ЖЭТФ, 2008, том 134, вып. 4 (10), стр. 740–750

АНОМАЛЬНЫЙ ЭФФЕКТ ХОЛЛА В ФОНОННОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В ПАРАМАГНИТНЫХ ДИЭЛЕКТРИКАХ

Ю. Каган, Л. А. Максимов [*]

Российский научный центр «Курчатовский институт»
123182, Москва, Россия

Поступила в редакцию 25 апреля 2008 г.

Развивается теория фононного эффекта Холла при переносе тепла в парамагнитном диэлектрике, обнаруженном в работе [1]. Появление теплового потока в направлении, перпендикулярном магнитному полю и градиенту температуры, возникает благодаря взаимодействию магнитных ионов с осциллирующим кристаллическим полем. В кристаллах с произвольным фононным спектром это взаимодействие порождает эллиптическую поляризацию фононов. С другой стороны, градиент температуры при любом характере рассеяния формирует недиагональную по модам часть матрицы плотности фононов. К аномальному эффекту Холла приводит совокупное действие обоих факторов.

PACS: 66.70.-f, 72.15.Gd, 72.20.Pa

1. ВВЕДЕНИЕ

Интересное новое явление наблюдалось экспериментально в недавней работе [1]. Речь идет об обнаружении поперечного потока тепла в парамагнитном диэлектрике при наложении магнитного поля $\mathbf{B}$, перпендикулярного градиенту температуры ∇T. Эффект получил подтверждение в работе [2]. Геометрия эксперимента напоминает геометрию наблюдения эффекта Холла или эффекта Риги – Ледюка в металле. Однако в рассматриваемых диэлектриках заряженные носители полностью отсутствуют. Измерения проводятся хотя и при низкой температуре, но заведомо при $T \gg T_c$, где T_c — температура магнитного упорядочения. Поэтому отсутствуют коллективные спиновые возбуждения и связанный с ними перенос энергии. В отсутствие вращательных степеней свободы не возникают явления, аналогичные нечетному эффекту Зенфтлебена – Бинакера в молекулярных газах [3, 4]. В результате можно заключить, что поперечный поток тепла возникает за счет взаимодействия фононов с изолированными парамагнитными ионами, поляризованными внешним магнитным полем $\mathbf{B}$. Не случайно, что эффект был обнаружен в гранате $\mathrm{Tb_3Ga_5O_{12}}$, поскольку именно в этом веществе при $T < 10$ К теплосопротивление на два порядка выше, чем в других гранатах (см., например, работу [5]), что свидетельствует о большом спин-фононном взаимодействии. Поскольку роль магнитного поля сводится только к поляризации ионов, рассматриваемый эффект аналогичен аномальному эффекту Холла в ферромагнитных металлах при $T \geq T_c$, впервые установленному в работе [6]. Мы, следуя авторам работы [1], примем символически название «аномальный эффект Холла», рассматривая фононную теплопроводность в парамагнитных диэлектриках.

В настоящей работе развивается кинетическая теория переноса тепла в парамагнитном диэлектрике.

Согласно принципу симметрии кинетических коэффициентов в магнитном поле [4], справедливому при любом механизме формирования необратимого процесса, тензор теплопроводности

$$\varkappa^{ik} = \varkappa^{ik}_{even}(\mathbf{B}) + \varkappa^{ik}_{odd}(\mathbf{B})$$

есть сумма симметричного (четного по магнитному полю) тензора $\varkappa^{ik}_{even}(\mathbf{B})$ и антисимметричного (нечетного по полю) тензора $\varkappa^{ik}_{odd}(\mathbf{B})$, который характеризует поток тепла в поперечном к ∇T направлении. В аномальном эффекте Холла роль магнитного поля играет средняя намагниченность $\mathbf{M}$ атомов. Конечной целью настоящей работы является нахождение зависимости $\varkappa^{ik}_{odd}(\mathbf{M})$.

[*] E-mail: lam05@mail.ru

В ионном диэлектрике кристаллическое поле вызывает расщепление мультиплета парамагнитного иона. Колебание окружающих атомов, формирующих кристаллическое поле, с вовлечением переходов между мультиплетными уровнями определяет спин-фононное взаимодействие. Характерными для ионных диэлектриков являются двухфононные процессы [7, 8]. Обычно предполагается наличие крамерсовского дублета в основном состоянии и переходы через виртуальное возбуждение более высоких дублетов. При четном числе f-электронов, как в случае трехвалентного иона тербия, крамерсовское вырождение отсутствует. При этом, однако, типичным является появление квазидублетной структуры при расщеплении мультиплета в кристаллическом поле с расстоянием ε_{21} между уровнями нижнего дублета порядка нескольких градусов [7, 8]. Гранат $Tb_3Ga_5O_{12}$ является ярким примером подобного соединения. Расстояние до более высоких уровней мультиплета в подобных соединениях велико. Поэтому, анализируя задачу при достаточно низких температурах, можно ограничиться рассмотрением взаимодействия фононов только с нижним квазидублетом.

Из общих симметрийных соображений и прямого анализа [9, 10] следует, что гамильтониан спин-фононного взаимодействия в рассматриваемых условиях может быть представлен в виде

$$H_1 = \sum_{nm} g_{nm} \mathbf{s}_n \cdot [\mathbf{U}_m \times \mathbf{P}_m], \qquad (1)$$

где g_{nm} — константа взаимодействия, $\mathbf{s}_n$ — изоспин, характеризующий квазидублет, $\mathbf{U}_m$ и $\mathbf{P}_m$ — смещение и импульс осциллирующих атомов.

При низких температурах ($T_c < T \ll \Theta$, Θ — температура Дебая) колебания атомов в кристаллах определяются длинноволновыми акустическими фононами. В этих условиях все атомы в отдельной элементарной ячейке осциллируют с одинаковой амплитудой $\mathbf{U}_m$ и скоростью $\mathbf{V}_m$. Без потери общности можно для упрощения принять, что в элементарной ячейке находится один парамагнитный ион, взаимодействующий только с колеблющимися атомами в той же элементарной ячейке. Заменим g_{mn} на некоторое усредненное по атомам ячейки значение g. При этом в выражении (1) сумма по атомам ячейки сводится к вращательному моменту центра тяжести ячейки. Гамильтониан (1) принимает вид

$$H_1 = g \sum_{n} \mathbf{s}_n \cdot [\mathbf{U}_n \times \mathbf{P}_n]. \qquad (2)$$

Здесь $\mathbf{U}_n$ и $\mathbf{P}_n = m\mathbf{V}_n$ — смещение и импульс центра тяжести ячейки; m — суммарная масса атомов в ячейке.

Как показано ниже, взаимодействие (2) приводит к эллиптической перенормировке фононных векторов поляризации, при этом фононный спектр в линейном приближении по H_1 остается неизменным. Поперечный поток тепла в этих условиях возникает при наличии корреляции фононов разных акустических ветвей (α) с одинаковым волновым вектором $\mathbf{k}$. Найденное ниже решение кинетического уравнения демонстрирует наличие таких корреляций. Иными словами, в присутствии градиента температуры имеются недиагональные по модам матричные элементы фононной матрицы плотности $\rho_{\alpha\alpha'}(k)$ как при рассеянии фононов на парамагнитных ионах, так и при доминирующем характере ангармонического взаимодействия. Аномальный эффект Холла имеет место при произвольном фононном спектре парамагнитного диэлектрика.

