ЖЭТФ, 2008, том 134, вып. 4 (10), стр. 772–778

СВЕРХПРОВОДИМОСТЬ НАМАГНИЧЕННОГО ЭЛЕКТРОННОГО ГАЗА КВАНТОВОГО ЦИЛИНДРА

П. А. Эминов[a*], *Ю. И. Сезонов*[b]

[a] *Московский государственный университет приборостроения и информатики*
107996, Москва, Россия

[b] *Московский государственный институт электроники и математики (технический университет)*
109028, Москва, Россия

Поступила в редакцию 8 апреля 2008 г.

Построена микроскопическая теория сверхпроводимости намагниченного электронного газа на цилиндрической поверхности. Вычислен термодинамический потенциал сверхпроводящей системы. Получено уравнение для энергетической щели, определяющее зависимость критической температуры от геометрических размеров квантового цилиндра и параметра Ааронова – Бома. Показано, что ширина энергетической щели, наряду с осцилляциями Ааронова – Бома, испытывает также осцилляции при изменении кривизны цилиндрической поверхности.

PACS: 71.10.-w, 75.75.+a

1. ВВЕДЕНИЕ

Исследования показывают, что физические свойства наноструктур весьма чувствительны к их геометрии. В зависимости от геометрической структуры однослойная углеродная нанотрубка может быть диэлектриком, металлом или полупроводником [1]. Спиральная геометрия приводит к новым, по сравнению с цилиндрической проволокой, эффектам, которые проявляются в оптических и фотоэлектрических свойствах нанотрубки [2–4].

Уникальные явления предсказываются в низкоразмерных структурах в присутствии внешнего электромагнитного поля. В магнитном поле наблюдается осциллирующая зависимость макроскопических свойств квантового цилиндра. Одним из параметров осцилляций является величина, равная отношению магнитного потока через поперечное сечение нанотрубки к кванту магнитного потока. Осцилляции Ааронова – Бома для проводимости квантового цилиндра в баллистическом режиме исследовались, например, в работах [5, 6]. Магнитный отклик двумерного электронного газа в нанотрубках с цилиндрической симметрией также испытывает осцилляции Ааронова – Бома [7, 8]. Плазменные колебания двумерных электронов и осцилляции Ааронова – Бома для частоты плазмона в квазиклассическом приближении рассмотрены в работе [9]. Актуальным также является изучение спиновых эффектов в наноструктурах [10].

Таким образом, открывается принципиальная возможность управления физическими свойствами наноструктур, как при изменении их геометрии, так и при изменении напряженности внешнего поля.

Настоящая работа посвящена изучению сверхпроводящих свойств намагниченного электронного газа квантового цилиндра. Решение этой задачи представляется особенно актуальным в связи с тем, что в теории фазовых переходов имеется лишь ограниченное число точно решаемых примеров.

В разд. 2 дается квантово-механическая оценка возможности образования куперовской пары на цилиндрической поверхности в постоянном магнитном поле.

В разд. 3 построена микроскопическая теория сверхпроводимости намагниченного электронного газа квантового цилиндра. Вычислен термодинамический потенциал сверхпроводящей системы. Получено уравнение для энергетической щели, определяющее зависимость критической температуры от геометрических размеров квантового

*E-mail: peminov@mail.ru

цилиндра и магнитного потока через поперечное сечение нанотрубки.

В разд. 4 проводится вычисление ширины цели при нулевой температуре в различных предельных случаях. Обнаружены два типа осцилляций, которые испытывает величина ширины щели. Первый тип — это осцилляции Ааронова–Бома при изменении магнитного потока через сечение цилиндра. Вторым параметром осцилляций является величина $(N_L R)^{1/2}$, где R — радиус цилиндра, N_L — линейная концентрация электронов. Этот тип осцилляций, в основе которого лежит изменение геометрии поверхности, сохраняется и при выключении внешнего магнитного поля.

