

# ФОРМИРОВАНИЕ ОСОБЕННОСТЕЙ НА ЗАРЯЖЕННОЙ ПОВЕРХНОСТИ СЛОЯ ЖИДКОГО ГЕЛИЯ КОНЕЧНОЙ ГЛУБИНЫ

*Н. М. Зубарев\**

*Институт электрофизики Уральского отделения Российской академии наук  
620016, Екатеринбург, Россия*

Поступила в редакцию 19 марта 2008 г.

Исследована динамика развития неустойчивости заряженной поверхности слоя жидкого гелия конечной толщины. С использованием конформных переменных выведены уравнения, описывающие эволюцию свободной поверхности для случая, когда заряд полностью экранирует электрическое поле над жидкостью. Для предела сильного поля, когда динамика жидкости в основном определяется влиянием электростатических сил, предложена модель эволюции локализованного возмущения поверхности гелия. Модель описывает развитие неустойчивости изначально плоской границы вплоть до формирования в ней заостренных лунок. Рассмотрен также предел бесконечно глубокой жидкости. Без существенных ограничений на геометрию поверхности доказана устойчивость выявленного нами ранее режима течения жидкости, описываемого уравнениями лапласовского роста.

PACS: 67.30.hr, 68.03.-g, 47.65.-d

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Поверхность жидкого гелия может быть заряжена до довольно больших значений поверхностной плотности отрицательного электрического заряда [1, 2]. Электроны способны свободно перемещаться вдоль поверхности жидкого гелия, что обеспечивает ее эквипотенциальность на характерных гидродинамических временах и масштабах. Если плотность заряда относительно мала, то при значительной деформации поверхности его может не хватить для выравнивания потенциала на всей поверхности. Тогда формируются так называемые многозарядные лунки (см., например, работы [3–5] и ссылки в них). Мы будем рассматривать противоположный случай, когда плотность заряда достаточно велика, чтобы, перераспределяясь по деформированной поверхности, заряды полностью экранировали поле над ней. Подобная ситуация реализовывалась в экспериментах [6, 7]. В них было обнаружено, что на поверхности жидкого гелия появляются углубления, которые заостряются за конечное время. Сходный сценарий развития неустойчивости имеет ме-

сто для проводящей жидкости (жидкого металла) в электрическом поле [8–10]. Основное различие состоит в том, что индуцированный на поверхности заряд экранирует поле не над жидкостью, как это происходило в экспериментах [6, 7], а внутри жидкости. Это обуславливает тенденцию к формированию не лунок, а острий, в частности, так называемых конусов Тейлора [11]. Следует также упомянуть о неустойчивости поверхности жидкого водорода, заряженной ионами [12]. В достаточно сильном электрическом поле на ней формируются заостренные структуры (гейзеры), напоминающие конусы Тейлора. В настоящей работе мы ограничимся рассмотрением случая, когда электрическое поле отлично от нуля лишь в жидкости. Именно эта ситуация, как будет продемонстрировано ниже, может быть эффективно исследована с использованием конформных переменных.

Теоретически тенденция к взрывному росту возмущений сильнозаряженной поверхности жидкого гелия была выявлена в работе [13], в которой рассматривалась динамика системы в околоритическом электрическом поле. Предложенная модель была ограничена условием малости углов наклона по-

\*E-mail: nick@ami.uran.ru

верхности. Это ограничение, как было показано в работах [14, 15], можно снять для полей, существенно превышающих критическое для развития электрогидродинамической (ЭГД) неустойчивости значение. Оказалось, что в предельном случае бесконечно глубокой жидкости потенциалы скорости и электрического поля линейно связаны для растущих со временем решений. Редукция уравнений движения, соответствующая этой связи, приводит к уравнениям трехмерного лапласовского роста. К сожалению, подобная редукция не допускает обобщения на случай жидкости конечной глубины. Тем не менее, как будет показано в настоящей работе, определенный прогресс может быть достигнут в двумерной геометрии. В этом случае эволюция поверхности может быть эффективно исследована при помощи развиваемой в работах [16–19] техники, основанной на использовании конформных переменных. Этот подход позволяет свести исходную задачу о движении жидкости со свободной заряженной поверхностью к системе интегродифференциальных уравнений более низкой размерности, определяющих эволюцию непосредственно границы жидкости.

Достаточно емкую модель развития неустойчивости заряженной поверхности слоя жидкого гелия конечной глубины можно получить, рассматривая динамику нарастающих со временем возмущений поверхности. Проиллюстрируем основную идею подобного подхода на примере поверхностных волн малой амплитуды, когда переход к конформным переменным не требуется. Закон дисперсии линейных волн на поверхности жидкого гелия имеет вид [20]

$$\omega^2 = g \operatorname{th}(kh)k + \frac{\alpha}{\rho} \operatorname{th}(kh)k^3 - \frac{E^2}{4\pi\rho} \left( 1 + \frac{E'^2 \operatorname{th}(kh)}{E^2 \operatorname{th}(kh')} \right) k^2, \quad (1)$$

где  $\omega$  — частота,  $k$  — волновое число,  $g$  — ускорение в поле тяжести,  $\alpha$  — коэффициент поверхностного натяжения,  $\rho$  — плотность среды,  $E$  — напряженность электрического поля в жидкости,  $E'$  — напряженность электрического поля над поверхностью жидкости,  $h$  — глубина слоя жидкости,  $h'$  — расстояние от поверхности жидкости до верхнего электрода (см. рис. 1). Из этого закона следует, что при достаточно больших значениях  $E$  возникает область волновых чисел, для которых  $\omega^2 < 0$ . Это соответствует аperiodической неустойчивости границы жидкости.

Будем считать, что взаимодействие поверхностных зарядов с электрическим полем внутри жидкости будет играть более существенную роль, чем их

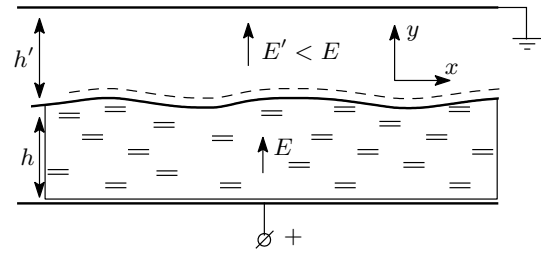


Рис. 1. Слой жидкого гелия с заряженной электродами поверхностью, помещенный в плоский конденсатор

взаимодействие с полем над жидкостью. Это, как видно из уравнения (1), соответствует условию

$$E^2 \operatorname{th}(kh') \gg E'^2 \operatorname{th}(kh).$$

В частности, оно реализуется при полной экранировке поля над поверхностью ( $E' = 0$ ). Положим также, что доминирующим в дисперсионном соотношении (1) будет последнее слагаемое, т. е. эволюция поверхности в основном определяется влиянием электростатических сил, а влияние капиллярных и гравитационных сил сравнительно мало:

$$E^2 \gg 4\pi\alpha \operatorname{th}(kh)k, \quad E^2 \gg 4\pi\rho g \operatorname{th}(kh)/k.$$

При указанных условиях дисперсионное соотношение (1) примет простой вид:

$$\omega^2 = -\frac{E^2}{4\pi\rho} k^2. \quad (2)$$

В соответствии с этим выражением, закон дисперсии имеет две ветви:

$$\omega = \pm i \frac{E}{\sqrt{4\pi\rho}} k. \quad (3)$$

Одна ветвь соответствует решениям, экспоненциально нарастающим со временем на линейной стадии развития ЭГД-неустойчивости поверхности, а другая — затухающим решениям. Примечательно, что характерные времена развития неустойчивости не зависят от глубины  $h$  слоя жидкости.

