

КОЛЛАПС И ВОЗРОЖДЕНИЕ ОСЦИЛЛЯЦИЙ ДОПЛЕРА – РАБИ ДВИЖУЩЕГОСЯ В РЕЗОНАТОРЕ АТОМА

*А. В. Козловский**

*Физический институт Российской академии наук им. П. Н. Лебедева
119991, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 28 апреля 2008 г.

Исследуется явление коллапса и возрождения осцилляций Доплера – Раби движущегося в электромагнитном поле двухуровневого атома. Для анализа динамики электронного состояния атома используется точный численный расчет, а также приближенный аналитический метод стационарной фазы, применяемый совместно с формулой суммирования Пуассона. Показано, что характер процессов коллапса и возрождения в случае движущегося атома качественно отличается от случая неподвижного атома. Квантовые возрождения осцилляций Доплера – Раби возникают при этом с периодом, определяемым величиной доплеровского сдвига частоты перехода атома, и носят регулярный повторяющийся характер. Условием возникновения такого режима осцилляций Доплера – Раби является выполнение соотношения $\Omega_R \ll \Omega_D$ между частотой Раби и частотой доплеровского сдвига. При обратном соотношении эффект коллапса и возрождения в общем случае отсутствует. Показано, что даже незначительная отстройка частоты перехода от частоты поля приводит к снятию эффекта коллапса и возрождения. Анализ проведен как для когерентного состояния, так и для теплового состояния поля.

PACS: 42.50.Ct, 42.50.Pq, 32.80.-t

1. ВВЕДЕНИЕ

Одним из наиболее ярких проявлений квантовой природы взаимодействия атома с электромагнитным полем является эффект коллапса и возрождения осцилляций Раби населенностей электронных состояний атома. Как показал анализ, выполненный для взаимодействия покоящегося атома с одномодовым электромагнитным полем в когерентном [1–7], тепловом (хаотическом) [8] и квадратурно-сжатом [9, 10] состояниях, в отсутствие процессов диссипации осцилляции Раби затухают на начальном этапе взаимодействия атома с полем, а затем восстанавливаются, но уже с меньшей амплитудой осцилляций. Для последующих моментов времени этапы затухания (коллапса) и возрождения осцилляций Раби периодически повторяются, при этом длительность возрождений возрастает, а амплитуда убывает, что приводит при большом времени взаимодействия к перекрыванию в каждый момент времени предыдущих возрождений с последующими, и,

вследствие этого, в дальнейшем осцилляции Раби принимают нерегулярный характер.

Явление коллапса и возрождения для атома с покоящимся центром масс достаточно хорошо исследовано теоретически [1–11], а также наблюдалось экспериментально [12]. В то же время вопрос о характере этого явления в условиях, когда центр масс атома движется, оставался до настоящего времени открытым. В настоящей работе нами исследуется динамика взаимодействия одномодового электромагнитного поля в когерентном состоянии с равномерно движущимся двухуровневым атомом. Аналогичные исследования для случая фоковского или вакуумного состояний поля в резонаторе проведены в работах [13–18].

Экспериментальное наблюдение коллапса и возрождения осцилляций Раби проводилось с использованием микромазера [12]. Ридберговские атомы в возбужденном электронном состоянии пропускались через высокочастотный микроволновой резонатор, поле в котором первоначально находилось в тепловом состоянии со средним числом фотонов около единицы. На выходе из резонатора проводилось

*E-mail: kozlovsk@sci.lebedev.ru

измерение электронного состояния атомов. Последовательность таких измерений для различных скоростей атомов, прошедших через резонатор, позволила получить зависимость инверсии атома от времени взаимодействия его с полем. Признаки затухания осцилляций Раби, а также последующего восстановления их наблюдались, как утверждают авторы работы [12], в качественном согласии с теорией. Для теоретической интерпретации экспериментальных данных они использовали предсказания теории, предполагающей неподвижность центров масс атомов. В проведенном в работе [12] эксперименте динамика системы исследовалась на небольшом интервале времени взаимодействия атома с полем, лишь незначительно превышающем период осцилляций Раби, что не позволяет провести детальное сравнение экспериментальных данных с предсказаниями теории. Следует отметить при этом, что для теплового поля и малых значений среднего числа фотонов однозначные проявления возрождения и коллапса осцилляций Раби могут отсутствовать [8]. Отметим также, что локальные понижения и повышения амплитуды осцилляций возникают даже в случае фоковского состояния, при наличии небольшой отстройки частоты поля от частоты перехода атома [17].