В недавней работе [11] изложен вариант бездиссипативного теоретического описания аномального эффекта Холла в ионных диэлектриках по аналогии с этим эффектом в металлах в пределе $\omega\tau \gg 1$ (ω — частота ларморовской прецессии, τ — время релаксации), когда диссипативным характером поперечного потока тепла $j_\perp$ можно пренебречь. Авторы работы [11] ввели спин-фононное взаимодействие в форме, аналогичной (2), и рассмотрели упрощенную модель колебаний изотропного тела, в которой существуют две поперечные моды, вырожденные при всех направлениях волнового вектора. При этом собственные векторы поляризации нулевого приближения обладают круговой поляризацией, и обнаружить существование аномального эффекта Холла было бы проще. Однако в их работе содержится формальная ошибка, которая сводит на нет все результаты их теории. Дело в том, что в работе [11] в исходной формуле для потока тепла Харди (см. ниже формулу (32)) скорость осциллирующей частицы выражена через ее импульс и дрейфовый член (см. ниже выражения (7)), но при переходе ко вторичному квантованию не учтена нетривиальность разложения импульса частицы на нормальные колебания. Вследствие этого возникла ошибочная «дрейфовая» часть теплового потока, явно пропорциональная константе спин-фононного взаимодействия (формула (7) в [11]). Если бы авторы работы [11] использовали переход ко вторичному квантованию непосредственно для скорости, то пришли бы к нашей формуле для теплового потока (см. ниже (33)), которая содержит константу спин-фононного взаимодействия только неявно через перенормировку векторов поляризации. Подчеркнем, что при использовании правильного выражения для теплового потока в модели изотропного тела им бы не удалось избежать решения кинетического уравнения.

2. АКУСТИЧЕСКИЕ ФОНОНЫ С УЧЕТОМ СПИН-ФОНОННОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Найдем перенормировку длинноволновых акустических фононов, обусловленную спин-фононным взаимодействием (1). На масштабе длины волны акустических фононов происходит самоусреднение намагниченности, и оператор $\mathbf{s}_n$ можно заменить на среднее по кристаллу значение $\mathbf{s} \parallel \mathbf{M} = \langle \mathbf{M}_n \rangle$.

Гамильтониан фононов в гармоническом приближении имеет стандартный вид

$$H_0 = \sum_n \frac{\mathbf{P}_n^2}{2m} - \frac{m}{2} \sum_{nn'} D_{nn'}^{ab} U_n^a U_{n'}^b. \tag{3}$$

Динамическая матрица обладает свойствами

$$D_{nn'}^{ab} = D_{n'n}^{ab} = D_{nn'}^{ba}, \quad \sum_{n'} D_{nn'}^{ab} = 0. \tag{4}$$

Полный гамильтониан $H = H_0 + H_1$ представим в виде

$$H = \sum_n h_n, \tag{5}$$

где

$$h_n = \frac{\mathbf{P}_n^2}{2m} - \frac{m}{2} \sum_{n'} D_{nn'}^{ab} U_n^a U_{n'}^b + \mathbf{G} \cdot [\mathbf{U}_n \times \mathbf{P}_n] \tag{6}$$

и введено обозначение $\mathbf{G} = g\mathbf{s}$. Отсюда находим

$$\begin{aligned} \frac{dU_n^a}{dt} &= V_n^a = \frac{\partial H}{\partial P_n^a} = P_n^a/m + e_{abc} G^b U_n^c, \\ \frac{dP_n^a}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial U_n^a} = \sum_{n'} m D_{nn'}^{ab} U_{n'}^b + e_{abc} G^b P_n^c, \end{aligned} \tag{7}$$

где e_{abc} — единичный тензор третьего ранга, антисимметричный по всем трем индексам. Здесь и в дальнейшем спин-фононное взаимодействие будем учитывать в линейном приближении. Тогда в последнем члене второго уравнения можно провести замену $P_n^c \to m V_n^c$. В результате для уравнения колебаний находим

$$\ddot{U}_n^a = \sum_{n'} D_{nn'}^{ab} (U_{n'}^b - U_n^b) + 2 e_{abc} G^b \dot{U}_n^c. \tag{8}$$

В импульсном представлении это уравнение имеет вид

$$\omega_{k\alpha}^2 u_{k\alpha}^a = \tilde{D}_k^{ab} u_{k\alpha}^b, \tag{9}$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{D}_k^{ab} &= D_k^{ab} - 2i\omega e_{abc} G^c, \\ D_k^{ab} &= \sum_R D_R^{ab} (1 - e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}}), \end{aligned} \tag{10}$$

$$\mathbf{u}_{k\alpha}^* \cdot \mathbf{u}_{k\alpha'} = \delta_{\alpha\alpha'}, \tag{11}$$

$\mathbf{R}$ — координата узла решетки, $\mathbf{u}_{k\alpha}$ — нормированный вектор поляризации. Обратим внимание, что мнимая часть величины $\tilde{D}_k^{ab}$ есть антисимметричный тензор, нечетный по $\mathbf{G}$.

В нулевом порядке по спин-фононному взаимодействию решение уравнения (9) определяет закон дисперсии $\omega_{k\alpha}$ для трех акустических ветвей и, соответственно, трех ортонормированных векторов поляризации $\mathbf{e}_{k\alpha}$, которые могут быть выбраны вещественными.

В реальном кристалле спектр акустических фононов нулевого приближения почти при всех $\mathbf{k}$ невырожденный [12]. Предполагая спектр невырожденным, в линейном по спин-фононному взаимодействию приближении перенормированный вектор поляризации представим в виде

$$u_\alpha^a = e_\alpha^a + \delta e_\alpha^a \tag{12}$$

и перепишем уравнение (9) в форме (здесь и в дальнейшем в очевидных случаях для краткости опускаем указание на зависимость от $\mathbf{k}$)

$$\begin{aligned} &\left(\omega_\alpha^2 + 2\omega_\alpha \delta\omega_\alpha\right) \left(e_\alpha^a + \delta e_\alpha^a\right) = \\ &\qquad = D^{ab} \left(e_\alpha^b + \delta e_\alpha^b\right) - i \left(2\omega_\alpha e_{abc} G^c\right) e_\alpha^b. \end{aligned} \tag{13}$$

Вещественная часть этого уравнения дает $\delta\omega_\alpha = 0$, т. е. спектр и групповая скорость $c_{k\alpha} = \partial\omega_{k\alpha}/\partial k$ фононов не перенормируются. Мнимая часть уравнения (13) определяет перенормировку вектора поляризации:

$$\left(\omega_\alpha^2 \delta^{ab} - D^{ab}\right) \delta e_\alpha^b = -i \left(2\omega_\alpha e_{abc} G^c\right) e_\alpha^b.$$

Ищем решение этого уравнения в виде

$$\delta e_\alpha^b = 2i\omega_\alpha \sum_{\alpha' (\alpha' \neq \alpha)} K_{\alpha\alpha'} e_{\alpha'}^b. \tag{14}$$

Получаем

$$\sum_{\alpha'} \left(\omega_\alpha^2 - \omega_{\alpha'}^2\right) K_{\alpha\alpha'} e_{\alpha'}^a = -e_{abc} G^c e_\alpha^b.$$

Умножая последнее уравнение на один из векторов поляризации и используя их ортонормированность, $\mathbf{e}_{k\alpha}\cdot\mathbf{e}_{k\alpha'}=\delta_{\alpha\alpha'}$, находим

$$K_{\alpha\alpha'}(k)=K_{\alpha'\alpha}(k)=\frac{[\mathbf{e}_{k\alpha}\times\mathbf{e}_{k\alpha'}]\cdot\mathbf{G}}{\omega_{k\alpha}^2-\omega_{k\alpha'}^2},\quad \alpha'\neq\alpha. \tag{15}$$

Таким образом, из выражения (14) следует, что в результате спин-фононного взаимодействия вещественный вектор $\mathbf{e}_{k\alpha}$ приобретает ортогональную мнимую добавку, т. е. становится эллиптически поляризованным.