2. ЭФФЕКТ КУПЕРА В НАМАГНИЧЕННОМ ЭЛЕКТРОННОМ ГАЗЕ КВАНТОВОГО ЦИЛИНДРА

Принципиальный интерес представляет точный учет влияния внешнего магнитного поля на свойства как трехмерных, так и двумерных сверхпроводящих систем. Магнитные свойства сверхпроводников в области температур вблизи точки фазового перехода описываются феноменологической теорией Гинзбурга–Ландау [11–13]. Методом температурных функций Грина аналитические результаты удается получить для всех температур, но в линейном по полю приближении [11, 14]. На сегодня остается актуальной и задача о двумерной сверхпроводимости [12], впервые рассмотренная в работах [15–17].

В этом параграфе на квантово-механическом уровне выводится уравнение, позволяющее оценить энергию связи куперовской пары.

Рассмотрим уравнение Шредингера для системы из двух взаимодействующих друг с другом электронов, находящихся на цилиндрической поверхности в присутствии продольного магнитного поля:

$$\left(\hat{H}_1 + \hat{H}_2 + H_{int}\right)\psi = E\psi. \tag{1}$$

Здесь E — энергия куперовской пары,

$$\begin{aligned} H_{int} &= U = U\left(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|\right) = \\ &= U\left(\sqrt{(z_1 - z_2)^2 + R^2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}\right) \equiv U(z,\varphi) \end{aligned}$$

— потенциальная энергия взаимодействия электронов в цилиндрической системе координат, R — радиус цилиндра, $z = z_1 - z_2$, $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$, индексы «1» и «2» относятся к координатам $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$, на которые действует гамильтониан электрона на цилиндрической поверхности в продольном магнитном поле, который определяется формулой [7]

$$\hat{H}_0 = -\varepsilon\frac{d^2}{d\varphi^2} - i\frac{\omega_c}{2}\frac{d}{d\varphi} + \frac{m^*\omega_c^2}{8}R^2 + \frac{\hat{p}_3^2}{2m^*}, \tag{2}$$

где $\omega_c = |e|H/m^*$ — циклотронная частота, m^* — эффективная масса электрона, $\hat{p}_3$ — оператор проекции импульса на ось z цилиндрической системы координат, H — напряженность магнитного поля, направленного вдоль оси z, φ — полярный угол, $\varepsilon = 1/2m^*R^2$ — энергия размерного конфайнмента.

Спектр и нормированные собственные функции гамильтониана (2) определяются формулами

$$E(n,p_3) = \varepsilon\left(n + \frac{\Phi}{\Phi_0}\right)^2 + \frac{p_3^2}{2m^*}, \tag{3}$$

$$\psi_{n,p_3}(\varphi,z) = \frac{\exp[i(n\varphi + p_3 z)]}{\sqrt{2\pi RL}}, \tag{4}$$

в которых приняты следующие обозначения: $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ — азимутальное квантовое число, $\Phi = \pi R^2 H$ — магнитный поток через сечение цилиндра высотой L, $\Phi_0 = \pi c\hbar/|e|$ — квант магнитного потока, e — заряд электрона.

Далее будем предполагать, что орбитальные моменты импульсов электронной пары направлены в противоположные стороны ($n_1 = -n_2 \equiv n$). Положим также, что импульсы продольного движения и проекции спина электронов на направление магнитного поля направлены в противоположные стороны, т. е. $p_{1z} = -p_{2z} \equiv p_z$, $S_{1z} = -S_{2z} \equiv S_z$.

В нулевом приближении волновую функцию такой электронной пары, составленную из решений соответствующих одночастичных уравнений Шредингера, будем искать в виде

$$\psi(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2) = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_p C(n,p_3)\exp(izp_3 + in\varphi)\,dp_3, \tag{5}$$

где $z = z_1 - z_2$, $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$, $p = (n, p_3)$ — совокупность квантовых чисел, задающих стационарное состояние электрона.

