

ВЫСОКОЧАСТОТНАЯ ВОСПРИИМЧИВОСТЬ СВЕРХРЕШЕТКИ С ДВУМЕРНЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

В. А. Игнатченко^a, Ю. И. Маньков^{a,b}, Д. С. Цикалов^b*

^a *Институт физики им. Л. В. Киренского Сибирского отделения Российской академии наук
660036, Красноярск, Россия*

^b *Сибирский федеральный университет
660062, Красноярск, Россия*

Поступила в редакцию 7 апреля 2008 г.

Исследована высокочастотная восприимчивость (функция Грина) изначально синусоидальной одномерной сверхрешетки при наличии в ней двумерных фазовых неоднородностей, моделирующих деформации поверхностей границ между слоями сверхрешетки. Для волн, распространяющихся в направлении оси сверхрешетки (геометрия фотонного или магнонного кристалла), обнаружено своеобразное поведение мнимой части функции Грина, заключающееся в существенном различии между пиками, соответствующими краям запрещенной зоны в спектре волн. Пик, соответствующий краю зоны с меньшей частотой, остается практически неизменным при росте среднеквадратичных флуктуаций двумерных неоднородностей γ_2 , в то время как пик, соответствующий краю запрещенной зоны с большей частотой, с ростом γ_2 расширяется и резко уменьшается по высоте до полного его исчезновения. Такое поведение пиков соответствует механизму закрытия запрещенной зоны, отличному от традиционного, характерного для одномерных и трехмерных неоднородностей. Эти эффекты объясняются своеобразием законов сохранения энергии падающей и рассеянной волн для двумерных неоднородностей в одномерной сверхрешетке.

PACS: 68.65.-k, 75.30.Ds, 68.65.Cd

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время широко исследуются мультислойные пленочные структуры (одномерные сверхрешетки), которые представляют собой периодически чередующиеся слои двух или более материалов с различающимися физическими свойствами. В частности, к таким структурам относятся фотонные и магнонные кристаллы, изучению которых уделяется много внимания. Известно, что спектр волн любой природы в периодических системах имеет зонную структуру, которая характеризуется вектором обратной решетки \mathbf{q} ($|\mathbf{q}| \equiv q = 2\pi/l$, где l — период одномерной сверхрешетки). На краю зон Бриллюэна сверхрешетки при $k = nq/2$ происходят снятие вырождения и появление щелей (запрещенных зон) $\Delta\omega_n$. Ширина щели определяется величиной изменения физических параметров соседних слоев и номером зоны n . В реальных материалах идеальная периодичность в расположении слоев может быть выдер-

жана лишь приближенно. Всегда имеются случайные отступления от периодичности, обусловленные природными или технологическими факторами; возможно и целенаправленное формирование той или иной аперидичности. Это обстоятельство стимулировало появление теоретических работ, в которых изучается переход от идеально периодических сверхрешеток к частично стохастизованным.

На сегодняшний день развито несколько теоретических методов для исследования спектральных свойств таких сверхрешеток: введение одномерной случайной фазы [1, 2]; моделирование нарушения порядка в последовательности расположения слоев двух различных материалов [3–9]; численное моделирование случайных отклонений границ раздела слоев от их первоначального периодического положения [10–12]; постулирование формы корреляционной функции сверхрешетки с неоднородностями [13, 14]; приложение приближений геометрической оптики [15] и развитие динамической теории композитных упругих сред [16].

*E-mail: mankov@iph.krasn.ru

В работах [17–23] для описания спектральных свойств сверхрешеток использовался метод усредненных функций Грина. Единственной характеристикой, описывающей случайную среду, которая входит в выражение для усредненной функции Грина, является корреляционная функция $K(\mathbf{r})$, зависящая от расстояния \mathbf{r} между двумя точками среды: $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}'$. Поэтому первая часть задачи сводится к нахождению функции $K(\mathbf{r})$ для сверхрешетки, содержащей те или иные неоднородности, а вторая часть задачи заключается в извлечении стандартными приближенными методами спектральных характеристик из выражения для функции Грина, содержащей эту корреляционную функцию. Для описания неоднородностей геометрической структуры исходной синусоидальной сверхрешетки использовалась модель случайной фазы, которая считалась функцией всех трех координат с произвольным радиусом корреляции. Для нахождения корреляционной функции сверхрешетки $K(\mathbf{r})$ был развит метод случайной пространственной модуляции (RSM) [17], который является обобщением хорошо известного метода определения временной корреляционной функции для случайной частотной (фазовой) модуляции радиосигнала [24, 25] на случай пространственной (в общем случае — трехмерной) модуляции периода сверхрешетки. Достоинством этого метода является то, что форма корреляционной функции сверхрешетки в нем не постулируется, а выводится из наиболее общих допущений о характере случайной пространственной модуляции периода сверхрешетки. Было показано, что в общем случае эта функция имеет сложный вид, который существенно зависит от размера неоднородностей, структуры границы между слоями и т. д.

В работах [17–23] были исследованы спектр волн, их затухание и высокочастотная восприимчивость первоначально синусоидальной сверхрешетки, содержащей одномерные фазовые неоднородности, моделирующие случайные смещения границ между слоями сверхрешетки от их первоначального периодического расположения и трехмерные изотропные фазовые неоднородности, моделирующие случайные деформации поверхности этих границ. Было исследовано также влияние на спектральные характеристики одновременного присутствия одно- и трехмерных неоднородностей — как при отсутствии [20], так и при наличии [22, 23] взаимных корреляций между ними.

В общем случае неоднородные деформации поверхностей границ между слоями следует моделировать анизотропными трехмерными корреляционными

функциями, имеющими различные корреляционные радиусы: \tilde{r}_{\parallel} вдоль оси сверхрешетки z и \tilde{r}_{\perp} в плоскости слоев сверхрешетки xy . На практике могут встречаться самые различные соотношения между величинами этих корреляционных радиусов. Существенную роль играет при этом также соотношение между корреляционным радиусом \tilde{r}_{\parallel} и средней толщиной слоев сверхрешетки $l/2$. Если $\tilde{r}_{\parallel} \ll l/2$, то деформации соседних слоев практически независимы. Если $\tilde{r}_{\parallel} \gtrsim l/2$, то деформации на соседних слоях коррелированы между собой. Предельный случай больших корреляционных радиусов \tilde{r}_{\parallel} , когда выполняются оба неравенства: $\tilde{r}_{\parallel} \gg l/2$ и $\tilde{r}_{\parallel} \gg \tilde{r}_{\perp}$, соответствует полной идентичности неоднородностей на всех поверхностях границ между слоями сверхрешетки. В этом предельном случае анизотропная трехмерная корреляционная функция превращается в двумерную корреляционную функцию.