Важно для дальнейшего проследить свойства векторного произведения векторов поляризации, $\mathbf{e}_\alpha\times\mathbf{e}_{\alpha'}$, рассматривая длинноволновые акустические колебания. В этом приближении

$$D_k^{ab}=\frac{1}{2}\sum_R D_R^{ab}\left(\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}\right)^2=A^{abcd}k_ck_d. \tag{16}$$

В частности, динамическая матрица кубического кристалла описывается тремя параметрами:

$$D_k^{ab}=A_1\delta^{ab}k^2+A_2\delta^{ab}k_a^2+A_3k_ak_b \tag{17}$$

(в изотропной модели $A_2=0$). В таком кристалле (а также в тетрагональном и ромбическом) для недиагональных элементов динамической матрицы имеем [12]

$$D_k^{ab}\propto k_ak_b, \tag{18}$$

и, следовательно, они меняют знак при изменении знака k_a или k_b, т. е. при отражении от соответствующей плоскости в обратном пространстве. Выделим из дисперсионного уравнения (9) (без учета спин-фононного взаимодействия) недиагональные члены:

$$\left(\omega_{k\alpha}^2-D_k^{aa}\right)e_{k\alpha}^a=\sum_{b\neq a}D_k^{ab}e_{k\alpha}^b. \tag{19}$$

Из инвариантности величин D_k^{ab} и $\omega_{k\alpha}^2$ относительно инверсии следует, что векторы поляризации являются все нечетными (или все четными) функциями $\mathbf{k}$. В случае, когда выполняется соотношение (18), имеется дополнительное свойство: при изменении знака одной проекции k_a (при отражении от плоскости, перпендикулярной оси кристаллической решетки $\mathbf{a}$) недиагональные элементы D_k^{ab} меняют знак, и одновременно, как следует из (19), изменяется относительный знак соответствующей компоненты вектора поляризации. Это свойство можно выразить соотношением

$$e_{k\alpha}^a=\overline{e}_\alpha^a(k)\,\mathrm{sign}\,k_a, \tag{20}$$

где единичный вектор $\overline{e}_\alpha^a(k)$ инвариантен относительно отражения. Используя это соотношение, находим, что векторное произведение поляризаций двух мод меняет знак при отражении:

$$\left[\mathbf{e}_\alpha\times\mathbf{e}_{\alpha'}\right]^z=\mathrm{sign}\,k_x\,\mathrm{sign}\,k_y\left[\overline{e}_\alpha\times\overline{e}_{\alpha'}\right]^z. \tag{21}$$

В представлении вторичного квантования гамильтониан перенормированных за счет спин-фононного взаимодействия фононов сохраняет свой вид:

$$H_0=\sum\omega_{k\alpha}a_{k\alpha}^\dagger a_{k\alpha},$$

но операторы рождения $a_{k\alpha}^\dagger$ и поглощения $a_{k\alpha}$ фононов относятся к перенормированным фононам.

Аналогично, форма разложений по собственным колебаниям векторов смещения и их производной по времени не меняется:

$$U_i^a=\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{k\alpha}\sqrt{\frac{1}{2m\omega_{k\alpha}}}\times\exp\left(ikR_i\right)\left(u_{k\alpha}^aa_{k\alpha}+u_{-k\alpha}^{a*}a_{-k\alpha}^\dagger\right), \tag{22}$$

$$V_i^a=\frac{\partial U_i^a}{\partial t}=-i\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{k\alpha}\sqrt{\frac{\omega_{k\alpha}}{2m}}\times\exp\left(ikR_i\right)\left(u_{k\alpha}^aa_{k\alpha}-u_{-k\alpha}^{a*}a_{-k\alpha}^\dagger\right), \tag{23}$$

где операторы поглощения и рождения соответствуют перенормированным фононам. Зависимость от спин-фононного взаимодействия входит неявно только в перенормировку векторов поляризации $u_{k\alpha}^a$. Обратим внимание, что при включении этого взаимодействия разложение по нормальным колебаниям сохраняет свою форму (23) именно для скорости атома, а не для импульса $\mathbf{P}_i$, выражение для которого при учете вторичного квантования имеет громоздкий вид (см. (7)).

3. ПЛОТНОСТЬ ПОТОКА ЭНЕРГИИ

Как уже было сказано выше, спектр и скорость фононов в линейном приближении не зависят от спин-фононного взаимодействия. Но вид плотности потока тепловой энергии кристалла, j^γ, при включении спин-фононного взаимодействия в принципе может измениться. Поэтому имеет смысл воспроизвести вывод Харди [13, 14]. Оператор j^γ найдем из уравнения непрерывности, выражающего локальный закон сохранения энергии:

$$\frac{\partial H(x)}{\partial t}=-\nabla_\gamma j^\gamma(x). \tag{24}$$

Гамильтониану H (5), (6) соответствует следующая плотность энергии фононов в точке x:

$$H(x) = \sum_i \delta(x - R_i) h_i. \qquad (25)$$

Здесь $\delta(x - R_i)$ — любая гладкая функция, локализованная в физически малой области около узла R_i (на размерах, малых по сравнению с характерными длинами звуковых волн, но больших по сравнению с радиусом взаимодействия атомов) и обладающая всеми свойствами обычной δ-функции. В частности, плотность энергии кристалла, средняя по его объему V, равна

$$\frac{1}{V}\int dx\, H(x) = \frac{H}{V}.$$

Для длинных волн координата узла x_i — непрерывная переменная. Порядок сомножителей в гамильтониане $H(x)$ несуществен, поскольку координаты точки x и узла R_i коммутируют с векторами смещения $\mathbf{U}_i$ и импульсами $\mathbf{P}_i$ ионов.