В результате уравнение (1) принимает вид

$$\begin{aligned} \left[E - 2\varepsilon n^2 - m^*\omega_c^2R^2 - \frac{p_3^2}{m}\right]C(n,p_3) &= \\ = \sum_{p'} C(n',p_3')U(n-n',p_3-p_3'), \end{aligned} \tag{6}$$

где $U(n-n', p_3-p_3')$ — матричный элемент оператора взаимодействия электронов.

Итак, рассматривается сильно коррелированное состояние двух электронов, энергии которых, без учета их взаимодействия, больше энергии Ферми. Покажем, что существует возможность возникновения связанного состояния электронной пары на цилиндрической поверхности во внешнем магнитном поле. Согласно теореме Купера в случае, если между электронами действуют силы притяжения, энергетически выгодным становится образование куперовской пары с энергией, меньшей удвоенной энергии Ферми.

Следуя модели БКШ, аппроксимируем матричный элемент мультипликативной постоянной взаимодействия:

$$U = -gF_1(n, p_3)F_2(n', p_3'), \tag{7}$$

где

$$F = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad E_F < E(n, p_3) < E_F + \omega, \\ 0 & \text{при} \quad E(n, p_3) > E_F + \omega, \end{cases} \tag{8}$$

т. е. считаем, что во взаимодействии через обмен фононами участвуют только электроны, энергия которых лежит в узком интервале энергий шириной ω над уровнем Ферми [11, 18].

Из уравнения (6) с учетом формул (7) и (8) для определения энергии основного состояния куперовской пары на цилиндрической поверхности и в присутствии продольного магнитного поля получаем уравнение

$$-\frac{1}{g} = \frac{1}{V}\sum_n \int \left(\frac{L}{2\pi}\right) \times \\ \times dp_3 \left\{-\Delta - 2\varepsilon n^2 - m^*\omega_c^2 R^2 - \frac{p_3^2}{m^*} + 2E_F\right\}^{-1}, \tag{9}$$

где мы положили $E = -\Delta + 2E_F$, ε — энергия размерного конфайнмента, ω_c — циклотронная частота. В правой части формулы (9) суммирование по n и интегрирование по p_3 проводятся по области, определяемой условием (8), величина $\Delta > 0$ равна энергии связи куперовской пары, а энергия Ферми определяется формулой

$$N_L = \frac{2\sqrt{2m^*}}{\pi} \sum_n \sqrt{E_F - \varepsilon\left(n + \frac{\Phi}{\Phi_0}\right)^2}, \tag{10}$$

где N_L — линейная плотность электронов, а область суммирования по квантовому числу n определяется из условия неотрицательности подкоренного выражения.

В разд. 4 будет показано, что решение уравнения (9), соответствующее связанному состоянию электронной пары с $\Delta > 0$, возможно в случае $g < 0$, т. е. при наличии динамического притяжения между электронами.

3. МИКРОСКОПИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ СВЕРХПРОВОДИМОСТИ НАМАГНИЧЕННОГО ЭЛЕКТРОННОГО ГАЗА КВАНТОВОГО ЦИЛИНДРА

Используя картину Фарри и метод u–v-преобразования Боголюбова ферми-операторов, построим микроскопическую теорию сверхпроводимости электронного газа квантового цилиндра во внешнем постоянном магнитном поле.

В представлении вторичного квантования исходный гамильтониан слабо неидеального ферми-газа с парным эффективным взаимодействием $U = U(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)$, которое не зависит от спина, имеет вид [11, 18]

$$\hat{H} = \sum_{p,s} \varepsilon(p, s) a^\dagger(p, s) a(p, s) + \\ + \frac{1}{2V} \sum_{\substack{p,s;p',s \\ (p' \neq p)}} J(p, p') a^\dagger_{p+q,s} a^\dagger_{p'-q,s'} a_{p',s'} a_{p,s}, \tag{11}$$

где $J(p, p')$ — образ Фурье потенциальной энергии взаимодействия электронов,

$$\sum_p f(n, p_3) \equiv \sum_n \int \frac{L}{2\pi\hbar} dp_3 f(n, p_3),$$

$$\varepsilon(p, s) = E(n, p_3, s) - \mu = \\ = \varepsilon\left(n + \frac{\Phi}{\Phi_0}\right)^2 + \frac{p_3^2}{2m^*} + s(\mu_B H) - \mu,$$

μ_B — магнетон Бора, μ — химический потенциал. Совокупность квантовых чисел, характеризующих стационарное состояние электрона в формуле (11), будем обозначать символом (p, s), где $p = (n, p_3)$, $s = \pm 1$ — спиновое квантовое число, задающее в единицах $\hbar/2$ проекцию спина электрона на ось z.