Вероятность перехода покоящегося атома из верхнего электронного состояния в нижнее состояние с излучением фотона в условиях точного резонанса $\Delta\omega = \omega_c - \omega_a$ (ω_c и ω_a — частоты поля и атомного перехода) имеет следующую временную зависимость:

$$P_{\downarrow}(t) = \sin^2(\Omega t), \quad (1)$$

где $\Omega = (\mathbf{d}_{\downarrow} \cdot \mathbf{e})E_0\sqrt{n+1}/\hbar$ — частота Раби, $E_0 = \sqrt{\hbar\omega_c/\varepsilon_0 V}$ — вакуумное электрическое поле, \mathbf{d}_{\downarrow} — вектор дипольного момента перехода атома, \mathbf{e} — вектор поляризации электромагнитного поля, n — число фотонов фоковского состояния поля, V — объем резонатора. Если центр масс атома равномерно и прямолинейно движется в поле с пространственной зависимостью $\cos(kz)$, $k = \omega_c/c$ (c — скорость света) с компонентой скорости вдоль оси z резонатора равной v , то эта вероятность имеет вид

$$P_{\downarrow}(t) = \sin^2\left(\frac{\Omega}{\Omega_D} \sin(\Omega_D t)\right), \quad (2)$$

где $\Omega_D = (v/c)\omega_a$ — частота доплеровского сдвига. Из формулы (2) следует, что осцилляции между состояниями атома протекают с частотой Ω только при выполнении условия $\Omega \gg \Omega_D$, в противном случае частота осцилляций значительно отличается от

частоты Раби Ω , а при $\Omega \ll \Omega_D$ вероятность перехода вида

$$P_{\downarrow}(t) = \left(\frac{\Omega}{\Omega_D}\right)^2 \sin^2(\Omega_D t)$$

осциллирует с частотой доплеровского сдвига Ω_D . Расчеты показывают [13–18], что как в условиях резонанса, так и при $\Delta\omega \neq 0$ форма и структура осцилляций Раби движущегося атома существенно отличаются от случая покоящегося атома. Учитывая сказанное выше, осцилляции Раби движущегося атома в дальнейшем будем называть осцилляциями Доплера – Раби. Важной особенностью осцилляций Доплера – Раби является возможность их возникновения с частотой Раби и единичной амплитудой при наличии большой отстройки, в условиях выполнения условия $|\Delta\omega| \approx \Omega_D$. В этом случае сдвиг Доплера эффективно компенсирует отстройку частоты атомного перехода от частоты моды поля (резонанс Доплера – Раби [14, 16–18]).

Решение уравнения Шредингера для атома, движущегося в пространственно-неоднородном поле, в общем случае $\Delta\omega \neq 0$ не может быть проведено аналитически. Вследствие этого, для расчетов динамики системы в настоящей работе мы будем использовать полуаналитические рекуррентные соотношения, полученные ранее в рамках метода одетых состояний [16, 17].

2. ГАМИЛЬТониАН СИСТЕМЫ

Рассмотрим двухуровневый атом, движущийся со скоростью v вдоль оси z одномодового резонатора с плоскопараллельными зеркалами. В дальнейших расчетах будем рассматривать движение центра масс атома классически; операторы положения и импульса центра масс атома заменим c -числовыми векторными величинами. Предполагается, таким образом, что скорость v достаточно велика для того, чтобы эффектом отдачи при поглощении и излучении атомом фотона можно было бы пренебречь. Большая масса атома позволяет в рассматриваемых нами условиях пренебречь изменением скорости движения центра масс атома, возникающим в результате излучения/поглощения атомом фотона.

Оператор поперечной компоненты электрического поля рассматриваемой моды поля в резонаторе с плоскопараллельными зеркалами в представлении вторичного квантования запишем в виде

$$\mathbf{E}_{\perp}(z) = i\sqrt{\frac{\hbar\omega_c}{2\varepsilon_0 V}} \mathbf{e}(\hat{a} - \hat{a}^{\dagger}) \sin kz, \quad (3)$$

где \hat{a}^\dagger (\hat{a}) — операторы рождения (уничтожения) фотонов, V — объем квантования электромагнитного поля (объем резонатора), $k = \omega_c/c$ — постоянная распространения поля.