Скорость изменения плотности энергии равна

$$\frac{\partial H(x)}{\partial t} = -i[H(x), H] = \\ = -\frac{i}{2}\sum_{ij}\left[\delta(x - R_i) - \delta(x - R_j)\right][h_i, h_j]. \qquad (26)$$

Так как коммутатор $[h_i, h_j]$ вне радиуса взаимодействия исчезает, разность локализованных в разных узлах квази δ-функций можно разложить по степеням расстояния между ионами:

$$\delta(x - R_i) - \delta(x - R_j) = -R_{ij}\frac{\partial}{\partial x}\delta(x - R_j), \\ R_{ij} = R_i - R_j, \qquad (27)$$

и привести правую часть выражения (26) к форме дивергенции:

$$\frac{\partial H(x)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{i}{2}\sum_{i\neq j}[h_i, h_j]R_{ij}\delta(x - R_j)\right).$$

Сравнивая правые части соотношений (24) и (26), получаем выражение

$$j^\gamma(x) = -\frac{i}{2}\sum_{i\neq j} R_{ij}[h_i, h_j]\delta(x - R_j). \qquad (28)$$

В задачи, линейные по неоднородности, входит средняя по объему плотность потока энергии

$$j^\gamma = \frac{1}{V}\int d^3x\, j_H^\gamma(x) = -\frac{i}{2V}\sum_{i\neq j} R_{ij}[h_i, h_j]. \qquad (29)$$

Гамильтониан (6) узла с учетом соотношений (7) в линейном по спин-фононному взаимодействию приближении можно записать в виде

$$h_n = \frac{m\mathbf{V}_n^2}{2} - \frac{m}{2}\sum_{n'} D_{nn'}^{ab} U_n^a U_{n'}^b, \qquad (30)$$

содержащем это взаимодействие только неявно. Учтем, что в силу линейной связи (7) между скоростью частиц и их импульсом включение спин-фононного взаимодействия не меняет значений коммутатора

$$\left[U_i^a, V_j^b\right] = \frac{1}{m}\left[U_i^a, P_j^b\right] = \frac{i}{m}\delta^{ab}\delta_{ij}$$

и коммутатора

$$[h_i, h_j] = \frac{i}{2} m D_{ij}^{ab}\{V_i^a U_j^b - V_j^a U_i^b\} \qquad (31)$$

в выражении (29). Отсюда получаем формулу оператора плотности потока энергии фононов в координатном представлении:

$$j^c = \frac{m}{2V}\sum_{i\neq j} R_{ij}^c D_{ij}^{ab}\left(U_i^a V_j^b\right). \qquad (32)$$

Это выражение формально имеет в точности тот же вид, что и в пионерской работе [13], но величина V_j^b отличается принципиально от импульса иона, деленного на массу (см. формулу (7)). Сохранение вида выражений (30), (32) при включении спин-фононного взаимодействия обусловлено линейностью связи V_j^b и P_j^b.

Представим оператор (32) как оператор потока энергии фононов, воспользовавшись выражениями (22) и (23) для U_i^a и V_j^b. Фактически, переход в соотношении (32) к импульсному представлению сводится к замене $R_{ij}^c \to i\partial/\partial k^c$. Оператор (32) принимает вид

$$j^c = -\frac{1}{4V}\,\mathrm{Re}\left[\sum_{k\alpha\alpha'}\sqrt{\frac{\omega_{k\alpha'}}{\omega_{k\alpha}}}\left(\nabla_k^c D_k^{ab}\right)\times \right. \\ \times\left(u_{k\alpha}^a a_{k\alpha} + u_{-k\alpha}^{a*} a_{-k\alpha}^\dagger\right)\times \\ \left.\times\left(u_{-k\alpha'}^b a_{-k\alpha'} - u_{k\alpha'}^{b*} a_{k\alpha'}^\dagger\right)\right]. \qquad (33)$$

Мы выписываем знак взятия вещественной части, чтобы в дальнейшем не доказывать обращения мнимой части интеграла в нуль. Усреднив этот оператор по состоянию системы, отбросим аномальные средние $\langle a_{k\alpha}a_{-k\alpha'}\rangle$ и $\left\langle a_{-k\alpha'}^\dagger a_{k\alpha}^\dagger\right\rangle$. После изменения обозначений под знаком суммы приходим к следующему выражению для плотности потока тепла:

$$\langle j^c \rangle = \frac{1}{4V}\,\mathrm{Re}\left[\sum_{k\alpha\alpha'}\left(\sqrt{\frac{\omega_{k\alpha}}{\omega_{k\alpha'}}}+\sqrt{\frac{\omega_{k\alpha'}}{\omega_{k\alpha}}}\right)\times\right.$$
$$\left.\times\left(\nabla_k^c D_k^{ab}\right) u_{k\alpha}^{a*} u_{k\alpha'}^b \rho_{\alpha\alpha'}(k)\right], \quad (34)$$

где введена матрица плотности фононов $\rho_{\alpha\alpha'}(k) = \left\langle a_{k\alpha}^\dagger a_{k\alpha'}\right\rangle$.

В нулевом приближении по спин-фононному взаимодействию векторы поляризации вещественны, и выражение в квадратных скобках вещественно и симметрично по модам. Стационарная плотность потока определяется вещественной частью стационарной матрицы плотности, функцией распределения фононов $\rho_{\alpha\alpha}(k) = n_{k\alpha}$. Диагональная по модам часть выражения (34) с помощью соотношения

$$\frac{\partial \omega_{k\alpha}^2}{\partial k^c} = \left(\nabla_k^c D_k^{ab}\right) e_{k\alpha}^a e_{k\alpha}^b = 2\omega_{k\alpha} c_{k\alpha}^c \quad (35)$$

($c_{k\alpha}^c = \nabla_k^c \omega_{k\alpha}$) принимают обычный вид потока энергии газа фононов:

$$\langle j_0^c \rangle = \frac{1}{V}\sum_{k\alpha} c_{k\alpha}\omega_{k\alpha} n_{k\alpha}. \quad (36)$$

Линейная по спин-фононному взаимодействию часть $\langle \delta j^c\rangle$ потока тепла (34) обусловлена перенормировкой (14) векторов поляризаций (12):

$$\delta\left(u_{k\alpha}^{a*} u_{k\alpha'}^b\right) = -\left(\delta e_{k\alpha}^a\right) e_{k\alpha'}^b + e_{k\alpha}^a\left(\delta e_{k\alpha'}^b\right).$$

Диагональный по модам член вклада в $\langle \delta j^c\rangle$ не дает, а недиагональные члены — чисто мнимые (см. (15)):

$$\delta\left(u_{k\alpha}^{a*} u_{k\alpha'}^b\right) = 2iK_{\alpha\alpha'}(-\omega_{k\alpha} e_{k\alpha'}^a e_{k\alpha'}^b + \omega_{k\alpha'} e_{k\alpha}^a e_{k\alpha}^b) +$$
$$+ 2i(-\omega_{k\alpha} K_{\alpha\alpha''} e_{k\alpha''}^a e_{k\alpha'}^b +$$
$$+ \omega_{k\alpha'} K_{\alpha'\alpha''} e_{k\alpha}^a e_{k\alpha''}^b)_{\alpha''\neq\alpha\alpha'}. \quad (37)$$

Следовательно, величина $\langle \delta j^c\rangle$ определяется мнимой частью недиагональных по модам элементов $\rho_{\alpha\alpha'}(k)$. В выражении (37) ключевую роль играет первая строка, а громоздким вкладом второй строки будем пренебрегать.