Выделим из уравнения (11) ту часть, которая ответственна за формирование куперовских пар $(p, s, -p, -s)$:

$$\hat{H}' = \sum_p \left[\varepsilon_p(\uparrow) a^\dagger(p, \uparrow) a(p, \uparrow) + \\ + \varepsilon_p(\downarrow) a^\dagger(p, \downarrow) a(p, \downarrow)\right] - \\ - \frac{1}{V} \sum_{p,p' \neq p} J(p, p') a^\dagger(-p, \downarrow) a^\dagger(p, \uparrow) \times \\ \times a(p', \uparrow) a(-p', \downarrow). \tag{12}$$

Второе слагаемое в этой формуле отвечает эффективному притяжению электронов с противоположными значениями p_3, L_z и s. Преобразуем формулу (12), используя каноническое u–v-преобразование Боголюбова ферми-операторов [18]:

$$\begin{aligned} a(p,\uparrow) &= u_p\alpha(p) + v_p\beta^\dagger(p), a^\dagger(p,\uparrow) = \\ &= u_p\alpha^\dagger(p) + v_p\beta(p), \\ a(-p,\downarrow) &= u_p\beta(p) - v_p\alpha^\dagger(p), a^\dagger(-p,\downarrow) = \\ &= u_p\beta^\dagger(p) - v_p\alpha(p), \end{aligned} \tag{13}$$

где $u^2(p) + v^2(p) = 1$.

Обратное преобразование

$$\begin{aligned} \alpha(p) &= u(p)a(p,\uparrow) - v(p)a^\dagger(-p,\downarrow), \\ \beta(p) &= u(p)a(-p,\downarrow) + v(p)a^\dagger(p,\uparrow) \end{aligned} \tag{14}$$

показывает, что новые амплитуды перепутывают именно состояния $(p,\uparrow;-p\downarrow)$ исходного гамильтониана. В новых ферми-операторах гамильтониан (12) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} H' = U + \sum_p \left[A_1(p)\alpha_p^\dagger\alpha_p + A_2\beta_p^\dagger\beta_p + \right. \\ \left. + B(p)\left[\alpha_p^\dagger\beta_p^\dagger + \beta_p\alpha_p\right]\right] - \\ - \frac{1}{V}\sum_{p,p'\neq p} J(p,p')\Lambda_p^\dagger\Lambda_{p'} \equiv \hat{H}_0 + \hat{\tilde{H}}, \end{aligned} \tag{15}$$

где приняты следующие обозначения:

$$\begin{aligned} &A_1(p) = \varepsilon(p)u_p^2 - \varepsilon(-p)v_p^2 + 2u_pv_pC(p) - \mu H, \\ &A_2(p) = \mu H - \varepsilon(p)v_p^2 + \varepsilon(-p)u_p^2 + 2u_pv_pC(p), \\ &B(p) = \varepsilon(p)u_pv_p + \varepsilon(-p)u_pv_p - (u_p^2 - v_p^2)C(p), \\ &U = -\sum_p C(p)u_pv_p + \sum_p v_p^2\left[\varepsilon(p) - \varepsilon(-p)\right], \\ &\varepsilon(p) = \varepsilon\left(n + \frac{\Phi}{\Phi_0}\right)^2 + \frac{p_3^2}{2m}, \\ &\varepsilon(-p) = \varepsilon\left(-n + \frac{\Phi}{\Phi_0}\right)^2 + \frac{p_3^2}{2m}, \\ &C(p) = \frac{1}{V}\sum_{p,p'\neq p} J(p,p')u_{p'}v_{p'}, \\ &\Lambda_p^\dagger = u_p^2\beta_p^\dagger\alpha_p^\dagger - v_p^2\alpha_p\beta_p + u_pv_p(\alpha_p^\dagger\alpha_p + \beta_p^\dagger\beta_p). \end{aligned} \tag{16}$$