На практике такая ситуация может реализоваться, например, когда неоднородности поверхностей слоев сверхрешетки являются следствием неоднородной деформации поверхности подложки, на которую производится напыление этих слоев. При этом случайные в плоскости xy деформации могут практически синфазно повторяться на поверхности каждого нового напыленного слоя, и сверхрешетка приближенно будет описываться двумерной корреляционной функцией, имеющей конечный радиус корреляции в плоскости слоев xy и бесконечный вдоль оси z .

Модификация закона дисперсии и затухание синусоидальной сверхрешетки, обусловленные двумерными неоднородностями, были кратко рассмотрены в работе [17]. Было показано, что в этом случае, в отличие от одно- и трехмерных неоднородностей, затухание, обусловленное двумерными неоднородностями, возникает только на одной ветви в спектре, расположенной выше щели на границе зоны Бриллюэна, в то время как частота нижней ветви остается действительной. В данной работе исследуется высокочастотная восприимчивость (функция Грина) синусоидальной сверхрешетки с двумерными неоднородностями и обсуждается физический механизм, приводящий к асимметрии влияния таких неоднородностей на нижнюю и верхнюю ветви спектра волн.

2. МОДЕЛЬ И КОРРЕЛЯЦИОННАЯ ФУНКЦИЯ СВЕРХРЕШЕТКИ

Напомним вкратце основные черты модели и метода, использованных в работах [17–23]. Сверхре-

шетка характеризуется зависимостью какого-либо материального параметра A от пространственных координат $\mathbf{x} = \{x, y, z\}$. Физическая природа параметра $A(\mathbf{x})$ может быть различной. Этот параметр может являться плотностью материала или силовой константой для упругой среды; магнитной анизотропией, намагниченностью или обменом для магнитной системы, и так далее. Мы представим $A(\mathbf{x})$ в форме

$$A(\mathbf{x}) = A + \Delta A \rho(\mathbf{x}), \quad (1)$$

где A — средняя величина параметра, ΔA — его среднеквадратичное отклонение и $\rho(\mathbf{x})$ — центрированная ($\langle \rho(\mathbf{x}) \rangle = 0$) и нормированная ($\langle \rho^2(\mathbf{x}) \rangle = 1$) функция. Функция $\rho(\mathbf{x})$ описывает как периодическую зависимость параметра вдоль оси сверхрешетки z , так и случайную пространственную модуляцию этого параметра, которая в общем случае может быть функцией всех трех координат: $\mathbf{x} = \{x, y, z\}$. Угловые скобки соответствуют усреднению по ансамблю случайных реализаций функции $\rho(\mathbf{x})$.

Мы рассматриваем сверхрешетку, имеющую синусоидальную зависимость материального параметра от координаты z в исходном состоянии, когда случайные неоднородности отсутствуют. Как и в статье [17], представим функцию $\rho(\mathbf{x})$ в форме

$$\rho(\mathbf{x}) = \sqrt{2} \cos\{q[z - u_d(\mathbf{x})] + \psi\}, \quad (2)$$

где $d = 1, 2, 3$ — размерность неоднородностей. Синусоидальная сверхрешетка может рассматриваться как частный случай многослойной структуры с очень плавными границами раздела слоев. В этом случае положительные и отрицательные области функции $\rho(\mathbf{x})$ вдоль оси сверхрешетки z соответствуют чередующимся слоям такой многослойной структуры, а нулевые точки функции $\rho(\mathbf{x})$ соответствуют границам слоев сверхрешетки. В рамках такой интерпретации функция $u_d(\mathbf{x})$, в зависимости от значения d , моделирует случайные смещения ($d = 1$) или случайные деформации поверхностей этих границ ($d = 3$ или $d = 2$). Не зависящая от координат фаза ψ характеризуется однородным распределением на интервале $(-\pi, \pi)$.

Статические и динамические свойства случайно-неоднородных материалов обусловлены стохастическими свойствами неоднородностей, которые описываются корреляционной функцией. Вычислим ее для рассматриваемой нами сверхрешетки.

Корреляционная функция $K(\mathbf{r})$ зависит только

от разности координат $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}'$ и определяется выражением

$$K(\mathbf{r}) = \langle \rho(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle_{\psi \chi}. \quad (3)$$

Здесь усреднение проведено как по случайной фазе ψ , так и по случайной функции χ , где

$$\chi(\mathbf{x}, \mathbf{r}) = q [u_d(\mathbf{x} + \mathbf{r}) - u_d(\mathbf{x})]. \quad (4)$$

В предположении гауссовского распределения величин χ было получено общее выражение для $K(\mathbf{r})$ в виде [17]

$$K(\mathbf{r}) = \cos(qr_z) K_d(\mathbf{r}), \quad (5)$$

где убывающая часть корреляционной функции $K_d(\mathbf{r})$ определяется выражением

$$K_d(\mathbf{r}) = \exp\left[-\frac{1}{2} Q_d(\mathbf{r})\right]. \quad (6)$$

Здесь

$$Q_d(\mathbf{r}) = q^2 \langle [u_d(\mathbf{x} + \mathbf{r}) - u_d(\mathbf{x})]^2 \rangle$$

— безразмерная структурная функция сверхрешетки, которая может быть представлена в виде

$$Q_d(\mathbf{r}) = 2q^2 \int \frac{d\mathbf{k}}{k^2} S_\varphi(\mathbf{k}) (1 - \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})), \quad (7)$$

где $S_\varphi(\mathbf{k})$ — спектральная плотность корреляционной функции $K_\varphi(\mathbf{r})$, которая описывает стохастические свойства градиента модулирующей функции $u_d(\mathbf{x})$ (напомним, что стохастические свойства функции $u_d(\mathbf{x})$ не могут быть описаны корреляционной функцией, зависящей только от разности координат $\mathbf{x} - \mathbf{x}'$, так как $u_d(\mathbf{x})$ не является однородной случайной функцией):

$$S_\varphi(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int K_\varphi(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{r}. \quad (8)$$