Оператор дипольного момента определим как

$$\mathbf{d} = \mathbf{d}_\uparrow (|\uparrow\rangle\langle\downarrow| + |\downarrow\rangle\langle\uparrow|), \quad \mathbf{d}_\uparrow = \langle\uparrow|\mathbf{d}|\downarrow\rangle,$$

где $|\uparrow\rangle$ и $|\downarrow\rangle$ — векторы состояний электронов соответственно для верхнего и нижнего уровней атома.

С помощью приближения вращающейся волны находим, что для произвольных ориентаций вектора поляризации и дипольного момента оператор взаимодействия атома с полем, включающий обычное дипольное взаимодействие, есть

$$\hat{V}(z = v_z t) = \tilde{g}(t) \hat{a} \hat{\sigma}_+ + \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_- \tilde{g}^*(t), \quad (4)$$

где параметр взаимодействия $\tilde{g}(t)$ имеет вид

$$\tilde{g}(t) = \sqrt{\frac{\omega_c}{2\hbar\epsilon_0 V}} d_\uparrow i(\mathbf{n}_d \cdot \mathbf{e}) \sin kz(t), \quad (5)$$

где $\mathbf{n}_d \equiv \mathbf{d}_\uparrow/d_\uparrow$. Оператор (4) записан с помощью операторов перехода между верхним и нижним состояниями атома: $\hat{\sigma}_+ = |\uparrow\rangle\langle\downarrow|$, $\hat{\sigma}_- = |\downarrow\rangle\langle\uparrow|$. Поскольку нами анализируется случай линейной поляризации электромагнитного поля, радиационные переходы атома будут рассматриваться далее для дипольных переходов с изменением магнитного квантового числа $\Delta m = 0$.

Используя выражения (4) и (5), будем рассматривать гамильтониан неконсервативной, вследствие пространственной неоднородности поля, системы, состоящей из движущегося атома + поле, в следующем виде:

$$\hat{H}(t) = \hbar\omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{\hat{\sigma}^z}{2} \hbar\omega_a + \hbar\hat{W}(t), \quad (6)$$

где $\hat{W}(t) = \hat{V}(z = vt)/\hbar$. Параметр взаимодействия поля с атомом $\tilde{g}(t) = i\hbar g_{E,dip}(t)$, входящий в выражения (4) и (6), содержит член электродипольного взаимодействия вида

$$g_{E,dip}(t) = g \sin(kvt), \quad (7)$$

$$g \equiv g_0(\mathbf{n}_d \cdot \mathbf{e}), \quad (8)$$

где $g_0 \equiv \sqrt{\omega_a/2\hbar\epsilon_0 V} d_\uparrow$. Содержащийся в (6) оператор инверсии населенности атома имеет вид $\hat{\sigma}^z = |\uparrow\rangle\langle\uparrow| - |\downarrow\rangle\langle\downarrow|$.

3. ОДЕТЫЕ СОСТОЯНИЯ И РЕКУРРЕНТНАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ РАСЧЕТА ДИНАМИКИ СИСТЕМЫ

Рассмотрим случай, когда в начальный момент времени t_0 атом находится в возбужденном состоянии, а поле — в произвольной суперпозиции фокковских состояний. Временная эволюция неконсервативной системы, состоящей из взаимодействующих между собой атома и поля, в шредингеровском представлении описывается оператором эволюции, удовлетворяющим интегральному уравнению

$$\hat{U}(t, t_0) = 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t \hat{H}(t') \hat{U}(t', t_0) dt'. \quad (9)$$

Вектор состояния в момент времени t имеет вид

$$|\Psi(t)\rangle = \hat{U}(t, t_0) \sum_{n=0}^{\infty} b_n |\uparrow\rangle|n\rangle \equiv \sum_{n=0}^{\infty} b_n |\psi_n(t)\rangle. \quad (10)$$

Вектор состояния также может быть записан в исходном базисе $|\downarrow, n\rangle = |\downarrow\rangle|n\rangle$, $|\uparrow, n\rangle = |\uparrow\rangle|n\rangle$ в следующем виде:

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} [c_{\uparrow,n}(t) |\uparrow, n\rangle + c_{\downarrow,n}(t) |\downarrow, n\rangle], \quad (11)$$

$$c_{\downarrow,0}(t) = 0.$$

Для вычисления коэффициентов $c_{\uparrow,n}(t)$ и $c_{\downarrow,n}(t)$ воспользуемся методом одетых состояний и рекуррентной процедурой, предложенной в работах [16–18].