Существенно, что оставшаяся часть полного гамильтониана $\hat{H}'' = \hat{H} - \hat{H}'$ не содержит диагональных слагаемых типа $\alpha_p^\dagger\alpha_p$ и $\beta_p^\dagger\beta_p$. Поэтому они выпадают из рассмотрения в результате статистического усреднения. Коэффициенты u–v-преобразования находим с помощью статистического вариационного принципа Боголюбова [18].

Выбираем в качестве гамильтониана $\hat{H}_0$ ту часть полного гамильтониана, которая является квадратичной формой по новым операторам α_p и β_p. Диагонализацию $\hat{H}_0$ проведем с помощью канонического преобразования, аналогичного приведенному выше u–v-преобразованию.

Итак, переходим к новым ферми-операторам a_p и b_p согласно формулам

$$\begin{aligned} \alpha_p &= \lambda_p a_p - \mu_p b_p^\dagger, \\ \beta_p &= \lambda_p b_p + \mu_p a_p^\dagger, \end{aligned} \tag{17}$$

где коэффициенты преобразования $\lambda(p)$ и $\mu(p)$ определяются из системы уравнений

$$\begin{aligned} &2\lambda_p\mu_p = \frac{B}{A}(\lambda_p^2 - \mu_p^2), \\ &\lambda_p^2 + \mu_p^2 = 1, \\ &A(p) = 2u(p)v(p)C(p) + \frac{\varepsilon(p) + \varepsilon(-p)}{2}(u_p^2 - v_p^2). \end{aligned} \tag{18}$$

Подстановка (17), (18) приводит гамильтониан $\hat{H}_0$ к диагональному виду

$$\begin{aligned} \hat{H}_0 = U' + \sum_p E(p)\left[a_p^\dagger a_p + b_p^\dagger b_p\right] + \\ + \sum_p \left[a_p^\dagger a_p - b_p^\dagger b_p\right]\frac{\varepsilon(p) - \varepsilon(-p) - 2\mu_B H}{2}, \end{aligned} \tag{19}$$

где

$$\begin{aligned} &E(p) = \sqrt{\overline{\varepsilon}^2(p) + C^2(p)}, \\ &U' = \sum_p \left[\overline{\varepsilon}(p) + u_pv_pC(p) - E(p)\right], \\ &\overline{\varepsilon}(p) = \frac{p_3^2}{2m^*} + \varepsilon\left[n^2 + \left(\frac{\Phi}{\Phi_0}\right)^2\right] - \mu. \end{aligned} \tag{20}$$

Что касается оператора $\Lambda_p^\dagger$, то в терминах новых операторов a_p и b_p его диагональный по операторам $a_p^\dagger a_p$ и $b_p^\dagger b_p$ вид определяется формулой

$$\begin{aligned} (\Lambda_p^\dagger)_{diag} = 2u_pv_p\mu_p^2 + (u_p^2 - v_p^2)\lambda_p\mu_p + \\ + \left[u_pv_p(\lambda_p^2 - \mu_p^2) - (u_p^2 - v_p^2)\lambda_p\mu_p\right]. \end{aligned} \tag{21}$$

Далее удобно ввести изинговские операторы σ_p и τ_p:

$$2a_p^\dagger a_p - 1 = \sigma_p, \quad 2b_p^\dagger b_p - 1 = \tau_p. \tag{22}$$