Корреляционная функция $K_\varphi(\mathbf{r})$ в этом выражении может быть выбрана, исходя из самых общих представлений о характере случайной модуляции $u_d(\mathbf{x})$. Для двумерных неоднородностей случайная модуляция u_2 зависит только от векторов

$$\mathbf{x}_\perp = \{x, y\}, \quad \mathbf{r}_\perp = \{r_x, r_y\},$$

лежащих в плоскости xy . Для моделирования двумерных деформаций поверхностей границ в сверхрешетке мы выберем корреляционную функцию, описывающую изотропные в плоскости xy экспоненциально убывающие корреляции:

$$K_\varphi(\mathbf{r}) = \sigma_2^2 \exp(-k_2 r_\perp), \quad (9)$$

где σ_2 — среднеквадратичная флуктуация градиента случайной функции $u_2(\mathbf{x}_\perp)$, k_2 — корреляционное волновое число двумерных неоднородностей ($k_2^{-1} = \hat{r}_\perp$ — радиус корреляций) и $r_\perp = |\mathbf{r}_\perp|$. Тогда спектральная плотность $S_\varphi(\mathbf{k})$, которая определяется выражением (8), имеет вид

$$S_\varphi(\mathbf{k}) = \frac{\sigma_2^2}{2\pi} \delta(k_z) \frac{k_2}{(k_2^2 + k_x^2 + k_y^2)^{3/2}}. \quad (10)$$

Подставляя (10) в (7) и интегрируя, получаем

$$Q_2(\mathbf{r}) = 4\gamma_2^2 \{E_1(k_2 r_\perp) + \ln(k_2 r_\perp C) + \exp(-k_2 r_\perp) - 1\}. \quad (11)$$

Здесь $C \approx 1.78$ — постоянная Эйлера,

$$E_1(z) = \int_z^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt$$

— интегральная показательная функция, параметр $\gamma_2 = q\sigma_2/\sqrt{2}k_2$ определяет среднеквадратичные флуктуации функции $u_2(\mathbf{x}_\perp)$. В предельных случаях больших и малых значений r_\perp выражение (11) принимает вид

$$Q_2(\mathbf{r}) = \gamma_2^2 \begin{cases} k_2^2 r_\perp^2, & k_2 r_\perp \ll 1, \\ 4 \ln(k_2 r_\perp C/e), & k_2 r_\perp \gg 1, \end{cases} \quad (12)$$

где e — основание натурального логарифма.

Напомним, что при исследовании закона дисперсии и затухания волн в сверхрешетке с двумерными фазовыми неоднородностями в работе [17] использовалась гауссовская моделирующая корреляционная функция

$$K_\varphi(\mathbf{r}) = \sigma_2^2 \exp\left(-\frac{1}{2}k_2^2 r_\perp^2\right). \quad (13)$$

Соответственно, было получено выражение для $Q_2(\mathbf{r})$, отличное от (11). Однако в предельных случаях как при $k_2 r_\perp \ll 1$, так и при $k_2 r_\perp \gg 1$ это выражение совпадает с формулой (12). Это подтверждает общее положение об асимптотической независимости корреляционной функции сверхрешетки $K(\mathbf{r})$ от формы моделирующей функции $K_\varphi(r)$, которое было установлено ранее для одно- и трехмерных неоднородностей [17]. В то же время, асимптотика корреляционной функции сверхрешетки $K(\mathbf{r})$ существенно различна для случаев одно-, двух- и трехмерных фазовых неоднородностей.

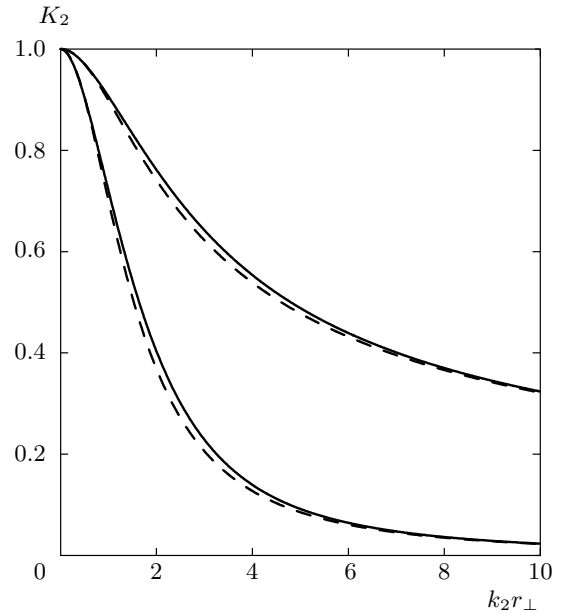


Рис. 1. Убывающая часть корреляционной функции сверхрешетки с двумерными неоднородностями для случаев $\gamma_2^2 = 0.3$ (верхняя пара кривых) и $\gamma_2^2 = 1.0$ (нижняя пара кривых). Сплошные кривые соответствуют выражению (6) с $Q_2(\mathbf{r})$ в форме (11), штриховые кривые — аппроксимирующей корреляционной функции (14)

Подстановка выражения для $Q_2(\mathbf{r})$ в виде (11) в формулу (6) приводит к слишком сложному выражению для корреляционной функции $K(\mathbf{r})$. Поэтому мы аппроксимировали убывающую часть корреляционной функции $K_2(\mathbf{r})$ простым выражением

$$K_2(\mathbf{r}) = \left(1 + \frac{C^2}{e^2} k_2^2 r_\perp^2\right)^{-\gamma_2^2}. \quad (14)$$

На рис. 1 показаны убывающие части точной корреляционной функции (6) с $Q_2(\mathbf{r})$ в форме (11) и аппроксимирующей функции $K_2(\mathbf{r})$ в форме (14) для $\gamma_2^2 = 0.3$ и $\gamma_2^2 = 1.0$. Видно, что модельная корреляционная функция хорошо описывает точную корреляционную функцию во всем интервале изменения r_\perp и имеет асимптотику, совпадающую с асимптотикой точной функции как при $k_2 r_\perp \ll 1$, так и при $k_2 r_\perp \gg 1$. Последнее требование является основным при подборе аппроксимирующей корреляционной функции, так как ранее было показано [20–23] (как для одно- и трехмерных неоднородностей, так и для их смеси), что спектральные свойства волн определяются, главным образом, асимптотическим видом корреляционной функции неоднородностей при $r \rightarrow \infty$.