Отметим, что для бесконечно глубокой жидкости разделение решений на ветви возможно и для исходных нелинейных уравнений [14, 15]. Более того, эту процедуру удастся обобщить на случай границы раздела двух идеальных диэлектрических жидкостей во внешнем электрическом поле [21].

Основной нашей задачей будет изучение процесса формирования точек заострения в результате

эволюции пространственно-локализованного возмущения границы слоя жидкого гелия конечной толщины. Мы будем исходить из предположения, что разделение решений на ветви возможно не только на линейных стадиях неустойчивости, но и на развитых стадиях в окрестности формирующейся особенности. Развитие подобного подхода в сочетании с использованием конформных переменных даст нам описание эволюции поверхности жидкого гелия вплоть до формирования за конечное время особых точек, в которых бесконечными оказываются напряженность электрического поля, скорость движения жидкости и кривизна ее поверхности.

Появление бесконечностей в решениях ЭГД-уравнений свидетельствует о возникающей необходимости учета эмиссии заряженных частиц с поверхности жидкости на поздних стадиях формирования особенностей — точек заострения. В случае экспериментов [6, 7] речь идет о рождении на остриях пузырьков, уносящих заряд с поверхности гелия на положительную пластину конденсатора. В случае упоминавшихся экспериментов с жидким водородом [12] имеется в виду формирование гейзеров — горбов на поверхности жидкости, с заостренной вершины которых летит поток ионов. Для неустойчивости поверхности жидкого металла это — либо полевое испарение ионов [8, 22], либо взрывная электронная эмиссия [9]. Оценкой напряженности электрического поля вблизи формирующейся точки заострения, при которой нужно учитывать эмиссионные процессы, для жидкого металла может служить величина 1–10 В/нм. Для жидких гелия и водорода пороговое значение поля будет ниже вследствие относительной слабости сил электростатического изображения. Применительно к эмиссионным процессам роль сингулярных решений в ЭГД-моделях заключается в формировании условий для их инициирования.

В разд. 2 выписаны уравнения безвихревого движения жидкого гелия со свободной поверхностью, заряженной локализованными над ней электронами. В разд. 3, по аналогии с работами [16, 17], для двумерной геометрии выводятся уравнения движения в конформных переменных. Использование конформных преобразований позволяет свести задачу нахождения потенциалов скорости и электрического поля с условиями на неизвестной границе к аналогичной задаче на полосе. В терминах настоящей работы подобное преобразование соответствует использованию в качестве независимых переменных потенциала электрического поля в жидкости и гармонически сопряженной ему функции. Разделы 4–6 посвяще-

ны разработке и анализу модели эволюции уединенного возмущения поверхности, приводящей к формированию заостренных углублений на поверхности гелия. В разд. 7 рассматриваются условия применимости полученных приближенных решений. Показывается, что они адекватно описывают самую важную и интересную стадию неустойчивости — стадию формирования особенностей. В разд. 8 исследуется предельный случай слоя жидкого гелия бесконечной глубины, для которого ранее была обнаружена возможность редукции исходных уравнений движения к уравнениям лапласовского роста, описывающим эволюцию нарастающих со временем возмущений поверхности [14, 15]. Приводится доказательство устойчивости режима течения жидкости, соответствующего редуцированным уравнениям, по отношению к малым мелкомасштабным возмущениям. Наконец, разд. 9 содержит наши заключительные замечания.

## 2. ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим плоское потенциальное движение помещенной в электрическое поле идеальной диэлектрической жидкости (жидкого гелия) со свободной заряженной электронами поверхностью. В невозмущенном состоянии граница жидкости представляет собой плоскую горизонтальную поверхность  $y = 0$  (ось  $y$  декартовой системы координат направлена по нормали к поверхности жидкости). Будем считать, что вектор напряженности поля направлен по оси  $y$ , а функция  $\eta(x, t)$  задает отклонение границы от плоской, т. е. занимаемая жидкостью область ограничена свободной поверхностью  $y = \eta(x, t)$  с одной стороны и дном  $y = -h$  с другой. Положим, что возмущение поверхности является пространственно-локализованным, т. е.  $\eta \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow \pm\infty$ .

Потенциал скорости  $\phi$  для несжимаемой жидкости удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\nabla^2 \phi = 0$$

со следующими граничными условиями:

$$\phi_t + (\nabla \phi)^2 / 2 = -(P_E + P_0) / \rho, \quad y = \eta(x, t), \quad (4)$$

$$\phi_y = 0, \quad y = -h,$$

$$\phi \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \pm\infty,$$

где  $P_E$  — электростатическое давление,  $P_0$  — постоянная разность давлений внутри и снаружи жидкости. Временная эволюция свободной поверхности определяется кинематическим соотношением

$$\eta_t = \phi_y - \eta_x \phi_x, \quad y = \eta(x, t).$$

Электростатическое давление в ситуации, когда поле над поверхностью полностью экранируется поверхностным зарядом, задается выражением

$$P_E = (\nabla\varphi)^2/8\pi.$$

Входящий сюда потенциал электрического поля в жидкости,  $\varphi$ , удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\nabla^2\varphi = 0,$$

которое следует решать совместно с условиями эквипотенциальности границы жидкого гелия,  $y = \eta$ , и положительной пластины конденсатора,  $y = -h$ :

$$\varphi = 0, \quad y = \eta(x, t),$$

$$\varphi = Eh, \quad y = -h.$$

Отметим, что при невозмущенной границе жидкости ( $\eta = 0$ ) распределение потенциала электрического поля определяется выражением  $\varphi = -Ey$ . Учитывая, что этому случаю соответствует  $\phi = 0$ , найдем для входящей в правую часть нестационарного уравнения Бернулли (4) константы  $P_0 = -E^2/8\pi$ . Следует отметить, что для периодических возмущений поверхности значение  $P_0$  может отличаться от этого выражения.

Перейдем к безразмерным обозначениям при помощи замен

$$\phi \rightarrow \frac{lE}{\sqrt{4\pi\rho}}\phi, \quad t \rightarrow \frac{l\sqrt{4\pi\rho}}{E}t, \quad \varphi \rightarrow lE\varphi,$$

$$\eta \rightarrow l\eta, \quad y \rightarrow ly, \quad x \rightarrow lx, \quad h \rightarrow lh,$$

где  $l$  — характерный продольный масштаб возмущения.