Перенормировка потока тепла $\langle \delta j^c\rangle$ может быть представлена в виде

$$\langle \delta j^c\rangle = j_{12}^c + j_{23}^c + j_{31}^c. \quad (38)$$

Приняв во внимание соотношения (35) и (37), находим

$$\langle j_{12}^c \rangle = \frac{2}{V}\sum_k\left(\sqrt{\frac{\omega_{k1}}{\omega_{k2}}}+\sqrt{\frac{\omega_{k2}}{\omega_{k1}}}\right)\times$$
$$\times K_{12}(k)\omega_{k1}\omega_{k2}(c_{k2}^c - c_{k1}^c)\,\mathrm{Im}\,\rho_{12}(k) \quad (39)$$

и аналогично для других членов в (38).

Пусть магнитное поле и магнитный момент $\mathbf{M}$ направлены по оси z, а градиент температуры ∇T — по оси x. Тогда поперечный поток тепла (вдоль оси y) можно представить в виде

$$\langle j_{12}^y \rangle = -\varkappa_{12}^{yx}\left(\nabla T\right)_x. \quad (40)$$

Подстановка в выражение (39) матрицы ρ_{12} в форме линейного отклика,

$$\rho_{12}(k) = -iA_{12}^x(k)\left(\nabla T\right)_x, \quad (41)$$

дает

$$\varkappa_{12}^{yx} = \frac{2}{V}\sum_k\left(\sqrt{\frac{\omega_{k1}}{\omega_{k2}}}+\sqrt{\frac{\omega_{k2}}{\omega_{k1}}}\right)\times$$
$$\times K_{12}(k)\omega_{k1}\omega_{k2}(c_{k2}^y - c_{k1}^y)\,\mathrm{Re}\,A_{12}^x(k), \quad (42)$$

где функция $K_{12}(k)$ определена согласно (15). Поскольку $K_{12}(k) \propto G$, для вычисления $\varkappa_{12}^{yx}$ в линейном приближении по спин-фононному взаимодействию достаточно определить $A_{12}^x(k)$ в нулевом приближении. Суммарная величина аномального эффекта Холла равна

$$\varkappa^{yx} = \varkappa_{12}^{yx} + \varkappa_{23}^{yx} + \varkappa_{31}^{yx}. \quad (43)$$

4. МАТРИЦА ПЛОТНОСТИ ПРИ РЕЗОНАНСНОМ РАССЕЯНИИ

Построим кинетическое уравнение для одночастичной матрицы плотности $\rho_{\alpha\alpha'}(k) = \left\langle a_{\mathbf{k}\alpha}^\dagger a_{\mathbf{k}\alpha'}\right\rangle$, диагональной по импульсам и недиагональной по номеру ветви α. Выпишем уравнение эволюции элемента одночастичной матрицы плотности:

$$i\frac{\partial}{\partial t}\left\langle a_p^\dagger a_q\right\rangle = \left\langle\left[a_p^\dagger a_q, H_0\right]\right\rangle + \left\langle\left[a_p^\dagger a_q, H_2\right]\right\rangle. \quad (44)$$

Здесь H_0 — гамильтониан фононов и подсистемы невзаимодействующих магнитных ионов, H_2 — гамильтониан взаимодействия этих подсистем и введены обозначения $p = \mathbf{k}\alpha$, $q = \mathbf{k}\alpha'$ для квантовых чисел. В частотном представлении это уравнение имеет вид

$$(\omega + \omega_p - \omega_q)\left\langle a_p^\dagger a_q\right\rangle = iJ_{pq}. \quad (45)$$

В стационарном случае имеем

$$\rho_{\alpha\alpha'}(k) = \frac{iJ_{pq}}{\omega_p - \omega_q}. \quad (46)$$

При этом вклад в выражение (42) дает вещественная часть J_{pq}.

Задача свелась к вычислению коммутатора

$$iJ_{pq} = \left\langle \left[a_p^\dagger a_q, H_2\right]\right\rangle. \qquad (47)$$

Оператор J_{pq} играет роль обобщенного интеграла столкновений. При малой величине H_2 можно найти замкнутое выражение для J_{pq}, выписав следующее уравнение цепочки Боголюбова и выразив возникающие корреляторы через элементы одночастичной матрицы плотности [14]. Существенно, что при этом в коммутаторе (47) можно пренебречь недиагональными элементами $\rho_{\alpha\alpha'}$ по сравнению с диагональными элементами n_p. Тем самым в этих условиях формула (46) выражает $\rho_{\alpha\alpha'}$ как функционал от n_p.

При низких температурах основной механизм релаксации фононов обусловлен резонансным рассеянием фононов на ионах с низколежащими уровнями. Рассмотрим рассеяние фононов на парамагнитных ионах, обладающих двумя низколежащими состояниями, $|1\rangle$ и $|2\rangle$, с расстоянием между уровнями $\varepsilon_{21} = \varepsilon_2 - \varepsilon_1$ (квазидублет). Рассеяние фононов на ионах есть процесс, при котором начальный фонон поглощается и переводит атом с одного уровня на другой с последующим испусканием второго фонона и возвратом на начальное состояние квазидублета или вначале испускается второй фонон, а затем поглощается начальный фонон. При таких процессах состояние иона не меняется и рассеяние является упругим: $\omega_i = \omega_f$. Но при рассеянии может измениться мода фонона, и тогда конечный импульс фонона будет отличен от начального не только по направлению, но и по величине.

Эффективный гамильтониан взаимодействия фононов с ионами представим в виде

$$H_2 = \frac{1}{N}\sum_{fgna} \exp\left[i(-\mathbf{f}+\mathbf{g})\cdot\mathbf{r}_n\right] H_{fg}^{aa} a_f^\dagger Z_n^{(a)} a_g. \qquad (48)$$

Здесь N — число узлов решетки, $Z_n^{(a)} = |an\rangle\langle an|$ — проекционный оператор на уровень a квазидублета, n — номер ячейки и обозначено $f = \mathbf{f}\alpha$, $g = \mathbf{g}\alpha'$. Гамильтониан такого вида возникает, если рассматривать рассеяние как процесс второго порядка, образованный парой однофононных процессов [9, 10]. Флуктуации заполнения уровней не являются независимыми $\left(Z_n^{(1)} + Z_n^{(2)} = 1\right)$. Поэтому гамильтониан (48) эквивалентен гамильтониану

$$H_2 = \frac{1}{N}\sum_{fgn} \exp\left[i(-\mathbf{f}+\mathbf{g})\cdot\mathbf{r}_n\right] B_{fg}\xi_n a_f^\dagger a_g, \qquad B_{fg} = H_{fg}^{11} - H_{fg}^{22}. \qquad (49)$$

Однородная, т. е. не зависящая от n, часть гамильтониана дает несущественную перенормировку фононных мод и может быть опущена. По этой причине оператор $Z_n^{(1)}$ заменен в выражении (49) на $\xi_n = Z_n^{(1)} - P_1$, где $P_1 = \left\langle Z_n^{(1)}\right\rangle$ — среднее число заполнения нижнего уровня. Поскольку $Z_n^{(1)} Z_{n'}^{(1)} = \delta_{nn'}$,

$$\langle \xi_n \xi_{n'}\rangle = \delta_{nn'} P_1 (1 - P_1). \qquad (50)$$

Таким образом, рассеяние на квазидублете сведено к рассеянию фонона на флуктуациях заполнения нижнего уровня. В случае резонансного рассеяния с гамильтонианом (49) имеем

$$\begin{aligned}\left\langle \left[a_p^\dagger a_q, H_2\right]\right\rangle &= \\ &= \frac{1}{N}\sum_{q\neq g,n} \exp\left[i(-\mathbf{q}+\mathbf{g})\cdot\mathbf{r}_n\right] B_{qg}\left\langle a_p^\dagger \xi_n a_g\right\rangle - \\ &- \frac{1}{N}\sum_{f\neq p,n,a} \exp\left[i(-\mathbf{f}+\mathbf{p})\cdot\mathbf{r}_n\right] B_{fp}\left\langle a_f^\dagger \xi_n a_q\right\rangle.\end{aligned}$$