3. ВЫСОКОЧАСТОТНАЯ ВОСПРИИМЧИВОСТЬ СВЕРХРЕШЕТКИ

Волновое уравнение для временной трансформанты Фурье в сверхрешетке может быть представлено в виде

$$\nabla^2 m + \left[\nu - \frac{\Lambda}{\sqrt{2}} \rho(\mathbf{x}) \right] m = 0, \quad (15)$$

где функция $m = m(\mathbf{x}, \omega)$ и параметры ν и Λ различны для волн разной природы. Для спиновых волн уравнение (15) соответствует ферромагнитной сверхрешетке с неоднородным параметром магнитной анизотропии $\beta(\mathbf{x})$ ($A = \beta$, $\Delta A = \Delta\beta$ в формуле (1)) в ситуации, когда направления внешнего магнитного поля \mathbf{H} , постоянной составляющей намагниченности \mathbf{M}_0 и оси магнитной анизотропии совпадают с направлением оси сверхрешетки z . В этом случае $m = M_x + iM_y$, $\nu = (\omega - \omega_0)/\alpha g M_0$, $\Lambda = \sqrt{2}\Delta\beta/\alpha$, где ω — частота, $\omega_0 = g[H + (\beta - 4\pi)M_0]$ — частота однородного ферромагнитного резонанса, g — гиромагнитное отношение, α — постоянная обмена. Для упругих волн в скалярном приближении в сверхрешетке с неоднородной плотностью среды $p(\mathbf{x})$ ($A = p$, $\Delta A = \Delta p$) имеем $\nu = (\omega/s)^2$ и $\Lambda = \sqrt{2}\omega^2(\Delta p)/ps^2$, где s — скорость упругих волн. Для электромагнитных волн в таком же приближении в среде с неоднородной диэлектрической проницаемостью $\varepsilon(\mathbf{x})$ ($A = \varepsilon$, $\Delta A = \Delta\varepsilon$) имеем $\nu = \varepsilon(\omega/c)^2$, $\Lambda = \sqrt{2}\omega^2(\Delta\varepsilon)/\varepsilon c^2$, где c — скорость света.

Образ Фурье усредненной функции Грина для уравнения (15) имеет вид

$$G(\nu, \mathbf{k}) = \frac{1}{\nu - k^2 - M(\nu, \mathbf{k})}, \quad (16)$$

где $M(\nu, \mathbf{k})$ — классический аналог массового оператора, который в приближении Буре [26] может быть представлен в виде [19]

$$M(\nu, \mathbf{k}) = -\frac{\Lambda^2}{8\pi} \int \frac{K(\mathbf{r})}{|\mathbf{r}|} \times \exp[-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \sqrt{\nu}|\mathbf{r}|)] d\mathbf{r}. \quad (17)$$

Вычислим функцию Грина (16) для волн в сверхрешетке при наличии в ней двумерных неоднородностей. Переходя в выражении для массового оператора (17) в сферическую систему координат с полярной осью вдоль оси z ($\mathbf{k} \parallel z$) и интегрируя по азимутальному углу, получаем

$$M(\nu, \mathbf{k}) = -\frac{\Lambda^2}{2} \int_0^\infty dr r \exp(-i\sqrt{\nu}r) \times \int_0^1 dc \frac{\cos(qrc) \cos(krc)}{\left[1 + \frac{C^2}{e^2} k_2^2 r^2 (1 - c^2)\right]^{\gamma_2^2}}, \quad (18)$$

где $c = \cos \vartheta$, ϑ — полярный угол.

Мы исследуем здесь высокочастотную восприимчивость на краю первой зоны Бриллюэна при $k = k_r \equiv q/2$. После выполнения интегрирования по r в уравнении (18), подставляя полученное выражение в функцию Грина (16) и вводя безразмерные величины, в двухволновом приближении получаем

$$\Lambda G(\nu) = \left\{ X + \frac{\nu_r}{2\Lambda\eta_2^2} \left(\frac{e}{C}\right)^{2\gamma_2^2} \times \int_0^1 \frac{dc}{(1 - c^2)^{\gamma_2^2}} J(c, X) \right\}^{-1}, \quad (19)$$

где $X = (\nu - \nu_r)/\Lambda$, $\nu_r = k_r^2$, $\eta_2 = 2k_2 k_r/\Lambda$,

$$J(c, X) = -2^{-1/2 - \gamma_2^2} \sqrt{\pi} \Gamma(1 - \gamma_2^2) \times \left(\frac{e^2}{C^2(1 - c^2)} \right)^{1 - \gamma_2^2} \left[\frac{2^{-1/2 + \gamma_2^2}}{\sqrt{\pi} \Gamma(2 - \gamma_2^2)} - \frac{\mathbf{H}_{3/2 - \gamma_2^2}(iw)}{(iw)^{1/2 - \gamma_2^2}} + \frac{Y_{3/2 - \gamma_2^2}(iw)}{(iw)^{1/2 - \gamma_2^2}} \right]. \quad (20)$$

Здесь введено обозначение

$$w = \frac{e}{\eta_2 C \sqrt{1 - c^2}} \left[X + \frac{2\nu_r}{\Lambda} (1 - c) \right], \quad (21)$$

$\mathbf{H}_\alpha(z)$, $Y_\alpha(z)$ и $\Gamma(z)$ — соответственно функции Струве, Неймана и гамма-функция. Однако выражение (20) справедливо при $\gamma_2^2 \neq n$, где n — целое число. При $\gamma_2^2 = n$ вместо функции $J(c, X)$ в формуле (19) стоят более простые выражения. Так, при $\gamma_2^2 = 1$ под интегралом в формуле (19) следует записать функцию

$$J_1(c, X) = \frac{1}{2} [e^{-w} E_1(-w) + e^w E_1(w)], \quad (22)$$

а при $\gamma_2^2 = 2$, соответственно, записываем функцию

$$J_2(c, X) = \frac{C^2(1 - c^2)}{2e^2} \times \left\{ 1 - \frac{w}{2} [e^w E_1(w) - e^{-w} E_1(-w)] \right\}. \quad (23)$$

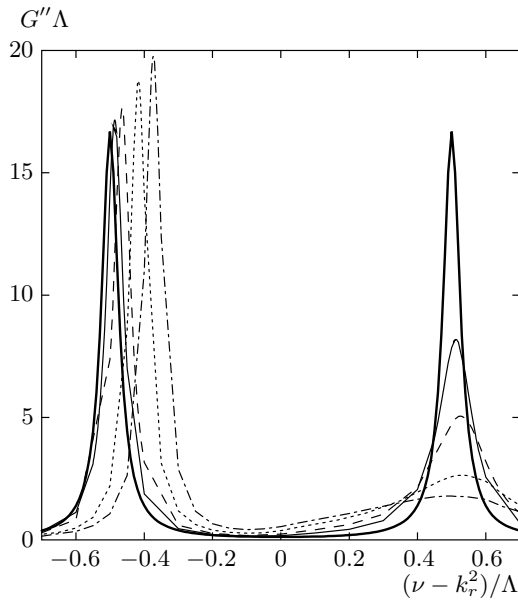


Рис. 2. Мнимая часть функции Грина (19) в случае двумерных неоднородностей на границе первой зоны Бриллюэна сверхрешетки для значений параметров $\eta_2 = 4$, $\nu_r/\Lambda = 20$ и различных значений γ_2^2 : 0 (толстая сплошная кривая), 0.2 (тонкая сплошная кривая), 0.45 (штриховая кривая), 1.1 (пунктирная кривая), 1.9 (штрихпунктирная кривая)