Уравнения движения жидкости со свободной поверхностью обладают гамильтоновой структурой, причем функции  $\eta(x, t)$  и  $\psi(x, t) \equiv \phi|_{y=\eta}$  являются канонически-сопряженными величинами [23–25]:

$$\psi_t = -\frac{\delta H}{\delta \eta}, \quad \eta_t = \frac{\delta H}{\delta \psi}, \quad (5)$$

где гамильтониан  $H$  с точностью до констант совпадает с полной энергией системы:

$$\begin{aligned} H &= H_{kin} + H_{pot}, \\ H_{kin} &= \frac{1}{2} \int_{-h < y < \eta} (\nabla\phi)^2 dx dy, \\ H_{pot} &= \frac{1}{2} \int_{-h < y < \eta} [1 - (\nabla\varphi)^2] dx dy + H_0, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $H_0$  — константа. Уравнения (5) реализуют экстремум функционала действия  $S = \int L dt$  с лагранжианом

$$L = \int \psi\eta_t dx - H.$$

В следующем разделе, по аналогии с работой [17], перепишем лагранжиан в конформных переменных, соответствующих отображению занимаемой жидкостью области в горизонтальную полосу. Уравнения движения поверхности жидкости при этом возникнут как уравнения Эйлера–Лагранжа.

### 3. КОНФОРМНЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ

Осуществим конформное преобразование области, занимаемой жидкостью, в полосу  $-h < v < 0$  и  $-\infty < u < \infty$  (для локализованных возмущений глубина жидкости и ширина полосы совпадают; эти величины могут различаться для периодических волн [17]). Для нашей задачи вспомогательные переменные  $u$  и  $v$  имеют конкретный физический смысл:  $v$  с точностью до знака совпадает с потенциалом поля  $\varphi$ , а  $u$  — с гармонически сопряженной потенциалу функцией, определяющей силовые линии электрического поля. Поверхность жидкости в новых переменных задается параметрическими выражениями

$$y = Y(u, t), \quad x = X(u, t) = u + \hat{T}Y(u, t), \quad (7)$$

где  $\hat{T}$  — интегральный оператор, имеющий в фурье-представлении вид

$$R_k = i \operatorname{th}(kh).$$

Введем также обратный оператор  $\hat{R} \equiv \hat{T}^{-1}$ , для которого

$$T_k = -i \operatorname{cth}(kh).$$

В конформных переменных лагранжиан принимает следующую форму:

$$\begin{aligned} L &= \int \Psi(Y_t + Y_t \hat{T}Y_u - Y_u \hat{T}Y_t) du + \\ &+ \frac{1}{2} \int \Psi \hat{R} \Psi_u du + \frac{1}{2} \int Y \hat{T}Y_u du, \end{aligned} \quad (8)$$

где функция  $\Psi(u, t)$  определяет значение потенциала скорости на границе  $v = 0$ . Связь между каноническими переменными  $\psi(x, t)$  и  $\eta(x, t)$  и соответствующими им в конформных переменных функциями  $\Psi(u, t)$  и  $Y(u, t)$  определяется неявными выражениями

$$\Psi(u, t) = \psi(u + \hat{T}Y, t),$$

$$Y(u, t) = \eta(u + \hat{T}Y, t).$$

Лагранжиан (8) совпадает с выведенным в работе [17] за исключением последнего слагаемого, которое учитывает энергию электростатического взаимодействия. Не повторяя вывод выражения для всего лагранжиана, покажем, откуда берется это слагаемое. Для этого требуется переписать функционал (6) через конформные переменные.

В первую очередь представим потенциал электрического поля как сумму невозмущенного потенциала и возмущения:

$$\varphi(x, y, t) = -y + \xi(x, y, t).$$

Подставляя это выражение в (6) и интегрируя по частям, получим

$$\begin{aligned} H_{pot} - H_0 &= \frac{1}{2} \int_{-h < y < \eta} [2\xi_y - (\nabla\xi)^2] dx dy = \\ &= \int \eta dx - \frac{1}{2} \int_{-h < y < \eta} (\nabla\xi)^2 dx dy. \end{aligned}$$

Применяя первую теорему Грина, находим для функционала потенциальной энергии

$$H_{pot} = -\frac{1}{2} \int \sqrt{1 + \eta_x^2} (\xi \partial_n \xi)|_{y=\eta} dx,$$

где  $\partial_n$  — производная в направлении нормали к поверхности  $y = \eta(x, t)$ . Здесь мы положили  $H_0 = -M = -\int \eta dx$  (эта величина не меняется со временем вследствие закона сохранения массы). Функция  $\xi$  остается гармонической при переходе к переменным  $u$  и  $v$ . Она будет удовлетворять следующим граничным условиям:

$$\xi|_{v=0} = Y, \quad \xi|_{v=-h} = 0.$$

Как следствие, на свободной границе справедливо  $\xi_v|_{v=0} = \hat{T}Y_u$ . Используя эти соотношения, окончательно находим

$$H_{pot} = -\frac{1}{2} \int Y \hat{T}Y_u du,$$

что и определяет вид последнего слагаемого в лагранжиане (8).

Условия

$$\frac{\delta S}{\delta Y} = 0, \quad \frac{\delta S}{\delta \Psi} = 0$$

дают искомые уравнения движения в конформных переменных:

$$\Psi_t (1 + \hat{T}Y_u) - \Psi_u \hat{T}Y_t - \hat{T} (Y_t \Psi_u - Y_u \Psi_t) = \hat{T}Y_u, \quad (9)$$

$$Y_t (1 + \hat{T}Y_u) - Y_u \hat{T}Y_t = -\hat{R}\Psi_u. \quad (10)$$

Эти уравнения позволяют исследовать эволюцию поверхностных волн произвольной амплитуды.

#### 4. МОДЕЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ЭВОЛЮЦИИ ПОВЕРХНОСТИ

На начальных стадиях развития ЭГД-неустойчивости эволюцию поверхности можно описывать линейными уравнениями

$$\Psi_t = \hat{T}Y_u, \quad (11)$$

$$Y_t = -\hat{R}\Psi_u, \quad (12)$$

получающимися в результате линеаризации уравнений движения (9) и (10). Исключая из (11) и (12) функцию  $\Psi$ , получим простейшее эллиптическое уравнение в частных производных:

$$Y_{tt} = -Y_{uu}.$$

Ему (в размерных обозначениях) соответствует дисперсионное соотношение (2), которое может быть разделено на ветви (3). Применительно к системе уравнений (11) и (12) это означает возможность ее расщепления на две независимых подсистемы:

$$\Psi = \pm \hat{H} \hat{T}Y, \quad (13)$$

$$Y_t = \mp \hat{H}Y_u, \quad (14)$$

где  $\hat{H}$  — оператор Гильберта:

$$\hat{H}f(u) = \frac{1}{\pi} \int \frac{f(u')}{u' - u} du'.$$

Уравнения с верхними знаками соответствуют нарастающим со временем решениям, а с нижними знаками — затухающим.