Тогда гамильтониан $\hat{H}_0$ представляется в виде

$$\begin{aligned} \hat{H}_0 = \sum_p\left[\overline{\varepsilon}(p) + u_pv_pC(p)\right] + \sum_p E(p)\frac{1}{2}(\sigma_p + \tau_p) + \\ + \sum_p \tilde{E}(p)\frac{1}{2}(\sigma_p - \tau_p), \end{aligned} \tag{23}$$

где

$$\tilde{E}(p) = \frac{\varepsilon(p) - \varepsilon(-p) - 2\mu_B H}{2}. \tag{24}$$

Для оператора $(\Lambda_p^\dagger)_{diag}$ в операторах σ и τ получаем выражение

$$(\Lambda_p^\dagger)_{diag} = u_p v_p + \frac{C(p)}{2E(p)}\,\frac{\sigma_p+\tau_p}{2}. \qquad (25)$$

Остальные слагаемые в $\Lambda_p^\dagger$ в результате усреднения обращаются в нули, и мы получаем эффективный гамильтониан

$$\hat{H} = \hat{H}_0 - \frac{1}{V}\sum_{p,p'\neq p} J(p,p')(\Lambda_p^\dagger)_{diag}(\Lambda_{p'})_{diag}, \qquad (26)$$

где $\hat{H}_0$ определяется формулой (19), а $(\Lambda_p^\dagger)_{diag}$ — формулой (25).

Используя на этом этапе статистический вариационный принцип Боголюбова для термодинамического потенциала системы с гамильтонианом (26), получаем оценку

$$\Omega \le \Psi = \sum_p \overline{\varepsilon}(p) - \theta\sum_p \ln 2\left[\mathrm{ch}\,\frac{E(p)}{\theta} + \mathrm{ch}\,\frac{\tilde{E}(p)}{\theta}\right] - \\ - \frac{1}{16V}\sum_{p,p'\neq p} J(p,p')\frac{C(p)}{E(p)}\varphi(p,\theta)\frac{C(p')}{E(p')}\varphi(p',\theta) + \\ + \frac{1}{2}\sum_p \frac{C^2(p)}{E(p)}\varphi(p,\theta), \qquad (27)$$

где θ — температура, а функция $\varphi(p,\theta)$ определяется формулой

$$\varphi(p,\theta) = \mathrm{th}\,\frac{E(p)+\tilde{E}(p)}{2\theta} + \mathrm{th}\,\frac{E(p)-\tilde{E}(p)}{2\theta}. \qquad (28)$$

Минимальное по отношению к величине энергетической щели значение термодинамического потенциала (27), соответствующее устойчивому термодинамическому состоянию системы, находится из условия

$$\frac{\delta\Psi}{\delta C} = 0, \qquad (29)$$

которое приводит к уравнению для энергетической щели

$$C(p) = \frac{1}{4}\sum_{p'} J(p,p')\frac{C(p')}{\sqrt{\overline{\varepsilon}^2 + C^2(p)}}\,\varphi(p',\theta). \qquad (30)$$

Таким образом, термодинамические свойства сверхпроводящего электронного газа на цилиндрической поверхности и в присутствии постоянного магнитного поля должны определяться из формулы (27) при условии (30).

Для теории БКШ уравнение (30) принимает вид

$$1 = \frac{g}{4V}\sum_p \frac{\varphi(p,\theta)}{\sqrt{\overline{\varepsilon}^2+\Delta^2}}\,, \qquad (31)$$

где

$$\begin{aligned} \overline{\varepsilon} &= \frac{p_3^2}{2m^*} + \varepsilon\left[n^2 + \left(\frac{\Phi}{\Phi_0}\right)^2\right] - \mu, \\ \tilde{E} &= 2\varepsilon n\frac{\Phi}{\Phi_0} - \mu_B H, \\ \varphi(p,\theta) &= \mathrm{th}\,\frac{\sqrt{\overline{\varepsilon}^2+\Delta^2}+\tilde{E}}{2\theta} + \\ &\quad + \mathrm{th}\,\frac{\sqrt{\overline{\varepsilon}^2+\Delta^2}-\tilde{E}}{2\theta}. \end{aligned} \qquad (32)$$

Полученное уравнение описывает зависимость ширины энергетической щели и температуры фазового перехода в нормальное состояние от характерных параметров системы, включая геометрические размеры квантового цилиндра и напряженность магнитного поля. Существенно, что в уравнение (31) для энергетической щели явно входит параметр Ааронова–Бома Φ/Φ_0, равный отношению магнитного потока через поперечное сечение цилиндра к кванту магнитного потока.

4. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Проведем исследование уравнения (31) при нулевой температуре, когда квазичастицы отсутствуют. В случае, когда выполнены условия

$$2\Phi/\Phi_0 < 1, \qquad (33)$$

$$N_L < \frac{1-\Phi/\Phi_0}{R}\,\frac{2}{\pi}, \qquad (34)$$

электроны могут находиться только в основном состоянии ($n=0$), для которого импульс Ферми продольного движения

$$p_3^F = \frac{\pi N_L \hbar}{2}, \qquad (35)$$

где N_L — линейная плотность электронов.

Таким образом, при выполнении условий (33), (34) в образовании куперовских пар участвуют состояния с $n=0$, а область интегрирования по переменной p_3 определяется из условия

$$\begin{aligned} p_F^2 &\le p_3^2 \le p_F^2 + 2m^*\omega, \\ p_F^2 &= 2m^*\left[\mu - \varepsilon\left(\frac{\Phi}{\Phi_0}\right)^2\right]. \end{aligned} \qquad (36)$$

Проблема отыскания корреляционного механизма, имеющего характер притяжения и необходимого для образования куперовских пар, здесь не рассматривается. Нас, прежде всего, интересует точный учет влияния магнитного поля на свойства сверхпроводника.

Заметим также, что, интегрируя в формуле (31) по слою энергии шириной ω над уровнем Ферми [18], мы не будем останавливаться здесь на вопросе об устранении расходимости интеграла (31). Последовательное проведение такого расчета в трехмерном случае и в отсутствие магнитного поля было проведено в работе [19].

В итоге для величины энергетической щели в предельном случае (33), (34) получим

$$\Delta(H) \approx 2\omega \exp\left\{-4\pi^2\hbar R p_3^F/m^* g\right\}. \qquad (37)$$

Следует отметить, что результат (37) следует и из предварительного обсуждения, проведенного в разд. 2.

Для проведения дальнейших вычислений удобно исходить из следующего представления для линейной концентрации вырожденного электронного газа:

$$N_L = \frac{Rp_F^2}{\hbar^2} + \frac{2p_F}{\pi\hbar}\sum_{k=1}^{\infty} J_1\left(\frac{2\pi R p_F k}{\hbar}\right)\frac{\cos(2\pi k\Phi/\Phi_0)}{k}, \qquad (38)$$

где R — радиус цилиндра, $p_F = \sqrt{2m^*\mu}$, $J_1(x)$ — функция Бесселя первого порядка. Формула (38) в неявном виде определяет зависимость энергии Ферми μ от линейной концентрации электронов, радиуса цилиндра и параметра Ааронова – Бома. Рассмотрим далее предельный случай, когда

$$\mu \gg \varepsilon, \qquad (39)$$

где ε — энергия размерного конфайнмента. Условие (39) эквивалентно условию $N_L R \gg 1$ и является обратным рассмотренному выше случаю (34). Физически условие (39) соответствует квазиклассичности поперечного движения электронов ($n \gg 1$).

Проводя в формуле (31) суммирование по квантовым состояниям, энергии которых лежат в слое шириной ω над уровнем Ферми, в предельном случае (39) получаем

$$\Delta = 2\omega \exp\left[-\frac{4\pi R}{g}\left(\frac{\partial N_L}{\partial\mu}\right)^{-1}\right], \qquad (40)$$

где N_L определяется формулой (38). Полагая также, что наряду с (39) выполнено условие

$$\frac{2\pi\hbar^2}{mg}(N_L R)^{-1/4} \ll 1, \qquad (41)$$

из формул (40) и (38) находим

$$\Delta = 2\omega \exp\left[-\frac{2\pi\hbar^2}{mg}\right]\left\{1 + \frac{4\hbar^2}{mg}(N_L R)^{-1/4} \times \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\left[2\pi k\sqrt{N_L R} - 3\pi/4\right]}{\sqrt{k}} \times \cos\left(2\pi k\frac{\Phi}{\Phi_0}\right)\right\}. \qquad (42)$$

Таким образом, как это следует из формул (42) и (40), ширина энергетической щели испытывает осцилляции двух типов.