При выводе выражения (19) использовались приближение узких запрещенных зон $\Lambda \ll \nu_r$ и условие малости затухания, обусловленного неоднородностями $k_2 \gamma_2^2 \ll k_r$. Интеграл по s находился численно. При отсутствии неоднородностей и в пренебрежении собственным затуханием волн ширина щели в спектре при $k = k_r$ (соответствующая расстоянию между уровнями расщепленного спектра $\nu_+(k_r)$ и $\nu_-(k_r)$) равна Λ . При этом на зависимости $G''(\nu) = \text{Im} G(\nu)$ будут наблюдаться два δ -образных пика на расстоянии Λ друг от друга. Напомним кратко, что происходит со щелью в спектре и видом функции $G''(\nu)$ при появлении одно- или трехмерных неоднородностей в структуре сверхрешетки. С ростом среднеквадратичных флуктуаций одномерных неоднородностей γ_1 расстояние между уровнями спектра $\Delta\nu = \nu'_+ - \nu'_-$, где $\nu'_\pm = \text{Re} \nu_\pm(k_r)$, уменьшается и при некотором критическом значении γ_1 происходит закрытие щели в спектре. Одновременно, с ростом γ_1 возрастает затухание $\nu''_\pm(k) = \text{Im} \nu_\pm(k)$, которое, как функция от k , имеет максимум при $k = k_r$ [17]. Пики на зависимости $G''(\nu)$ с ростом γ_1 уменьшаются и сближаются, а их полуширины Γ увеличиваются, пока при некото-

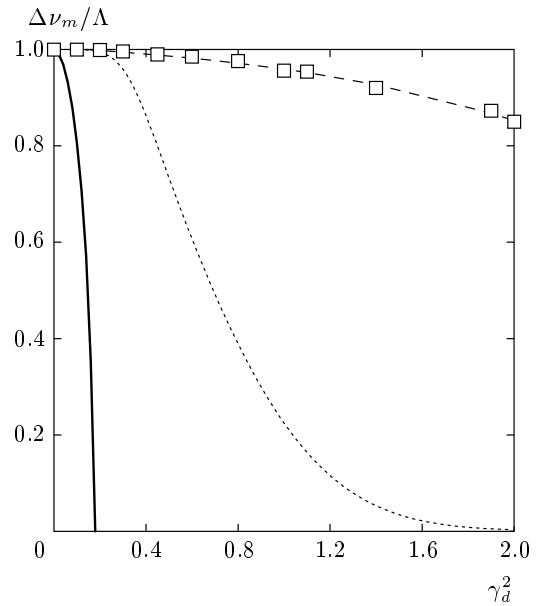


Рис. 3. Расстояние между пиками мнимой части функции Грина $\Delta\nu_m$ в зависимости от γ_d^2 для случаев одномерных (сплошная кривая), двумерных (квадраты) и трехмерных (пунктирная кривая) неоднородностей; $\eta_d = 4$ ($d = 1, 2, 3$)

ром γ_1 эти пики не сольются в один [18]. Расстояние между пиками $\Delta\nu_m \approx \Delta\nu$ при любом γ_1 . С ростом среднеквадратичных флуктуаций трехмерных неоднородностей γ_3 также происходит уменьшение $\Delta\nu$ и, соответственно, увеличение ν''_\pm и Γ . Однако уменьшение $\Delta\nu$ и $\Delta\nu_m$ для трехмерных неоднородностей происходит медленнее, чем для одномерных неоднородностей и, если использовать точную формулировку, приводит не к закрытию щели, а к ее экспоненциальной малости [22]. Это относится и к расстоянию между пиками $\Delta\nu_m$. Оба эти случая — одномерных и трехмерных неоднородностей — характеризуются тем, что все спектральные параметры — частоты $\nu'_+(k_r)$ и $\nu'_-(k_r)$, затухания $\nu''_+(k_r)$ и $\nu''_-(k_r)$, положения максимумов пиков ν_m^- и ν_m^+ и ширины этих пиков Γ — в рассматриваемом приближении симметричны относительно центра щели.

Иную картину для частотной зависимости функции Грина получаем при наличии в сверхрешетке двумерных неоднородностей. Результаты расчетов для мнимой части функции Грина (19) представлены на рис. 2. Видно, что с увеличением среднеквадратичных флуктуаций неоднородностей γ_2 поведение левого и правого пиков функции G'' существенно различно: левый пик смещается к центру зоны и несколько увеличивается по амплитуде, в то вре-

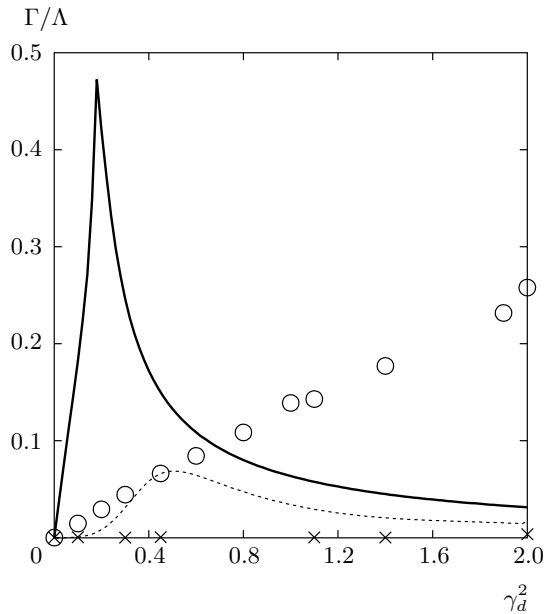


Рис. 4. Полуширина пиков Γ на половине своей высоты в зависимости от γ_d^2 для случаев одномерных (сплошная кривая) и трехмерных (пунктирная кривая) неоднородностей. Полуширина левого (крестики) и правого (кружки) пиков для случая двумерных неоднородностей