В предельном случае бесконечно глубокой жидкости ( $h \rightarrow \infty$ ) описанная процедура разделения решений на ветви обобщается на исходные нелинейные уравнения (9) и (10). Действительно, в этом пределе

$$\hat{R} \rightarrow \hat{H}, \quad \hat{T} \rightarrow -\hat{H}.$$

Тогда система уравнений (9) и (10) переписется в виде

$$\begin{aligned} \Psi_t (1 - \hat{H}Y_u) + \Psi_u \hat{H}Y_t + \hat{H} (Y_t \Psi_u - Y_u \Psi_t) = \\ = -\hat{H}Y_u, \quad (15) \end{aligned}$$

$$Y_t (1 - \hat{H}Y_u) + Y_u \hat{H}Y_t = -\hat{H}\Psi_u. \quad (16)$$

Эти уравнения допускают следующие редукции:

$$\Psi = \pm Y, \quad (17)$$

$$Y_t - Y_t \hat{H}Y_u + Y_u \hat{H}Y_t = \mp \hat{H}Y_u, \quad (18)$$

которые для частного случая бесконечно глубокой жидкости являются нелинейным обобщением редукции (13) и (14) линейных уравнений (11) и (12). Отметим, что выражение (18) можно переписать в компактном виде:

$$\text{Im}(\bar{Z}_t Z_u) = \pm 1, \quad Z = u - \hat{H}Y + iY \mp it,$$

что соответствует уравнению лапласовского роста (верхние знаки) и тому же уравнению с обращенным временем (нижние знаки). Важно, что уравнение лапласовского роста допускает бесконечное число частных решений, выраженных в элементарных функциях (см. работы [26–29] и ссылки в них). Эти решения могут быть использованы для описания эволюции заряженной поверхности жидкого гелия [14, 15].

Вернемся к случаю жидкости конечной глубины. Нас интересуют решения, амплитуда которых нарастает со временем. Именно они ответственны за формирование особенностей на свободной поверхности жидкости. На линейных стадиях развития неустойчивости для подобных решений, в соответствии с (13), функции  $\Psi$  и  $Y$  должны быть связаны соотношением

$$\Psi = \hat{H}\hat{T}Y. \quad (19)$$

Данное соотношение, как мы продемонстрировали, совместно с нелинейными уравнениями движения для предела глубокой жидкости (тогда оно упрощается до вида  $\Psi = Y$ ). Это дает нам основание использовать связь (19) между  $\Psi$  и  $Y$  для построения приближенной модели нелинейной эволюции заряженной поверхности слоя жидкого гелия конечной толщины. При помощи соотношения (19) получим из (10) следующее интегродифференциальное уравнение:

$$Y_t (1 + \hat{T}Y_u) - Y_u \hat{T}Y_t = -\hat{H}Y_u, \quad (20)$$

которое будет предметом нашего дальнейшего обсуждения.

Отметим, что при эволюции уединенного возмущения поверхности характерный продольный масштаб возмущения ( $\lambda$ ) уменьшается со временем

(возмущение «заостряется») и на развитых стадиях неустойчивости возможна реализация условия  $\lambda \ll h$ . Это означает применимость приближения глубокой жидкости по крайней мере в окрестности формирующейся особенности, что дает дополнительные основания в пользу использования модели (19) и (20) для описания развития ЭГД-неустойчивости.

Использование уравнений (19) и (20) обеспечивает сохранение ряда интегралов движения исходных уравнений (9) и (10). Так, интегрирование уравнения (20) по  $u$  дает закон сохранения массы:

$$\frac{d}{dt} M = 0, \quad M \equiv \int_{-\infty}^{\infty} Y(1 + \hat{T}Y_u) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \eta dx.$$

Полная энергия системы определяется выражениями

$$H = H_{kin} + H_{pot},$$

$$H_{kin} = -\frac{1}{2} \int \Psi \hat{R} \Psi_u du, \quad H_{pot} = -\frac{1}{2} \int Y \hat{T} Y_u du.$$

Подставляя (19) в выражение для кинетической энергии, находим

$$H_{kin} = -\frac{1}{2} \int \hat{H} \hat{T} Y \cdot \hat{H} Y_u du = \frac{1}{2} \int Y \hat{T} Y_u du = -H_{pot}.$$

Как следствие, для нашей модели всегда  $H = 0$ , так что энергия системы сохраняется.

### 5. ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЙ ДЛЯ ЭВОЛЮЦИИ ПОВЕРХНОСТИ

Найдем приближенные решения уравнений движения, описывающие развития ЭГД-неустойчивости заряженной поверхности слоя жидкого гелия конечной толщины. Для бесконечно глубокой жидкости рассмотрение эволюции уединенных возмущений исходно плоской границы сводится к анализу движения особенностей потенциалов скорости и электрического поля в верхней полуплоскости  $v > 0$  [14, 15]. Применим этот подход для случая конечной глубины  $h$ , когда особенности конформного преобразования перемещаются за пределами полосы  $0 < v < -h$ .

Распределения потенциала скорости  $\phi$  и возмущения потенциала электрического поля  $\xi$  в конформных переменных  $u$  и  $v$  однозначно определяются по функциям соответственно  $\Psi$  и  $Y$  при помощи краевых задач:

$$\phi_{uu} + \phi_{vv} = 0, \quad \xi_{uu} + \xi_{vv} = 0, \quad -h < v < 0,$$

$$\begin{aligned}\phi &= \Psi(u, t), \quad \xi = Y(u, t), \quad v = 0, \\ \phi_v &= 0, \quad \xi = 0, \quad v = -h, \\ \phi &\rightarrow 0, \quad \xi \rightarrow 0, \quad u \rightarrow \pm\infty.\end{aligned}$$

При этом считаем, что временная эволюция функций  $\Psi$  и  $Y$  определяется модельными уравнениями (19) и (20).

Как видно из уравнений для потенциалов  $\phi$  и  $\xi$ , особенности существуют парами — соответственно симметрично и антисимметрично относительно дна  $v = -h$ . Так, пусть имеется пара логарифмических особенностей потенциалов в точках  $\{u, v\} = \{0, a(t)\}$  и  $\{u, v\} = \{0, -b(t)\}$ :

$$\begin{aligned}\phi(u, v, t) &= \frac{q}{2} \ln [u^2 + (v - a)^2] + \\ &+ \frac{q}{2} \ln [u^2 + (v + b)^2], \quad (21)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\xi(u, v, t) &= \frac{q}{2} \ln [u^2 + (v - a)^2] - \\ &- \frac{q}{2} \ln [u^2 + (v + b)^2], \quad (22)\end{aligned}$$

где  $a > 0$ , из соображений симметрии  $b = 2h + a$ , а  $q$  — некоторая постоянная. Выражения (21) и (22) соответствуют следующей форме, в которой мы ищем величины  $Y$  и  $\Psi$ :

$$\Psi(u, t) = \frac{q}{2} \ln (u^2 + a^2)(u^2 + b^2), \quad (23)$$

$$Y(u, t) = \frac{q}{2} \ln \frac{u^2 + a^2}{u^2 + b^2}. \quad (24)$$

Отметим, что данное представление для функций  $\Psi$  и  $Y$  удовлетворяет условию (19).