Разобьем конечный интервал времени $[t_0, t]$ на большое число $M \gg 1$ малых отрезков Δt и предположим, что внутри каждого из этих отрезков зависимостью гамильтониана системы от времени можно пренебречь. Решая уравнение (9) методом итераций, находим, что временная эволюция системы на каждом из интервалов Δt определяется соотношением

$$|\psi_n(t_j)\rangle = \exp\left[-\frac{i}{\hbar} H(t_j) \Delta t\right] |\psi_n(t_{j-1})\rangle, \quad (12)$$

$$t_j = t_{j-1} + \Delta t, \quad j = 1, M,$$

а вектор состояния системы в конечный момент времени $t = t_M$ — величиной

$$|\psi_n(t)\rangle = \exp\left[-\frac{i}{\hbar} H(t_M) \Delta t\right] \times$$

$$\times \exp\left[-\frac{i}{\hbar} H(t_{M-1}) \Delta t\right] \dots \exp\left[-\frac{i}{\hbar} H(t_1) \Delta t\right] \times$$

$$\times |\psi_n(t_0)\rangle, \quad \Delta t = \frac{t}{M}. \quad (13)$$

Использование представления одетых состояний $|\pm, n\rangle_t$ позволяет записать вектор состояния системы (11) в любой момент времени t в следующем виде:

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \left(A_{n,t}^{(+)} |+, n\rangle_t + A_{n,t}^{(-)} |-, n\rangle_t \right). \quad (14)$$

Содержащиеся в (14) одетые состояния, являющиеся собственными состояниями гамильтониана (6), определяются согласно

$$|+, n\rangle_t = \cos \theta_{n,t} |\downarrow, n+1\rangle + \sin \theta_{n,t} |\uparrow, n\rangle, \quad (15)$$

$$|-, n\rangle_t = -\sin \theta_{n,t} |\downarrow, n+1\rangle + \cos \theta_{n,t} |\uparrow, n\rangle, \quad (16)$$

где зависящие от времени параметры одетых состояний, диагонализующих рассматриваемый нами гамильтониан, есть

$$\theta_{n,t} = \arctg \frac{g(t)\sqrt{n+1}}{\Delta\omega/2 + \Omega_n^{(+)}(t)}. \quad (17)$$

При этом для динамической (зависящей от времени) n -фотонной частоты Раби атома [17] совместно с (17) находим

$$\Omega_n^{(\pm)}(t) = \pm \sqrt{\left(\frac{\Delta\omega}{2}\right)^2 + |g(t)|^2(n+1)}. \quad (18)$$

Используя соотношения (12), (13) и применяя (15)–(18), приходим к рекуррентной формуле [16–18] для вектора состояния в базисе одетых состояний системы в момент времени t_M при $t_0 = 0$:

$$|\psi_n(t = t_M)\rangle = A_{n,t_M}^{(+)} |+, n\rangle_{t=t_M} + A_{n,t_M}^{(-)} |-, n\rangle_{t=t_M}, \quad (19)$$

где величины $A_{n,t_M}^{(\pm)}$ вычисляются с помощью рекуррентных соотношений

$$A_{n,t_j}^{(+)} = \exp \left[-i\Omega_n^{(+)}(j\Delta t)\Delta t \right] \times \left[A_{n,t_{j-1}}^{(+)} \cos(\Delta\theta_{n,j}) + A_{n,t_{j-1}}^{(-)} \sin(\Delta\theta_{n,j}) \right], \quad (20)$$

$$A_{n,t_j}^{(-)} = \exp \left[-i\Omega_n^{(-)}(j\Delta t)\Delta t \right] \times \left[-A_{n,t_{j-1}}^{(-)} \sin(\Delta\theta_{n,j}) + A_{n,t_{j-1}}^{(+)} \cos(\Delta\theta_{n,j}) \right], \quad (21)$$

где $\Delta\theta_{n,j} \equiv \theta_{n,j} - \theta_{n,j-1}$ для любого $0 < j \leq M$ и

$$A_{n,t_1}^{(+)} = \sin(\theta_{n,1}) \exp \left[-i\Omega_n^{(+)}(t_1)\Delta t \right], \\ A_{n,t_1}^{(-)} = \cos(\theta_{n,1}) \exp \left[-i\Omega_n^{(-)}(t_1)\Delta t \right], \quad (22) \\ t_1 = \Delta t.$$