Аналогичную (45) форму имеет уравнение для 3-коррелятора

$$\begin{aligned}(\omega + \omega_p - \omega_q)\left\langle a_p^\dagger \xi_n a_q\right\rangle &= \\ &= \frac{1}{N}\sum_{q\neq g,n'} \exp\left[i(-\mathbf{p}+\mathbf{g})\cdot\mathbf{r}_{n'}\right] B_{qg}\left\langle a_p^\dagger \xi_n \xi_{n'} a_g\right\rangle - \\ &- \frac{1}{N}\sum_{f\neq p,n'} \exp\left[i(-\mathbf{f}+\mathbf{p})\cdot\mathbf{r}_{n'}\right] B_{fp}\left\langle a_f^\dagger \xi_n \xi_{n'} a_q\right\rangle.\end{aligned}$$

Здесь мы пренебрегаем ε_{21}, предполагая $\varepsilon_{21} < T$. Для получения выражения, играющего роль интеграла столкновений, квадратичного по амплитудам рассеяния, будем пренебрегать корреляциями состояний фононов и парамагнитных ионов в 4-корреляторах (см. (50)):

$$\left\langle a_p^\dagger \xi_n \xi_{n'} a_g\right\rangle = \delta_{pq}\delta_{nn'} P_1 (1 - P_1) n_p.$$

В результате такого расцепления получаем простое выражение

$$(\omega + \omega_p - \omega_q)\left\langle a_p^\dagger \xi_n a_q\right\rangle = \frac{1}{N} \times \exp\left[i(\mathbf{p}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{r}_n\right] B_{qp} P_1 (1 - P_1)(n_p - n_q). \qquad (51)$$

Воспользуемся формулой

$$\frac{1}{x + i\delta} = P\frac{1}{x} - i\pi\delta(x).$$

Тогда в стационарном случае ($\omega \to +i0$)

$$\left\langle a_p^\dagger \xi_n^a a_q\right\rangle = -i\pi \exp\left[i(\mathbf{p}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{r}_n\right] \times \delta(\omega_p - \omega_q) B_{qp} P_1 (1 - P_1)(n_p - n_q). \qquad (52)$$

Подставим (52) в уравнение (45) и после суммирования по ячейкам получим

$$iJ_{pq} = -\frac{i\pi}{N}\sum_g P_1\left(1-P_1\right)B_{qg}B_{gp}\times$$
$$\times[(n_p-n_g)\delta\left(\omega_g-\omega_p\right)+(n_q-n_g)\delta\left(\omega_g-\omega_q\right)]. \quad (53)$$

Диагональная часть матрицы J_{pq} есть обычный интеграл столкновений при упругом рассеянии:

$$J_{pp} = -\frac{2\pi}{N}\sum_g P_1\left(1-P_1\right)\left|B_{gp}\right|^2\left(n_p-n_g\right)\delta\left(\omega_g-\omega_p\right).$$

Недиагональные по модам фононов элементы эрмитовой матрицы J_{pq} (53) отличаются от обычного интеграла столкновений главным образом тем, что вместо квадрата модуля амплитуды рассеяния стоит произведение амплитуд.

Равновесное распределение $N_p = N\left(\omega_p\right)$ обращает матрицу J_{pq} в нуль, и в выражении (53) неравновесное распределение n_p можно заменить на разность, $f_p = n_p - N_p$. В тау-приближении пренебрегаем ролью обратного рассеяния из состояний g. Тогда имеющая физическое значение вещественная часть J_{pq} (см. соотношения (41), (46)) принимает вид

$$J_{pq} = -\frac{1}{2}\Omega_{pq}\left(\omega_p\right)f_p - \frac{1}{2}\Omega_{qp}\left(\omega_q\right)f_q, \quad (54)$$

где

$$\Omega_{pq}\left(\omega_p\right) =$$
$$= \frac{2\pi}{N}\,\mathrm{Re}\sum_g P_1\left(1-P_1\right)B_{qg}B_{gp}\delta\left(\omega_g-\omega_p\right). \quad (55)$$

В выражение (54) входят две частоты релаксации, соответствующие затуханию «левой» и «правой» ветвей, причем коэффициент $\Omega_{pq}\left(\omega_p\right)$ энергетически связан с «левым» фононом ($p = \mathbf{k}\alpha$), а $\Omega_{qp}\left(\omega_q\right)$ — с «правым» ($q = \mathbf{k}\alpha'$). В (55) суммирование идет по всем состояниям рассеянных фононов ($g = \mathbf{k}''\alpha''$), удовлетворяющим условию упругости ($\omega_g = \omega_p$).

Вид неравновесной функции распределения фононов $f_{k\alpha}$ определим из решения задачи продольной теплопроводности в тау-приближении:

$$f_p = -\frac{1}{\Omega_{pp}}\left(c_p\nabla\right)N_p =$$
$$= -\frac{1}{\Omega_{pp}T^2}N_p\left(1+N_p\right)\left(\omega_p c_p\right)\nabla T. \quad (56)$$

Как следует из выражения (55), в общем случае все три коэффициента, Ω_{pq}, Ω_{qp}, Ω_{pp}, имеют одинаковый порядок величины.

Используя формулы (41), (46), (54) и (56), находим

$$A^x_{pq} = \frac{F_{\alpha\alpha'}(\mathbf{k})c^x_\alpha(\mathbf{k}) + F_{\alpha'\alpha}(\mathbf{k})c^x_{\alpha'}(\mathbf{k})}{\omega_{k\alpha}-\omega_{k\alpha'}},$$
$$F_{\alpha\alpha'}(\mathbf{k}) = -\frac{\omega_{k\alpha}\Omega_{pq}}{2T^2\Omega_{pp}}N_{k\alpha}\left(1+N_{k\alpha}\right). \quad (57)$$

Подставляя эти формулы в (42), получим поперечную компоненту $\varkappa^{yx}_{12}$, которая выражается через отношение частот релаксации Ω_{pq}/Ω_{pp}.

5. АНГАРМОНИЧЕСКОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ

Теперь рассмотрим случай, когда основным механизмом релаксации фононов является ангармонизм третьего порядка, который описывается гамильтонианом

$$H_2 = \frac{1}{3!}\sum_{1,2,3}V_{1,2,3}b_1b_2b_3, \quad b_p = a_p + a^\dagger_{-p} \quad (58)$$

($p = \mathbf{p},\alpha$; $-p = -\mathbf{p},\alpha$). Здесь суммирование идет с условием сохранения квазиимпульса,

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3 = \mathbf{B}, \quad (59)$$

где $\mathbf{B}$ — любой из векторов обратной решетки.