Первый тип — это осцилляции Ааронова – Бома, в основе которых лежит неодносвязность области движения электронов в присутствии внешнего магнитного поля. Здесь следует подчеркнуть, что осцилляции Ааронова – Бома для критической температуры в случае тонкостенных сверхпроводников цилиндрической формы наблюдались экспериментально [17]. Там же приведены качественные оценки для амплитуды этих осцилляций, которая в настоящей работе вычислена из первых принципов квантовой теории.

Второй тип осцилляций — это осцилляции, параметром которых является величина $(N_L R)^{1/2}$. Существенно, что эти осцилляции сохраняются и при выключении внешнего магнитного поля. В связи с этим можно говорить об этих осцилляциях, как о физическом эффекте, в основе которого лежит изменение кривизны поверхности, т. е. геометрии нанотрубки.

Наконец, в предельном случае, когда $R \to \infty$, из формулы (42) получаем

$$\Delta = 2\omega \exp\left[-2\pi\hbar^2/gm\right]. \qquad (43)$$

Этот результат соответствует предельному случаю плоской поверхности, а магнитное поле не входит в уравнение (43), так как оно направлено параллельно поверхности.

Авторы выражают глубокую благодарность А. А. Жукову за ценные советы и обсуждение результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. Saito, G. Dresselhaus, and M. S. Dresselhaus, *Physical properties of Carbon Nanotubes*, ICP (1998).

2. Л. И. Магарилл, М. В. Энтин, Письма в ЖЭТФ **78**, 249 (2003).

3. В. В. Белов, С. Ю. Доброхотов, В. П. Маслов, Т. Я. Тудоровский, УФН **175**, 1004 (2005).

4. Л. И. Магарилл, А. В. Чаплик, М. В. Энтин, УФН **175**, 995 (2005).

5. П. М. Островский, Письма в ЖЭТФ **72**, 600 (2000).

6. V. A. Margulis, A. V. Shorokhov, and M. P. Trushin, Phys. Lett. A **276**, 180 (2000).

7. В. А. Гейлер, В. А. Маргулис, А. В. Шорохов, ЖЭТФ **115**, 1450 (1999).

8. П. А. Эминов, Ю. И. Сезонов, А. В. Альперн, Н. В. Сальников, ЖЭТФ **130**, 724 (2006).

9. А. И. Ведерников, А. О. Говоров, А. В. Чаплик, ЖЭТФ **120**, 979 (2001).

10. А. В. Ведяев, УФН **172**, 1458 (2002).

11. Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Статистическая физика*, ч. 2, *Теория конденсированного состояния*, Наука, Москва (1987), с. 448.

12. В. Л. Гинзбург, УФН **174**, 1040 (2004).

13. Е. Г. Максимов, УФН **170**, 1033 (2000).

14. П. И. Арсеев, С. О. Лойко, Н. К. Федоров, УФН **176**, 3 (2006).

15. В. Л. Гинзбург, Д. А. Киржниц, ЖЭТФ **46**, 397 (1964).

16. V. L. Ginzburg, Phys. Scripta **27**, 76 (1989).

17. W. A. Little and R. D. Parks. Phys. Rev. Lett. **9**, 9 (1962).

18. Н. Н. Боголюбов, *Собрание научных трудов в двенадцати томах*, т. VIII, Наука, Москва (2007), с. 642.

19. Л. П. Горьков, Т. К. Мелик-Бархударов, ЖЭТФ **40**, 1452 (1961).