитационной постоянной G) и несущественного в ньютоновском приближении постоянного слагаемого. Поэтому функция $\Lambda(R)$ должна свестись к постоянной при больших макроскопических значениях R (и, соответственно, ρ). Это условие также обеспечит «пространственную однородность» темной энергии, возникающую при рассмотрении космологических эффектов[9)].

Поиски конкретной функциональной зависимости, удовлетворяющей перечисленным критериям, и ее сопоставление с результатами различных наблюдений представляет собой отдельную задачу. Однако результаты, полученные в рамках линейной модели и приведенные в данной работе, сами по себе заслуживают внимания и требуют более тщательного изучения.

6. ВЫВОДЫ

В данной работе были рассмотрены основные свойства моделей с переменным космологическим членом Λ, зависящим от скаляра Риччи. Общим свойством всех моделей являются неравенство нулю дивергенции тензора энергии-импульса вещества, что приводит к несохранению массы холодной материи при расширении Вселенной и к появлению дополнительных слагаемых во втором законе Ньютона, описывающем движение частицы в поле гравитационного потенциала, а также модификация уравнения для гравитационного потенциала.

Все эти условия вместе приводят к существенным ограничениям возможного вида зависимости $\Lambda(R)$, однако в настоящей работе мы не занимались поиском конкретной функциональной зависимости, удовлетворяющей всем выдвинутым критериям, а проанализировали простейшую модель, в которой космологический член линейно зависит от скаляра Риччи. Данная модель отвечает случаю малых плотностей материи, когда функцию $\Lambda(R)$ можно разложить в ряд и ограничиться линейными слагаемыми, поэтому, она была применена для описания кривых вращения галактик с помощью модифицированного второго закона Ньютона и расширения Вселенной, описываемой соответствующими уравнениями для масштабного фактора.

Моделируя распределение вещества в спиральных галактиках феноменологической непрерывной экспоненциальной зависимостью, в рамках такого подхода действительно удалось удовлетворительным образом описать кривые вращения галактик, причем без привлечения гипотезы о темной материи. При этом было оценено характерное значение k — параметра теории, коэффициента пропорциональности Λ-члена скаляру Риччи.

Решения для масштабного фактора и плотности барионной материи при таком значении k проиллюстрированы численными расчетами, выполненными с учетом значений космологических параметров, принятых в стандартной космологической модели, в том числе современной плотности темной материи. Вклад переменного члена в космологические вычисления, очевидно, не будет сам по себе существен ввиду малости параметра k, однако в рамках рассмотренной модели необходимо в дальнейшем проанализировать проблему темной материи и прежде всего наблюдения анизотропии реликтового излучения. Кроме того, модель с переменным космологическим членом предсказывает уменьшение плотности энергии вакуума в процессе расширения Вселенной, что качественно согласуется с нашими представлениями о фазовых переходах, происходивших в ранней Вселенной.

Центральное место в исследуемой теории занимает проблема несохранения массы. В частности, в рамках рассмотренной линейной зависимости космологического члена от скаляра Риччи было показано, что масса холодной материи в данной теории будет увеличиваться с ростом масштабного фактора. Со-

[9)] Уравнения для масштабного фактора, очевидно, получаются из стандартных уравнений Фридмана путем замены $\lambda \equiv \Lambda/\varkappa \to \lambda(\rho)$ и поэтому здесь не выписываются. В космологии практически всегда можно ограничиться линейным приближением для λ, так как даже члены $\sim R^2$ будут существенны лишь на планковской стадии.

ответствующие изменения на современном этапе эволюции Вселенной, по-видимому, будут незначительными ввиду малости k, однако на деситтеровской стадии рост массы будет происходить по экспоненциальному закону, что представляет собой понятную концептуальную трудность.

В целом необходимо резюмировать, что полученные результаты пока не позволяют исключить модель переменного космологического члена: они требуют глубокого осмысления и более тщательного анализа, однако, поскольку рассмотренная гипотеза имеет радикальные следствия (как в положительном, так и в отрицательном аспектах по отношению к современным физическим представлениям), можно заключить, что вопрос о ее признании будет решен в недалеком будущем.