Гамильтониану (58) отвечает обобщенный интеграл столкновений (см. (47))

$$iJ_{pq} = \left\langle[a^\dagger_p a_q, H_2]\right\rangle =$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{1,2}[V_{1,2,-q}\left\langle a^\dagger_p c_1c_2\right\rangle - V_{1,2,p}\left\langle c_1c_2a_q\right\rangle]. \quad (60)$$

В квадратичном приближении по амплитудам можно опустить корреляторы типа $\langle a_1a_2a_3\rangle$ и $\left\langle a^\dagger_1a^\dagger_2a^\dagger_3\right\rangle$. Получаем

$$iJ_{pq} = \frac{1}{2}\sum_{1,2}\left[V_{1,2,-q}\left(\left\langle a^\dagger_p a_1a_2\right\rangle + 2\left\langle a^\dagger_p a^\dagger_{-1}a_2\right\rangle\right) - \right.$$
$$\left. - V_{1,2,p}\left(2\left\langle a^\dagger_{-1}a_2a_q\right\rangle + \left\langle a^\dagger_{-1}a^\dagger_{-2}a_q\right\rangle\right)\right]. \quad (61)$$

Уравнения, определяющие 3-корреляторы, имеют форму, аналогичную (45):

$$\left(\omega+\omega_c-\omega_a-\omega_b\right)\left\langle a^\dagger_c a_b a_a\right\rangle = \left\langle[a^\dagger_c a_b a_a, H_2]\right\rangle. \quad (62)$$

Из них в приближении среднего поля находим

$$\left\langle a^\dagger_c a_b a_a\right\rangle = -i\pi\delta(\omega_c-\omega_a-\omega_b)\times$$
$$\times V_{c,-b,-a}[n_c(1+n_b)(1+n_a)-(1+n_c)n_bn_a]. \quad (63)$$

Корреляторы $\left\langle a_a^\dagger a_b^\dagger a_c \right\rangle$ получаются отсюда эрмитовым сопряжением. Эти корреляторы в термодинамическом равновесии тождественно равны нулю. Если игнорировать процессы переброса, выражения в квадратных скобках обращаются в нуль после подстановки распределения фононов, которое как целое движется со скоростью $\mathbf{V}$. Как известно [4], таким свойством обладает обычный интеграл трехфононных столкновений, если в нем учитываются только «нормальные» процессы с сохранением импульса (когда в (59) $\mathbf{B} = 0$). Следовательно, и в недиагональных элементах интеграла столкновений (61) отличный от нуля результат дают лишь процессы с перебросом, т. е. члены, в которых $\mathbf{B} \neq 0$. При низких температурах, когда внешний фонон (p или q) имеет низкую частоту ($\omega_p, \omega_q \sim T \ll \Theta$) в интеграле (61) оба фонона, 1 и 2, по которым идет суммирование, при наличии процесса переброса должны иметь частоту порядка дебаевской. Но для членов выражения (61), которые отвечают столкновениям с аннигиляцией или с рождением внешнего фонона (в первом и четвертом 3-корреляторах в квадратных скобках), это противоречит законам сохранения энергии ($\omega_1 + \omega_2 - \omega_p = 0, \omega_1 + \omega_2 - \omega_q = 0$), и эти корреляторы могут быть отброшены. В результате интеграл (61) принимает вид

$$J_{pq} = \pi \sum_{1,2} V_{1,2,-q} V_{1,2,-p}^* \delta(\omega_2 - \omega_1 - \omega_p) \times \times [n_2(1+n_{-1})(1+n_p) - (1+n_2)n_{-1}n_p] + + \pi \sum_{1,2} V_{1,2,p} V_{1,2,q}^* \delta(\omega_1 - \omega_2 - \omega_q) \times \times [n_{-1}(1+n_2)(1+n_q) - (1+n_{-1})n_2 n_q]. \quad (64)$$

Диагональная часть J_{pp} есть обычный интеграл трехфононных столкновений при низких температурах [4]. В аномальном эффекте Холла дают вклад интегралы J_{pq}, диагональные по импульсу, но с разными номерами мод. В тау-приближении, как и при резонансном рассеянии, выражение для J_{pq} сводится к виду, аналогичному (54), но теперь

$$\Omega_{pq} = 2\pi \operatorname{Re} \sum_{1,2} V_{1,2,-q} V_{2,1,-p}^* \times \times \delta(\omega_2 - \omega_1 - \omega_p)(N_1 - N_2). \quad (65)$$

Здесь суммирование идет по состояниям с суммой квазиимпульсов, близкой к вектору обратной решетки ($\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 \approx \mathbf{B}$), и энергиями порядка температуры Дебая Θ, отличающимися на энергию внешнего фонона $p = \mathbf{k}\alpha$. Подставляя выражение (65) в (57) и воспользовавшись (42), находим $\varkappa_{12}^{yx}$ в рассматриваемом случае.

Произведения амплитуд рассеяния в соотношениях (64) и (65) не сводятся к квадрату модуля и, вообще говоря, имеют произвольный знак. Используя стандартные представления для трехфононной вершины $V_{1,2,p}$, имеем

$$V_{1,2,p} V_{1,2,q}^* \sim \frac{k}{\sqrt{c_p c_q}} e_p^a e_q^b T^{ab}(1,2), \quad (66)$$

где $T^{ab}(1,2)$ — действительный симметричный тензор второго ранга, зависящий от состояний фононов с большими импульсами $(1,2)$ и не сводящийся в общем случае к δ^{ab}. Поэтому взаимная ортогональность векторов $\mathbf{e}_\alpha$ и $\mathbf{e}_{\alpha'}$ не приводит к обращению выражения (65) в нуль, и коэффициенты Ω_{pq} по порядку величины равны частоте релаксации, определяющей продольную теплопроводность: $\Omega_{pq} \sim \Omega_{pp}$ (но заведомо $|\Omega_{pq}| < \Omega_{pp}$). При $T \ll \Theta$ эта частота из-за процессов переброса экспоненциально мала: $\Omega_{pp} \propto \Theta \exp(-\xi\Theta/T)$, ξ — величина порядка единицы. Поэтому, по крайней мере при достаточно низких температурах, основную роль должно играть рассмотренное выше резонансное рассеяние.

6. ОБСУЖДЕНИЕ И ОЦЕНКА ПОПЕРЕЧНОЙ КОМПОНЕНТЫ ТЕНЗОРА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Определяющая фононный аномальный эффект Холла компонента тензора теплопроводности выражается интегралом (42), в котором, в отличие от случая продольной теплопроводности, стоит не $(c^x)^2$, а $c^x c^y$ и, казалось бы, при усреднении по направлениям $\mathbf{k}$ интеграл мог бы исчезнуть. Но произведение $[\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2] \cdot \mathbf{G}$, входящее в формулу (15), как показано выше (см. соотношение (21)), пропорционально $\operatorname{sign} k_x \operatorname{sign} k_y$. Следовательно, под знаком суммирования в (42) стоит выражение, инвариантное относительно отражения в обратном пространстве, и усреднение по $\mathbf{k}$ дает отличный от нуля результат. Заметим, что наличие множителя $[\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2] \cdot \mathbf{G}$ указывает на определяющую роль эллиптической поляризации фононов, возникшей благодаря спин-фононному взаимодействию.