Форма поверхности, в соответствии с (7), описывается параметрическими выражениями  $y = Y(u, t)$  и  $x = X(u, t)$  (роль параметра играет  $u$ ). При этом функция  $Y$  задается уравнением (24), а для функции  $X$  имеем

$$X(u, t) = u - q \operatorname{arctg} \frac{u}{a} - q \operatorname{arctg} \frac{u}{b}. \quad (25)$$

Возмущение поверхности, соответствующее выражениям (24) и (25), является пространственно-локализованным. При  $u \rightarrow \pm\infty$  получим в основном порядке

$$y \rightarrow -2qh(a+h)/u^2, \quad x \rightarrow u,$$

так что

$$\eta \rightarrow -2qh(a+h)/x^2, \quad x \rightarrow \pm\infty.$$

Как следствие подобного асимптотического поведения функции  $\eta$ , интеграл  $M = \int \eta dx$  (он характеризует объем жидкости, соответствующий локализованному возмущению поверхности) оказывается финитным.

Полагая представления для потенциалов (21) и (22) структурно-устойчивыми, рассмотрим движение особенностей в плоскости  $\{u, v\}$ . Подставляя (24) в уравнение (20) для эволюции границы, получим после несложных преобразований

$$\left(\frac{1}{a_t} + 1\right) \left(1 - \frac{u^2}{ab}\right) = \frac{q}{a} + \frac{q}{b}. \quad (26)$$

Рассмотрев предел  $h \rightarrow \infty$ , приходим к следующему нелинейному обыкновенному дифференциальному уравнению:

$$a_t(1 - q/a) = -1.$$

Это уравнение, описывающее движение отдельной логарифмической особенности для бесконечно глубокой жидкости, является точным [14, 15].

При выполнении условия  $|q| \ll a$  выражение (26) дает  $a_t = -1$ . Как следствие, особенности вне зависимости от глубины слоя жидкости двигаются с постоянной скоростью по направлению к поверхности. Это соответствует линейному приближению при рассмотрении эволюции возмущений плоской поверхности. Амплитуда возмущения при этом будет нарастать. Это неизбежно приведет к тому, что, когда  $a$  и  $|q|$  станут сравнимыми, линейное приближение потеряет свою применимость и возникнет необходимость учета влияния нелинейности.

Для описания нелинейных стадий развития неустойчивости поверхности при конечном  $h$  положим в выражении (26)  $u = 0$ . Это соответствует рассмотрению движения границы жидкого гелия в окрестности экстремума  $\eta_x = 0$ . В итоге получим обыкновенное дифференциальное уравнение, описывающее движение пары симметрично расположенных относительно дна особенностей:

$$\frac{1}{a_t} = \frac{q}{a} + \frac{q}{b} - 1. \quad (27)$$

Это уравнение легко интегрируется. Его решение имеет вид

$$a - q \ln(a^2 + 2ha) = a_0 - q \ln(a_0^2 + 2ha_0) + t_0 - t, \quad (28)$$

где  $a_0$  — координата особенности в начальный момент времени  $t = t_0$ .

Сравнивая соотношения (27) и (26), несложно указать область применимости модели эволюции

уединенного возмущения поверхности, основанной на выражениях (24) и (25) для формы поверхности и уравнения (28) для описания движения особенности. На нелинейных стадиях неустойчивости, когда условие  $|q| \ll a$  не выполняется, областью применимости приближенных решений будет

$$u^2 \ll a \max(a, h). \quad (29)$$

В разд. 7 мы продемонстрируем, что при формировании точки заострения на поверхности жидкости определяемый данным неравенством диапазон изменения переменной  $u$  оказывается достаточно широким. Как следствие, приближенные решения (24), (25) и (28) адекватно описывают эволюцию уединенного возмущения заряженной поверхности слоя жидкого гелия конечной толщины.

### 6. ДИНАМИКА ФОРМИРОВАНИЯ ОСОБЕННОСТИ

Считаем, что эволюция поверхности жидкости описывается уравнениями (24), (25) и (27). Рассмотрим геометрию поверхности вблизи оси симметрии  $u = 0$  для возмущения. Разлагая уравнения (24) и (25) для формы границы в степенной ряд по  $u$ , находим

$$Y(u, t) = q \ln \frac{a}{b} + \frac{q}{2} \left( \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right) u^2 + \dots, \quad (30)$$

$$X(u, t) = \left( 1 - \frac{q}{a} - \frac{q}{b} \right) u + \frac{q}{3} \left( \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} \right) u^3 + \dots \quad (31)$$

Как следует из этих выражений, критерием формирования особенности на поверхности является обращение в нуль коэффициента при линейном члене в разложении  $X$  по  $u$ :

$$\frac{q}{a} + \frac{q}{b} = 1. \quad (32)$$

Действительно, в этом случае получим

$$y - Y_0 \sim u^2, \quad x \sim u^3,$$

где мы обозначили  $Y_0 = Y(0, t_c)$ , а  $t_c$  — момент формирования особенности. Исключая отсюда параметр  $u$ , для формы поверхности находим

$$y - Y_0 \sim |x|^{2/3},$$

что соответствует точке заострения (рис. 2). Подобные особенности аналогичны формирующимся на

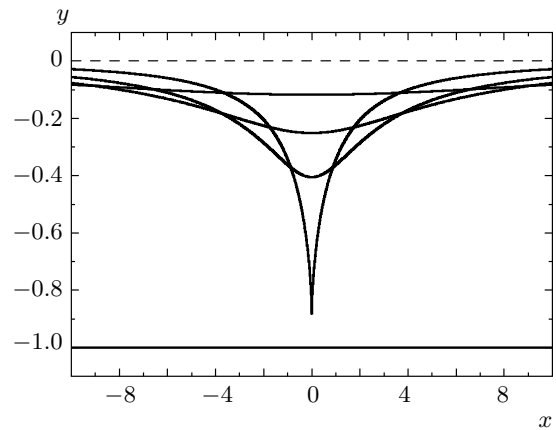


Рис. 2. Эволюция поверхности на стадии формирования заостренной лунки для  $h = 1$  и  $q = 1$ . Сплошной горизонтальной прямой изображено дно ( $y = -h$ ), а штриховой — положение поверхности в невозмущенном состоянии системы ( $y = 0$ ). Форма поверхности приведена в последовательные моменты времени  $t \approx t_c - 10.497$  ( $a = 16$ ),  $t \approx t_c - 3.017$  ( $a = 7$ ),  $t \approx t_c - 0.982$  ( $a = 4$ ) и  $t = t_c$  ( $a = \sqrt{2}$ )

поверхности жидкого гелия в пределе бесконечной глубины [14, 15].

Условие (32), очевидно, может быть реализовано только при  $q > 0$  (в этом случае  $M < 0$ ; возмущение поверхности направлено «вниз»). Сравнивая (32) и правую часть обыкновенного дифференциального уравнения (27), обнаруживаем, что в момент формирования точки заострения скорость движения логарифмической особенности в плоскости  $\{u, v\}$  обращается в бесконечность.