Автор благодарен Ю. В. Штанову за предоставленные расчеты кривых вращения галактик в рамках изучаемой модели, а также П. И. Фомину, С. И. Вильчинскому, А. И. Якименко, Э. В. Горбару и А. В. Тугаю за советы и оказанное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. G. Riess et al., Astron. J. **116**, 1009 (1998); arXiv:astro-ph/9805201.
2. S. Perlmutter et al., Astrophys. J. **517**, 565 (1999); arXiv:astro-ph/9812133.
3. P. Astier et al., Astron. and Astrophys. **447**, 31 (2006); arXiv:astro-ph/0510447.
4. D. N. Spergel et al., Astrophys. J. **170**, 377 (2007); arXiv:astro-ph/0603449.
5. L. Page et al., Astrophys. J. **170**, 335 (2007); arXiv:astro-ph/0603450.
6. А. Д. Чернин, УФН **171**, 1153 (2001).
7. V. Sahni and A. A. Starobinsky, Int. J. Mod. Phys. D **9**, 373 (2000); arXiv:astro-ph/9904398.
8. V. Sahni and A. A. Starobinsky, Int. J. Mod. Phys. D **15**, 2105 (2006); arXiv:astro-ph/0610026.
9. S. Weinberg, Rev. Mod. Phys. **61**, 1 (1989); С. Вайнберг, УФН **158**, 639 (1989).
10. P. J. Peebles and B. Ratra, Rev. Mod. Phys. **75**, 559 (2003); arXiv:astro-ph/0207347.
11. В. Л. Гинзбург, Д. А. Киржниц, А. А. Любушин, ЖЭТФ **60**, 451 (1971).
12. I. Dymnikova, arXiv:gr-qc/0010016.
13. V. Sahni, Class. Quant. Grav. **19**, 3435 (2002); arXiv:astro-ph/0202076.
14. P. I. Fomin, P. A. Nakaznoy, and S. I. Vilchinskyi, arXiv:gr-qc/0509042.
15. П. И. Фомин, препринт ИТФ АН УССР, итф-73-137р, Киев (1973).
16. В. А. Рубаков, УФН **171**, 913 (2001).
17. S. Nojiri and S. D. Odintsov, Phys. Lett. B **576**, 5 (2003); arXiv:hep-th/0307071.
18. G. Cognola et al., Phys. Rev. D **73**, 084007 (2006); arXiv:hep-th/0601008.
19. S. Nojiri and S. D. Odintsov, Phys. Rev. D **74**, 086005 (2006); arXiv:hep-th/0608008.
20. A. A. Starobinsky, Письма в ЖЭТФ **86**, 183 (2007); arXiv:astro-ph/0706.2041.
21. S. Nojiri and S. D. Odintsov, arXiv:astro-ph/0801.4843.
22. J. D. Bekenstein, Contemp. Phys. **47**, 387 (2006); arXiv:astro-ph/0701848.
23. Л. Д. Ландау, Е. М. Лившиц, *Теория поля*, Наука, Москва (1988).
24. A. P. Lightman et al., *Problem Book in Relativity and Gravitation*, Princeton University Press, Princeton (1975); А. Лайтман и др. *Сборник задач по общей теории относительности и гравитации*, Мир, Москва (1979).
25. J. Einasto, arXiv:astro-ph/0401341.
26. V. Sahni, Lect. Notes Phys. **653**, 141 (2004); arXiv:astro-ph/0403324.
27. D. P. Roy, arXiv:physics/0007025.
28. R. B. Tully and J. R. Fisher, Astron. and Astrophys. **54**, 661 (1977).
29. А. В. Засов, К. А. Постнов, *Общая астрофизика*, Изд-во Век2, Фрязино (2006).
30. А. Г. Морозов, А. В. Хоперсков, *Физика дисков*, Изд-во Волгоградского ун-та (2005).
31. R. Tolman, *Relativity, Thermodynamics and Cosmology*, Oxford at the Clarendon Press, Oxford (1969); Р. Толмен, *Относительность, термодинамика и космология*, Наука, Москва (1974).
32. S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology*, J. Wiley and Sons, Inc. (1972); С. Вайнберг, *Гравитация и космология*, Мир, Москва (1975).