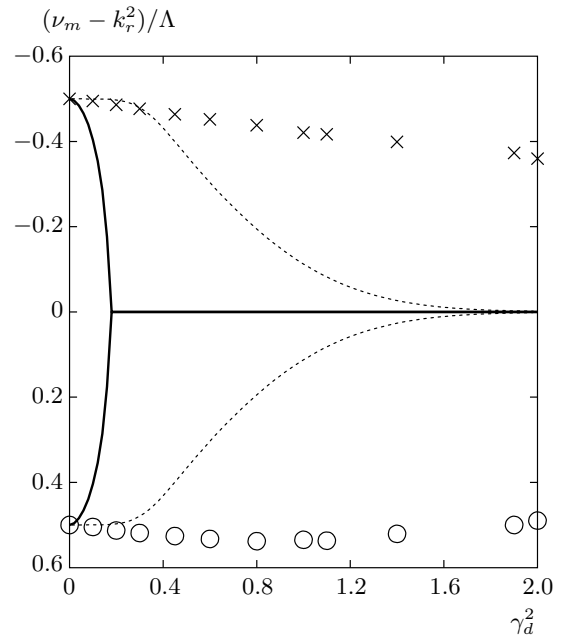


Рис. 5. Положение максимумов пиков в зависимости от γ_d^2 в следующих случаях: одномерных (сплошная кривая) и трехмерных (пунктирная кривая) неоднородностей. В случае двумерных неоднородностей левому пику соответствуют крестики, а правому — кружки

мя как амплитуда правого пика резко уменьшается, а его ширина увеличивается. Отметим, что конечная высота левого пика на рис. 2 и его ненулевая ширина обусловлены введением при численных расчетах затравочного затухания $\Gamma_0/\Lambda = 0.03$ для устранения расхождений. Таким образом, механизм закрытия щели в случае возрастания интенсивности двумерных неоднородностей оказывается другим, чем в случаях одно- или трехмерных неоднородностей: щель исчезает за счет уменьшения правого пика при сохранении левого пика, в отличие от одно- или трехмерных неоднородностей, где щель закрывалась за счет симметричного сближения и уширения пиков.

На рис. 3 изображено расстояние между пиками мнимой части функции Грина (19) в зависимости от квадрата среднеквадратичной флуктуации двумерных неоднородностей γ_2^2 (квадратики). Здесь же для сравнения показаны исследованные ранее зависимости $\Delta\nu_m(\gamma_1^2)$ и $\Delta\nu_m(\gamma_3^2)$, соответствующие присутствию в сверхрешетке одномерных (сплошная кривая) или трехмерных (пунктир) неоднородностей. Видно, что наиболее чувствительна щель в спектре к действию одномерных неоднородностей: максимумы функции Грина сливаются в один максимум уже

при $\gamma_1^2 = \gamma_{1c}^2 = 0.18$ (для $\eta_1 = 4$). Под действием трехмерных неоднородностей щель уменьшается гораздо медленнее: экспоненциально убывая, она практически исчезает при величинах γ_3^2 , на порядок больших γ_{1c}^2 . Наиболее медленно убывает щель в спектре и, соответственно, расстояние между максимумами $\Delta\nu_m$ под действием двумерных неоднородностей. Убывая с ростом γ_2^2 , $\Delta\nu_m$ уменьшается только на 15% при $\gamma_2^2 = 2$, тогда как для $\gamma_3^2 = 2$ щель уже становится пренебрежимо малой (при $\eta_2 = \eta_3 = 4$).

На рис. 4 изображены полуширины пиков, разделенные на половине высоты соответствующих пиков функции $G''(\nu)$. Для исследованных ранее полуширин пиков под действием одномерных (сплошная кривая) и трехмерных (пунктир) неоднородностей пики симметричны и полуширины левого и правого пиков одинаковы. Острый максимум на сплошной кривой соответствует точке слияния двух пиков в один при $\gamma_1^2 = \gamma_{1c}^2$. Исследованные в данной работе зависимости полуширин левого и правого пиков от γ_d^2 для двумерных неоднородностей показаны соответственно крестиками и кружками. При построении этих зависимостей из рассчитанных полуширин пиков отнималась величина затравочного затухания

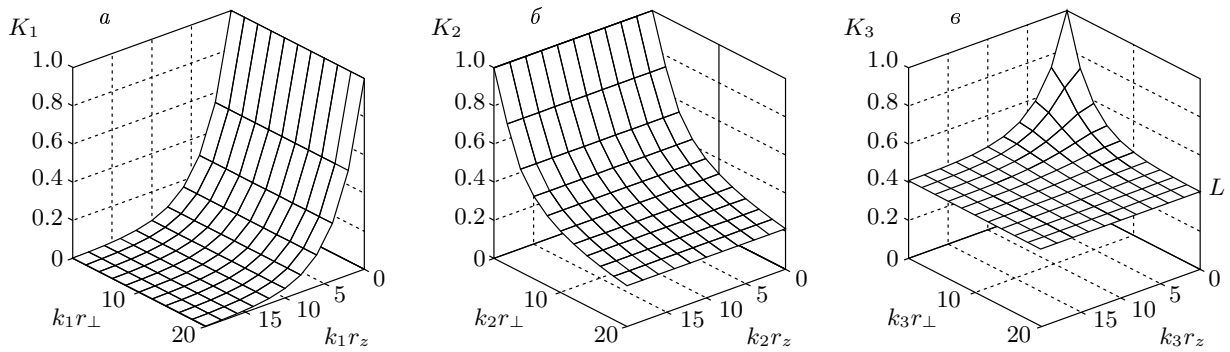


Рис. 6. Убывающая часть корреляционных функций сверхрешетки для случаев одномерных (а), двумерных (б) и трехмерных (в) неоднородностей для значения параметров $\gamma_1^2 = \gamma_2^2 = \gamma_3^2 = 0.3$. На рис. 3в отмечена асимптота $L = \exp(-3\gamma_3^2)$

$\Gamma_0/\Lambda = 0.03$. Поэтому полуширины на этом рисунке не соответствуют значениям на рис. 2; в частности, полуширина левого пика после такой операции приближенно обращается в нуль. Видна резкая асимметрия в полуширинах левого и правого пиков, которая практически линейно возрастает с ростом γ_2^2 .

На рис. 5 показано положение максимумов левого и правого пиков в зависимости от величины среднеквадратичных флуктуаций для случаев одно-, двух- и трехмерных неоднородностей. Видно, что в случае двумерных неоднородностей, в отличие от одно- и трехмерных неоднородностей, наблюдается небольшая асимметрия в положении пиков по отношению к центру запрещенной зоны и смещение центра зоны в область более высоких частот.