Из условия (32) можно определить значения  $a$  и  $b$ , соответствующие моменту формирования особенности:

$$a_c \equiv a(t_c) = q - h + \sqrt{q^2 + h^2},$$

$$b_c \equiv b(t_c) = q + h + \sqrt{q^2 + h^2}.$$

Отметим, что при любых  $h$  справедливо неравенство

$$q \leq a_c \leq 2q, \quad (33)$$

которым мы воспользуемся ниже.

Определим теперь характер сингулярного поведения функции  $a(t)$  и, соответственно, функции  $b(t) = 2h + a(t)$  при  $t \rightarrow t_c$ . Положим

$$a(t) = a_c + \delta(t), \quad b(t) = b_c + \delta(t), \quad (34)$$

где  $|\delta| \ll a_c$ . Подставив эти соотношения в уравнение (27), в основном порядке разложения по  $\delta$  получим



$$\left(\frac{q}{a_c^2} + \frac{q}{b_c^2}\right) \delta \delta_t \approx -1.$$

Отсюда следует, что зависимость функции  $\delta$  от времени имеет корневую особенность:

$$\delta \approx \sqrt{\tau}, \quad \tau = \frac{2a_c b_c (a_c + b_c)}{a_c^2 + b_c^2} (t_c - t). \quad (35)$$

Сам момент формирования особенности  $t_c$  можно определить из уравнения (28), положив в нем  $a = a_c$ :

$$t_c = a_0 - a_c - q \ln \frac{a_0^2 + 2ha_0}{a_c^2 + 2ha_c} + t_0.$$

Подставляя выражения (34) и (35) в (30) и (31), для эволюции поверхности на стадии формирования точки заострения в основном порядке разложения по  $u$  и по  $\tau$  получим

$$Y(u, t) \approx Y_0 + \left(\frac{q}{a_c} - \frac{q}{b_c}\right) \sqrt{\tau} + \left(\frac{q}{a_c^2} - \frac{q}{b_c^2}\right) \frac{u^2}{2}, \quad (36)$$

$$X(u, t) \approx \left(\frac{q}{a_c^2} + \frac{q}{b_c^2}\right) u \sqrt{\tau} + \left(\frac{q}{a_c^3} + \frac{q}{b_c^3}\right) \frac{u^3}{3}. \quad (37)$$

Определим амплитуду возмущения поверхности как  $A(t) \equiv \eta|_{x=0} \equiv Y|_{u=0}$ . В соответствии с (36) имеем при  $t \rightarrow t_c$

$$A - Y_0 \sim \sqrt{t_c - t}, \quad Y_0 = q \ln(a_c/b_c).$$

Как следствие, скорость движения поверхности в особой точке становится бесконечной:

$$A_t \sim -(t_c - t)^{-1/2}.$$

Аналогичным образом ведет себя при  $t \rightarrow t_c$  и напряженность электрического поля:

$$|\nabla\varphi| = X_u^{-1}|_{u=0} \sim (t_c - t)^{-1/2}.$$

Она обращается в бесконечность за конечное время в точке  $u = 0$ .

Максимальная (по абсолютному значению) амплитуда решения реализуется в момент формирования особенности:

$$A_c \equiv |Y_0| = q \ln \frac{q + h + \sqrt{q^2 + h^2}}{q - h + \sqrt{q^2 + h^2}}. \quad (38)$$

Из этого соотношения следует, что при фиксированном  $q$  амплитуда  $A_c$  монотонно растет с увеличением глубины  $h$ . Введем для удобства приведенную амплитуду  $\tilde{A}_c \equiv A_c/h$ . Выражение (38) перепишется в виде

$$\tilde{A}_c = \tilde{q} \ln \frac{\tilde{q} + 1 + \sqrt{\tilde{q}^2 + 1}}{\tilde{q} - 1 + \sqrt{\tilde{q}^2 + 1}},$$

где  $\tilde{q} = q/h$ . Из этой зависимости следует, что

$$\tilde{A}_c \approx -\tilde{q} \ln \tilde{q}, \quad 0 < \tilde{q} \ll 1,$$

$$\tilde{A}_c \approx 1 - 1/6\tilde{q}^2, \quad \tilde{q} \gg 1.$$

Таким образом,  $\tilde{A}_c \rightarrow 0$  при  $\tilde{q} \rightarrow 0$  и  $\tilde{A}_c \rightarrow 1$  при  $\tilde{q} \rightarrow \infty$ . Последнее означает, что для мелкой воды ( $h \ll q$ ) формирование особенности происходит в момент, когда свободная поверхность почти касается дна. Остающееся до дна расстояние определяется выражением  $h - A_c \approx h^3/6q^2$ .

Обсудим теперь динамику поверхности для случая  $q < 0$ , когда формирования особенности за конечное время не происходит ( $M > 0$ , возмущение направлено «вверх»). Из уравнения (28) видно, что  $a$  монотонно уменьшается, стремясь при  $t \rightarrow \infty$  к нулю как  $\exp(-t/|q|)$ . Амплитуда возмущения поверхности при этом растет линейно,  $A \propto t$ .

В следующем разделе обсудим, каким образом решения для эволюции поверхности согласуются с условиями применимости нашей модели.

## 7. УСЛОВИЯ ПРИМЕНИМОСТИ РЕШЕНИЙ

На начальной стадии развития неустойчивости поверхности жидкого гелия, описываемой линейными уравнениями движения (11) и (12), выражения (24), (25) и (28) дают точное частное решение для эволюции поверхности. Критерием применимости линейного приближения в терминах входящих в это решение параметров является  $|q| \ll a(t)$ . На стадиях развитой неустойчивости, когда это условие нарушается, для описания динамики поверхности мы используем нелинейное модельное уравнение (20). Область значений переменной  $u$ , в которой выражения (24), (25) и (28) с достаточной точностью аппроксимируют решения (20), задается неравенством (29).

Для качественного описания эволюции уединенных возмущений поверхности удобно ввести параметр  $\lambda(t)$ , характеризующий продольный масштаб возмущения. Определим его как значение переменной  $u$ , при котором наклон поверхности  $\eta_x \equiv Y_u/X_u$  будет экстремальным. Вводимый подобным образом масштаб задает наиболее интересную для нас область поверхности жидкости,  $|u| < \lambda$ , в которой, в частности, происходит формирование особенности. Необходимо, чтобы для полученных нами решений

условие (29) выполнялось именно в этой области. В таком случае оно может быть переписано в виде

$$\lambda^2 \ll a \max(a, h). \tag{39}$$

Проверим, справедливо ли это неравенство для выражений (24), (25) и (28).