Обратим внимание, что частоты столкновений входят в выражение (42) только в форме отношения, поскольку явление формируется в два этапа: неоднородность температуры вызывает неравновесное распределение (56) $f_p \propto 1/\Omega_{pp}$, и только во вторую очередь на фоне этого распределения образуется коррелятор $\rho_{pq} \sim \Omega_{pq}$, формирующий поперечный поток тепла. Благодаря знаменателям подынтегральное выражение в (42) становится большим в окрестности сближения акустических мод. В кубическом кристалле это имеет место в направлении [111]. В окрестности этих направлений нельзя ограничиться линейным по спин-фононному взаимодействию приближением. Если провести перенормировку спектров, то легко убедиться, что пересекающиеся ветви расталкиваются. Это уменьшает вклад таких областей, и их роль в интеграле (42) ограничена.

При оценке интеграла (42) будем считать, что частоты столкновений Ω_{pq} и Ω_{pp} имеют одинаковый порядок величины. Для упрощения примем для обеих мод некоторое среднее значение для скорости звука c и при интегрировании учтем, что главную роль играют частоты фононов $\omega_{k\alpha}$ порядка T. При этом $F_{12} \approx 1/T$ в выражении (57), и в результате находим

$$\varkappa^{yx} \sim g\,\langle s\rangle\,\frac{T}{c}. \tag{67}$$

Чтобы оценить параметр g, формально введенный в выражении (2), следует иметь в виду следующее. Вид гамильтониана спин-фононного взаимодействия (2) обусловлен двухфононными процессами и имеет то же происхождение, что и гамильтониан резонансного рассеяния (48) (см. [9, 10]). В первом порядке взаимодействие колебаний кристаллического поля с парамагнитным ионом есть однофононный процесс, в простейшей форме описываемый формулой $V_{cr}\,(ka)\,U_{k\alpha}/a$, где величина V_{cr} близка к величине статического кристаллического поля. Фактор ka учитывает относительное движение иона и окружающих атомов [8]. Во втором порядке по этому взаимодействию стандартное каноническое преобразование приводит к гамильтониану

$$\langle s\rangle\,V_{cr}^2 U_{k\alpha} V_{k'\alpha'}\,\frac{\omega_{k\alpha}^2}{c^2\left(\varepsilon_{21}^2-\omega_{k\alpha}^2\right)}. \tag{68}$$

Здесь ε_{21} — расстояние между уровнями квазидублета и принято, что $\omega_{k\alpha} \approx \omega_{k,\alpha'}$. Недиагональные по импульсам фононов члены этой формулы описывают резонансное рассеяние (48), а диагональный по $\mathbf{k}$, но, вообще говоря, недиагональный по модам член характеризует спин-орбитальное взаимодействие (см., например, работу [9]). При $\varepsilon_{21} < T$ этот член по порядку величины равен

$$\langle s\rangle\,V_{cr}^2 U_{k\alpha} P_{k'\alpha'}/mc^2.$$

Непосредственное сравнение этого выражения с (2) дает

$$g \approx \frac{V_{cr}^2}{mc^2}. \tag{69}$$

Если магнитное поле невелико ($\mu_{eff}B < T$, где μ_{eff} — эффективное гиромагнитное отношение), то $\langle s\rangle = \mu_{eff}B/T$. В результате, с точностью до численного фактора, восстанавливая в выражении (67) константы k_B и $\hbar$, получаем

$$\varkappa^{yx} \approx k_B g\,\frac{\mu_{eff}B}{k_BT}\,\frac{k_BT}{\hbar c}. \tag{70}$$

Приняв $V_{cr} \approx 50$ К, $c = 4\cdot 10^5$ см/с, находим

$$\varkappa^{yx} \approx 10^{-7}\,(\mu_{eff}B/k_BT)\,\text{Вт}\cdot\text{см}^{-1}\cdot\text{К}^{-1}.$$

Используя экспериментальное значение продольного коэффициента теплопроводности [1, 5] $\varkappa^{xx} \approx 5\cdot 10^{-3}$ Вт $\cdot$ см$^{-1}\cdot$ К$^{-1}$ при $T \sim 5$ К и полагая $\mu_{eff}B/k_BT \approx 1$, для угла Холла получаем

$$\eta = \frac{\varkappa^{yx}}{\varkappa^{xx}} \approx 2\cdot 10^{-5}. \tag{71}$$

Реально, это отношение может оказаться бóльшим, поскольку опущенный в выражении (70) численный множитель может оказаться заметно больше единицы из-за характера выражения под знаком суммы в (42).

Таким образом, в общем случае аномальный эффект Холла обусловлен комбинацией двух важных факторов. Во-первых, он возникает благодаря эллиптической поляризации, которая является следствием спин-орбитального взаимодействия фононов и парамагнитных ионов, расщепленных кристаллическим полем. Во-вторых, эффект связан с появлением в присутствии градиента температуры недиагональных по модам элементов матрицы плотности. Последнее приводит к необходимости решения обобщенного кинетического уравнения. Модель, использованная в настоящей работе, является упрощенной. По этой причине тот факт, что оценка (71) угла Холла, полученная с использованием реальных параметров, оказалась сопоставимой с экспериментальными значениями [1, 2], лежащими в интервале 10^{-5}–10^{-4}, представляется весьма обнадеживающей.

ЛИТЕРАТУРА

1. C. Strohm, G. L. J. A. Rikken, and P. Wyder, Phys. Rev. Lett. **95**, 155901 (2005).

2. А. В. Инюшкин, А. Н. Талденков, Письма в ЖЭТФ **86**, 436 (2007).

3. Ю. Каган, Л. А. Максимов, ЖЭТФ **51**, 1893, (1966); L. J. F. Hermans, P. H. Fortuin, H. F. P. Knaap, and J. J. M. Beenakker, Phys. Lett. **25 A**, 81 (1967); Л. Л. Горелик, В. Г. Николаевский, В. В. Синицын, Письма в ЖЭТФ **4**, 456 (1966).

4. Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Физическая кинетика*, Наука, Москва (1979).

5. G. A. Slack and D. W. Oliver, Phys. Rev. B **4**, 592 (1971).

6. И. К. Кикоин, ЖЭТФ **10**, 1242 (1940).

7. *Spin-Lattice Relaxation in Ionic Solids*, ed. by A. A. Manenkov and R. Orbach, Harper & Row, New York (1966).

8. A. A. Abragam and B. Bleaney, *Electron Paramagnetic Resonance of Transition Ions*, Clarendon Press, Oxford (1970).

9. H. Capellmann and S. Lipinski, Z. Phys. B **83**, 199 (1991).

10. A. S. Ioselevich and H. Capellmann, Phys. Rev. B **51**, 11446 (1995).

11. L. Sheng, D. N. Sheng, and C. S. Ting, Phys. Rev. Lett. **96**, 155901 (2006).

12. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория упругости*, Наука, Москва (1987).

13. R. J. Hardy, Phys. Rev. **132**, 168 (1963).

14. D. Zubarev, V. Morozov, and G. Ropke, *Statistical Mechanics of Nonequilibrium Processes*, Academie Verlag, Berlin (2002).