Обращаем внимание на то, что изображенные на рис. 3–5 физические величины рассчитывались с использованием в формуле (19) выражения (20) для всех значений γ_2^2 , кроме $\gamma_2^2 = 1$ и $\gamma_2^2 = 2$. Для двух последних значений в уравнении (19) были использованы соответственно выражения (22) и (23). Видно, что вычисленные для этих выделенных точек значения физических величин хорошо вписываются в последовательность, соответствующую другим значениям γ_2^2 .

4. ОБСУЖДЕНИЕ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Как было показано ранее [20–23], основные характеристики волнового спектра определяются, главным образом, асимптотикой корреляционных функций сверхрешетки $K(\mathbf{r})$ при $r \rightarrow \infty$. На рис. 6 показана форма убывающих частей кор-

реляционной функции $K_d(\mathbf{r})$ для одно-, двух- и трехмерных неоднородностей в координатах r_z и r_\perp для $k_1 = k_2 = k_3$ и $\gamma_1^2 = \gamma_2^2 = \gamma_3^2 = 0.3$. Напомним анализ связи характеристик волнового спектра с асимптотикой корреляционных функций сверхрешеток для одно- и трехмерных неоднородностей, проведенный в работе [20]. Мы рассматриваем исходную волну, распространяющуюся вдоль оси z , перпендикулярно плоскости слоев сверхрешетки. Вдоль этой же оси убывает до нуля корреляционная функция одномерных неоднородностей, которая обладает экспоненциальной асимптотикой при $r_z \rightarrow \infty$ (рис. 6а). Поэтому исходная волна интенсивно рассеивается на таких неоднородностях, что приводит к большому затуханию и закрытию щели при малых значениях γ_1^2 (рис. 3 и 4, сплошные кривые). Корреляционная функция изотропных трехмерных неоднородностей убывает одинаково вдоль всех координатных осей, но не до нуля, а до некоторой асимптоты $L = \exp(-3\gamma_3^2)$ (рис. 6в). Таким образом корреляционный объем над этой асимптотой характеризуется конечным корреляционным радиусом, а под этой асимптотой — бесконечным корреляционным радиусом. Именно существование корреляционного объема с бесконечным корреляционным радиусом и приводит к малому затуханию волн и медленному уменьшению щели в спектре с ростом γ_3^2 (рис. 3 и 4, пунктирные кривые).

Проведем подобное же сопоставление полученных в данной работе результатов с корреляционной функцией двумерных неоднородностей. Эта корреляционная функция убывает по степенному закону только в координатной плоскости xy (рис. 6б). Вдоль оси распространения исходной волны z она

постоянна, т. е. характеризуется бесконечно большим корреляционным радиусом. Таким образом, затухание и модификация закона дисперсии исходной волны в этом случае определяются только x - и y -компонентами рассеянных волн. Это приводит к тому, что уменьшение щели в спектре с ростом γ_2^2 происходит гораздо медленнее, чем для случаев одно- и трехмерных неоднородностей (рис. 3, квадраты).

Полученный в работе эффект асимметрии ширины и амплитуд пиков функции Грина, возникающий под действием двумерных неоднородностей, удобнее обсудить, если использовать представление массового оператора функции Грина $M(\nu, k)$ не через корреляционную функцию, как в формуле (17), а через ее трансформанту Фурье — спектральную плотность $S(\mathbf{k})$. В этом случае в приближении Бурре

$$M(\nu, \mathbf{k}) = \frac{\Lambda^2}{2} \int \frac{S(\mathbf{k} - \mathbf{k}_s)}{\nu - k_s^2} d\mathbf{k}_s. \quad (24)$$

Как известно, в рассматриваемых здесь процессах рассеяния волн на неоднородностях должен выполняться закон сохранения энергии падающей и рассеянной волн, а закон сохранения импульса отсутствует. Тем не менее на абсолютную величину импульса налагаются ограничения, следующие из закона сохранения энергии падающей и рассеянной волн и закона дисперсии рассеянной волны. В терминах частоты падающей волны ν и волнового вектора рассеянной волны k_s закон сохранения энергии в элементарном процессе рассеяния соответствует полюсу на действительной оси k_s в подынтегральной функции выражения (24), определяющего затухание падающей волны.

Рассмотрим, какие ограничения на выполнение закона сохранения энергии налагает размерность неоднородностей. Для трехмерных неоднородностей интегрирование в выражении (24) проводится по всем направлениям и величинам вектора \mathbf{k}_s , следовательно, для любой частоты ν закон сохранения имеет вид $k_s^2 = \nu$. Таким образом, на любой частоте ν возникнет затухание, обусловленное рассеянием на неоднородностях. В случае одномерных неоднородностей, т. е. случайных смещений границ между слоями сверхрешетки, случайная фаза u_1 зависит только от координаты z и спектральная плотность в выражении (24) принимает вид

$$S(\mathbf{k} - \mathbf{k}_s) = S_1(k_z - k_{sz})\delta(k_x - k_{sx})\delta(k_y - k_{sy}). \quad (25)$$

Подставляя это выражение в формулу (24) и интегрируя по k_{sx} и k_{sy} , получаем, что для волны,

распространяющейся вдоль оси z , закон сохранения энергии в элементарном процессе рассеяния принимает вид $k_{sz}^2 = \nu$. В таких процессах участвуют только волны, рассеянные либо вдоль направления падающей волны, либо в противоположном направлении. Однако интегрирование в формуле (24) проводится по всем величинам k_{sz} , что снова приводит к возможности выполнения соотношения $k_{sz}^2 = \nu$ для любой частоты ν .