При  $q > 0$  для доказательства применимости наших решений на стадии формирования сингулярности принципиальное значение имеет то обстоятельство, что появление точки заострения не связано с выходом особенности потенциала скорости на поверхность жидкости. Параметр  $a$  модели (расстояние логарифмической особенности потенциала до поверхности в конформных переменных), входящий в правую часть неравенства (39), не обращается в нуль; в соответствии с оценкой (33) он остается конечным. В таком случае из (39) при  $t \rightarrow t_c$  получим

$$\lambda^2 \ll q \max(q, h). \tag{40}$$

Для нахождения  $\lambda$  воспользуемся разложениями (36) и (37) вблизи особой точки. Находим

$$\frac{Y_u}{X_u} \approx \frac{(a_c^{-2} - b_c^{-2})u}{\delta(a_c^{-2} + b_c^{-2}) + (a_c^{-3} + b_c^{-3})u^2}.$$

Наклон поверхности экстремален, т. е. выполняется условие  $(Y_u/X_u)_u = 0$ , при

$$u^2 = \delta \frac{a_c^{-2} + b_c^{-2}}{a_c^{-3} + b_c^{-3}} \equiv \lambda^2.$$

Подставляя полученное выражение для  $\lambda^2$  в неравенство (40), а также учитывая соотношение (35) для временной динамики функции  $\delta$ , для критерия применимости наших решений находим окончательно

$$\sqrt{q(t_c - t)} \ll \max(q, h).$$

Видно, что левая часть этого выражения обращается в нуль при  $t \rightarrow t_c$ , а правая остается конечной. Как следствие, это неравенство выполняется при любых значениях параметров  $q > 0$  и  $h$ , а наша модель адекватно описывает эволюцию поверхности на стадии формирования особенности при произвольной глубине жидкости.

При  $q < 0$ , когда эволюция поверхности не приводит к формированию особенности за конечное время, получим непосредственно из выражений (24) и (25), что при  $t \rightarrow \infty$  (при этом  $a \rightarrow 0$ ) справедливо

$$\lambda^2 \approx \frac{2ah|q|}{2h + |q|}.$$

Подставляя это соотношение в неравенство (39), находим  $|q| \ll h$ , что имеет смысл условия глубокой

жидкости. Этот предел не представляет для нас интереса в рамках настоящей работы; точные решения соответствующих уравнений движения были получены нами ранее [14, 15].

### 8. УСТОЙЧИВОСТЬ НАРАСТАЮЩЕЙ ВЕТВИ

Для описания динамики заряженной поверхности слоя жидкости конечной глубины мы воспользовались моделью (19) и (20), что соответствует рассмотрению только растущих со временем возмущений. Возможность отдельного рассмотрения растущих и затухающих со временем возмущений в рамках трехмерных уравнений движения для бесконечно глубокой жидкости была продемонстрирована в работах [14, 15]. Более того, удалось доказать [15, 21], что соответствующие нарастающим решениям редуцированные уравнения (ими оказываются трехмерные уравнения лапласовского роста) описывают асимптотическое поведение системы. Иными словами, эта ветвь решений оказывается устойчивой по отношению к малым возмущениям. При доказательстве устойчивости нами вводился ряд ограничений на геометрию поверхности. Так, в частности, считалось, что функция  $\eta$ , задающая отклонение поверхности от плоской, должна быть однозначной функцией пространственных переменных. В настоящем разделе мы покажем, что в двумерной геометрии использование конформных переменных позволяет снять это ограничение.

Рассмотрим эволюцию заряженной поверхности слоя жидкого гелия для случая, когда глубина слоя жидкости значительно превышает характерную длину волны. В этом пределе, как было показано в разд. 4, уравнениями движения в конформных переменных являются (15) и (16). Проведем анализ устойчивости редуций (17) и (18) этих уравнений. Рассмотрим в первую очередь нарастающую ветвь  $\Psi = Y$ . Положим

$$\Psi = Y + \delta,$$

где  $\delta$  — некоторое возмущение. Уравнения (15) и (16) при переходе от функции  $\Psi$  к новой функции  $\delta$  принимают следующий вид:

$$Y_t - Y_t \hat{H} Y_u + Y_u \hat{H} Y_t + \hat{H} Y_u = -\hat{H} \delta_u, \tag{41}$$

$$\delta_t - \delta_t \hat{H} Y_u + \delta_u \hat{H} Y_t + \hat{H} (Y_t \delta_u - Y_u \delta_t) - \hat{H} \delta_u = 0, \tag{42}$$

где второе уравнение получено вычитанием (16) из (15).

Линейное по  $\delta$  уравнение (42) описывает эволюцию возмущения  $\delta$  на фоне эволюции  $Y$ . Пусть характерный пространственный масштаб изменения функции  $\delta$  много меньше характерного масштаба для  $Y$ . Тогда при анализе эволюции возмущения можно считать функцию  $Y$  и ее производные константами. Из уравнения (42) получаем

$$\delta_t - \delta_t \hat{H}Y_u + \delta_u \hat{H}Y_t + Y_t \hat{H}\delta_u - Y_u \hat{H}\delta_t - \hat{H}\delta_u = 0.$$

Для построения дисперсионного соотношения подставим сюда  $\delta$  в виде  $\delta \propto \exp(iku - i\omega t)$ . В итоге находим

$$\omega = ipk, \quad p = -\frac{1 - Y_t + i\hat{H}Y_t}{1 - \hat{H}Y_u - iY_u}.$$

Характер поведения возмущения  $\delta$  полностью определяется значением параметра  $p$ . Амплитуда возмущения будет затухать при  $\gamma \equiv \text{Re} p < 0$  и нарастать при  $\gamma > 0$  как  $\exp(\gamma kt)$ . Для  $\gamma$  имеем

$$\gamma = -\frac{1 - Y_t + Y_t \hat{H}Y_u - Y_u \hat{H}Y_t - \hat{H}Y_u}{(1 - \hat{H}Y_u)^2 + Y_u^2}.$$

Можно заметить, что числитель этого выражения близок по структуре к уравнению (41). С его помощью находим

$$\gamma = -\frac{1 + \hat{H}\delta_u}{(1 - \hat{H}Y_u)^2 + Y_u^2}.$$

Полагая, что амплитуда возмущения достаточно мала,  $|\hat{H}\delta_u| \ll 1$ , получим следующее отрицательно определенное выражение для  $\gamma$ :

$$\gamma = -J^{-1} < 0, \quad J = X_u^2 + Y_u^2, \quad (43)$$

где  $J$  — якобиан конформного отображения на свободной поверхности. Это и доказывает устойчивость редукции  $Y = \Psi$  по отношению к малым возмущениям.

Поскольку для нашей задачи переменная  $v$  совпадает с точностью до знака с потенциалом электрического поля  $\varphi$ , для якобиана справедливо  $J^{-1} = (\nabla\varphi)^2$ . Следовательно, абсолютное значение  $\gamma$  пропорционально квадрату плотности поверхностного заряда. Поскольку при деформации поверхности заряд стекает с выступов и скапливается в лунках, характерные времена релаксации возмущений на выступах будут больше, чем в лунках.