Совершенно иная картина наблюдается в присутствии двумерных неоднородностей. В этом случае для волны, распространяющейся вдоль оси z , спектральная плотность имеет вид

$$S(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) = \frac{1}{2} S_2(\mathbf{k}_{s\perp}) \times [\delta(k_z - k_{sz} - q) + \delta(k_z - k_{sz} + q)]. \quad (26)$$

В окрестности правой границы первой зоны Бриллюэна второй δ -функцией в квадратных скобках можно пренебречь. Это соответствует двухволновому приближению, в котором $M(\nu, \mathbf{k})$ после подстановки выражения (26) в формулу (24) и интегрирования по k_{sz} принимает вид

$$M(\nu, \mathbf{k}) = \frac{\Lambda^2}{4} \int \frac{S_2(\mathbf{k}_{s\perp}) d\mathbf{k}_{s\perp}}{\nu - (k_z - q)^2 - k_{s\perp}^2}, \quad (27)$$

а закон сохранения энергии имеет вид

$$k_{sx}^2 + k_{sy}^2 = \nu - (k_z - q)^2. \quad (28)$$

Присутствие в энергетическом соотношении (28) вектора обратной сверхрешетки \mathbf{q} может свидетельствовать о том, что в этом случае мы имеем дело с одним из видов процессов переброса; точная идентификация типа процесса затруднительна ввиду отсутствия закона сохранения импульса. Из выражения (28) следует, что на границе зоны Бриллюэна при $k_z = k_r = q/2$ закон сохранения энергии принимает вид

$$k_{sx}^2 + k_{sy}^2 = \nu - \nu_r, \quad (29)$$

где $\nu_r \equiv k_r^2$ — частота, соответствующая центру запрещенной зоны в идеальной сверхрешетке. Этот закон может быть выполнен только для частот $\nu > \nu_r$. Для частот $\nu < \nu_r$ рассеяние волн запрещено. В частности, затухание будет возникать в области правого пика невозмущенной функции Грина при $\nu = \nu_r + \Lambda/2$ и будет отсутствовать в области левого пика, соответствующего $\nu = \nu_r - \Lambda/2$. Таким образом, резкая асимметрия затуханий для нижней и верхней ветвей собственных частот и, соответственно, асимметрия ширины и амплитуд левого и правого пиков функции Грина при рассеянии волн на

двумерных неоднородностях является прямым следствием закона сохранения энергии падающей и отраженной волн.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В качестве общего заключения к работе необходимо отметить следующее. В данной работе обнаружен эффект асимметрии амплитуд и ширин пиков функции Грина на краях запрещенной зоны спектра сверхрешеток, возникающий под действием двумерных неоднородностей. На наш взгляд, этот эффект может представлять интерес как с точки зрения дальнейшего развития общей теории комбинированного влияния на спектр волн периодических и случайных неоднородностей различных размерностей, так и для практического использования. Эффект асимметрии пиков приводит к тому, что закрытие щели в спектре с ростом среднеквадратичных флуктуаций двумерных неоднородностей происходит не традиционным путем сближения и симметричного уширения пиков функции Грина, характерным как для одномерных, так и для трехмерных неоднородностей, а за счет уширения и исчезновения только одного пика функции Грина, соответствующего высокочастотной границе запрещенной зоны. В работе показано, что этот эффект является прямым следствием закона сохранения энергии падающей и рассеянной волн. С другой стороны, эффект асимметрии пиков высокочастотной восприимчивости может быть использован практически при изучении неоднородностей в сверхрешетке спектральными методами. Экспериментальное наблюдение этого эффекта свидетельствовало бы о наличии в сверхрешетке именно двумерных неоднородностей.

Обращаем также внимание на удачную, судя по рис. 1, аппроксимацию сложной формулы для убывающей части корреляционной функции двумерных неоднородностей (выражения (6) и (11)) простым выражением (14), которое может быть использовано и при дальнейших исследованиях двумерных неоднородностей.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке гранта № 3818.2008.3 Президента РФ в рамках программы поддержки ведущих научных школ.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. B. Shellan, P. Agmon, and P. Yariv. *J. Opt. Soc. Amer.* **68**, 18 (1978).

2. Ю. Я. Платонов, Н. И. Полушкин, Н. Н. Салащенко, А. А. Фраерман, *ЖТФ* **57**, 2192 (1987).
3. J. M. Luck, *Phys. Rev. B* **39**, 5834 (1989).
4. S. Tamura and F. Nori, *Phys. Rev. B* **41**, 7941 (1990).
5. N. Nishiguchi, S. Tamura, and F. Nori, *Phys. Rev. B* **48**, 2515 (1993).
6. G. Pang and F. Pu, *Phys. Rev. B* **38**, 12649 (1988).
7. J. Yang and G. Pang, *J. Magn. Magn. Mat.* **87**, 157 (1990).
8. D. H. A. L. Anselmo, M. G. Cottam, and E. L. Albuquerque, *J. Appl. Phys.* **87**, 5774 (1999).
9. L. I. Deych, D. Zaslavsky, and A. A. Lisyansky, *Phys. Rev. E* **56**, 4780 (1997).
10. B. A. Van Tiggelen and A. Tip, *J. de Phys. I* **1**, 1145 (1991).
11. A. R. McGurn, K. T. Christensen, F. M. Mueller, and A. A. Maradudin, *Phys. Rev. B* **47**, 13120 (1993).
12. M. M. Sigalas, C. M. Soukoulis, C.-T. Chan, and D. Turner, *Phys. Rev. B* **53**, 8340 (1996).
13. V. A. Ignatchenko, R. S. Iskhakov, and Yu. I. Mankov, *J. Magn. Magn. Mat.* **140–144**, 1947 (1995).
14. А. Г. Фокин, Т. Д. Шермергор, *ЖЭТФ* **107**, 111 (1995).
15. А. В. Белинский, *УФН* **165**, 691 (1995).
16. B. Kaelin and L. R. Johnson, *J. Appl. Phys.* **84**, Part I, 5451; Part II, 5458 (1998).
17. V. A. Ignatchenko and Yu. I. Mankov, *Phys. Rev. B* **56**, 194 (1997).
18. В. А. Игнатченко, Ю. И. Маньков, А. В. Поздняков, *ЖЭТФ* **116**, 1335 (1999).
19. V. A. Ignatchenko, A. A. Maradudin, and A. V. Pozdnyaykov, *Phys. Met. Metallogr.* **91**, S69 (2001).
20. V. A. Ignatchenko, Yu. I. Mankov, and A. A. Maradudin, *Phys. Rev. B* **68**, 024209 (2003).
21. В. А. Игнатченко, Ю. И. Маньков, *ФТТ* **47**, 565 (2005).
22. В. А. Игнатченко, Ю. И. Маньков, *ЖЭТФ* **129**, 710 (2006).
23. V. A. Ignatchenko and Yu. I. Mankov, *Phys. Rev. B* **75**, 235422 (2007).
24. А. Н. Малахов, *ЖЭТФ* **30**, 884 (1956).
25. С. М. Рытов, *Введение в статистическую радиофизику*, ч. I, Наука, Москва (1976).
26. R. C. Bouwret, *Nuovo Cimento* **26**, 1 (1962); *Canad. J. Phys.* **40**, 782 (1962).