Анализ устойчивости затухающей ветви  $\Psi = -Y$  приводит к дисперсионному соотношению

$$\omega = ipk, \quad p = \frac{1 + Y_t - i\hat{H}Y_t}{1 - \hat{H}Y_u - iY_u}.$$

По аналогии с (43), получим  $\gamma = J^{-1} > 0$ . Как следствие, будет происходить экспоненциальный рост возмущений  $\delta \equiv \Psi + Y$ .

Таким образом, мы продемонстрировали устойчивость приводящей к уравнению лапласовского роста редукции  $Y = \Psi$  исходных уравнений движения (15) и (16) по отношению к малым мелкомасштабным возмущениям  $\delta = \Psi - Y$ . При доказательстве мы не использовали каких-либо существенных ограничений на вид функции  $Y$ . Так, мы не требовали, чтобы  $\eta$  являлась однозначной функцией переменной  $x$ . Отметим, что для уравнения лапласовского роста известно бесконечное число точных частных решений, для которых условие однозначности функции  $\eta$  не выполняется [26, 28, 29].

Мы считаем, что выводы, касающиеся устойчивости редуцированных уравнений движения бесконечно глубокой жидкости, могут быть распространены на развиваемую в предыдущих разделах модель эволюции нарастающих со временем возмущений заряженной поверхности слоя жидкого гелия конечной глубины.

## 9. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе мы продемонстрировали, что эволюцию свободной заряженной поверхности слоя жидкого гелия конечной глубины можно эффективно исследовать в двумерной геометрии с использованием конформных переменных. Необходимое условие применимости подобного подхода — полная экранировка поля над поверхностью жидкости. В этом случае потенциалы электрического поля и поля скорости имеют одинаковую область определения, которую можно конформно отобразить в горизонтальную полосу. Это позволяет рассматривать эволюцию поверхности за рамками традиционно используемого при анализе поверхностных волн приближения малости углов наклона поверхности. Так, нам удалось описать развитие неустойчивости поверхности вплоть до формирования на ней особенностей — точек заострения, в которых кривизна поверхности становится бесконечной за конечное время как  $(t_c - t)^{-1}$ , а скорость жидкости и напряженность поля — как  $(t_c - t)^{-1/2}$ .

Важным результатом исследования является то, что поведение системы на стадии формирования особенности является универсальным — конечность  $h$  не влияет существенно на характер динамики поверхности вблизи особой точки. Это может быть

объяснено тем, что на стадиях развитой неустойчивости, когда напряженность поля индуцированных вблизи формирующейся особенности зарядов значительно превышает напряженность внешнего поля, а характерный пространственный масштаб поверхности, оцениваемый, например, по радиусу кривизны поверхности, становится много меньше глубины слоя жидкости, мы локально получаем ситуацию, аналогичную пределу бесконечно глубокой жидкости. В окрестности особой точки влияние дна становится несущественным, что и обуславливает универсальность поведения жидкости.

Действительно, рассмотрение динамики формирования точек заострения на поверхности жидкости показывает, что как для бесконечно глубокой жидкости (точные решения работ [14, 15]), так и для слоя жидкости конечной глубины (разд. 6) мы получаем особенности одного и того же вида:  $y^3 \propto x^2$ . По мнению авторов работ [26, 30], подобные особенности являются особенностями общего положения для процессов, описываемых уравнениями лапласовского роста. С математической точки зрения, появление особенностей на поверхности жидкости связано с обращением в нуль якобиана конформного отображения  $\{x, y\} \rightarrow \{u, v\}$ . Сингулярные решения уравнений движения жидкого гелия с заряженной границей отражают наблюдавшуюся в экспериментах тенденцию к появлению на свободной поверхности углублений, заостряющихся за конечное время [6, 7].

Работа выполнена при поддержке РФФИ-Урал (грант № 07-02-96035), Совета по грантам при Президенте РФ (проект МД-2553.2007.2) и Фонда «Династия» в рамках Целевой программы поддержки междисциплинарных проектов УрО РАН и СО РАН и Программы Президиума РАН «Фундаментальные проблемы нелинейной динамики».

## ЛИТЕРАТУРА

1. M. W. Cole and M. H. Cohen, Phys. Rev. Lett. **23**, 1238 (1969).
2. В. Б. Шикин, ЖЭТФ **58**, 1748 (1970).
3. В. И. Мельников, С. В. Мешков, Письма в ЖЭТФ **33**, 222 (1981).
4. В. Б. Шикин, Ю. П. Монарха, *Двумерные заряженные системы в гелии*, Наука, Москва (1989).
5. В. Б. Шикин, Письма в ЖЭТФ **78**, 930 (2003).
6. А. П. Володин, М. С. Хайкин, В. С. Эдельман, Письма в ЖЭТФ **26**, 707 (1977).
7. В. С. Эдельман, УФН **130**, 675 (1980).
8. М. Д. Габович, УФН **140**, 137 (1983).
9. L. M. Baskin, A. V. Batrakov, S. A. Popov, and D. I. Proskurovsky, IEEE Trans. Dielec. Electr. Insul. **2**, 231 (1995).
10. L. Oddershede and S. R. Nagel, Phys. Rev. Lett. **85**, 1234 (2000).
11. G. I. Taylor, Proc. Roy. Soc. London A **280**, 383 (1964).
12. А. А. Левченко, Г. В. Колмаков, Л. П. Межов-Деглин и др., ФНТ **25**, 333 (1999).
13. Л. П. Горьков, Д. М. Черникова, ДАН СССР **228**, 829 (1976).
14. Н. М. Зубарев, Письма в ЖЭТФ **71**, 534 (2000).
15. Н. М. Зубарев, ЖЭТФ **121**, 624 (2002).
16. А. И. Дуаченко, Е. А. Кузнецов, М. Д. Спектор, and V. E. Zakharov, Phys. Lett. A **221**, 73 (1996).
17. А. И. Дьяченко, В. Е. Захаров, Е. А. Кузнецов, Физика плазмы **22**, 916 (1996).
18. А. И. Дьяченко, ДАН **376**, 27 (2001).
19. V. P. Ruban, Phys. Lett. A **340**, 194 (2005).
20. Д. М. Черникова, ФНТ **2**, 1374 (1976).
21. N. M. Zubarev, Phys. Fluids **18**, 028103 (2006).
22. G. Sh. Boltachev, N. M. Zubarev, and O. V. Zubareva, Phys. Rev. E **77**, 056607 (2008).
23. В. Е. Захаров, ПМТФ **2**, 86 (1968).
24. Е. А. Кузнецов, М. Д. Спектор, ЖЭТФ **71**, 262 (1976).
25. В. Е. Захаров, Е. А. Кузнецов, УФН **167**, 1137 (1997).
26. S. D. Howison, SIAM J. Appl. Math. **46**, 20 (1986).
27. М. В. Mineev, Physica D **43**, 288 (1990).
28. М. В. Mineev-Weinstein and S. P. Dawson, Phys. Rev. E **50**, R24 (1994).
29. S. P. Dawson and M. Mineev-Weinstein, Phys. Rev. E **57**, 3063 (1998).
30. D. Bensimon, L. P. Kadanoff, Sh. Liang et al., Rev. Mod. Phys. **58**, 977 (1986).