Коэффициенты $c_{\uparrow n}$ и $c_{\downarrow n}$ разложения волновой функции (11) по базису собственных состояний системы выражаются через коэффициенты разложения $A_{n,t}^{(\pm)}$ в базисе одетых состояний с помощью следующих соотношений:

$$c_{\uparrow,n}(t) = b_n \left(A_{n,t}^{(+)} \sin \theta_{n,t} + A_{n,t}^{(-)} \cos \theta_{n,t} \right) \equiv b_n \sigma_{\uparrow,n}(t), \quad (23)$$

$$c_{\downarrow,n}(t) = b_{n-1} \left(-A_{n-1,t}^{(-)} \sin \theta_{n-1,t} + A_{n-1,t}^{(+)} \cos \theta_{n-1,t} \right) \equiv b_{n-1} \sigma_{\downarrow,n-1}(t), \quad (24)$$

$$c_{\downarrow,0}(t) = 0. \quad (25)$$

Вероятности нахождения выходящих из резонатора атомов в верхнем и нижнем состояниях через коэффициенты разложения волновой функции $c_{\uparrow,n}(t)$ и $c_{\downarrow,n}(t)$ равны

$$P_{\uparrow}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} |c_{\uparrow,n}(t)|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |b_n|^2 |\sigma_{\uparrow,n}(t)|^2, \quad (26)$$

$$P_{\downarrow}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} |c_{\downarrow,n}(t)|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |b_{n-1}|^2 |\sigma_{\downarrow,n-1}(t)|^2, \quad (27)$$

где величины $\sigma_{\uparrow,n}$ и $\sigma_{\downarrow,n-1}$ определены соответственно в (23) и (24).

В качестве исходного состояния поля в резонаторе нами рассматривалось чистое когерентное состояние с амплитудами вероятности вида

$$b_n = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \exp \left(-\frac{|\alpha|^2}{2} \right)$$

(α — комплексная амплитуда когерентного состояния $|\alpha\rangle$, $|\alpha|^2 = \langle n \rangle$ — среднее число фотонов когерентного состояния), а также тепловое (хаотическое) состояние поля, характеризуемое статистикой фотонов Бозе–Эйнштейна:

$$P_n = \frac{\langle n \rangle^n}{(\langle n \rangle + 1)^{n+1}}, \quad \langle n \rangle = \left[\exp \left(\frac{\hbar\omega_c}{k_B T} \right) - 1 \right]^{-1},$$

где T — температура, k_B — постоянная Больцмана.

4. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА СТАЦИОНАРНОЙ ФАЗЫ И ФОРМУЛЫ СУММИРОВАНИЯ ПУАССОНА ДЛЯ АНАЛИЗА ОСЦИЛЛЯЦИЙ ДОПЛера – РАБИ

Предположим, что частота электромагнитного поля совпадает с частотой перехода атома ($\Delta\omega = 0$).

В этом случае уравнение Шредингера для движущегося атома в поле может быть решено аналитически [14, 17] и уравнения для амплитуд вероятности, входящих в выражение (11), имеют вид

$$\dot{c}_{\uparrow,n}(t) = -g_0\sqrt{n+1} \sin(\Omega_D t)c_{\downarrow,n+1}(t), \quad (28)$$

$$\dot{c}_{\downarrow,n+1}(t) = g_0\sqrt{n+1} \sin(\Omega_D t)c_{\uparrow,n}(t). \quad (29)$$

Решая эти уравнения, для амплитуды вероятности перехода атома в нижнее состояние находим

$$c_{\downarrow,n+1}(t) = \cos[\xi_n \cos(\Omega_D t)], \quad (30)$$

$$\xi_n \equiv \frac{\Omega_n}{\Omega_D} = \xi_0\sqrt{n+1}, \quad \Omega_n = g_0\sqrt{n+1}, \quad (31)$$

$$\xi_0 \equiv \frac{g_0}{\Omega_D}.$$

Тогда вероятность перехода в нижнее электронное состояние с излучением фотона в моду поля резонатора, находящегося в начальный момент времени $t = 0$ в когерентном состоянии, есть

$$P_{\downarrow}(t) = \sum_{m=0}^{\infty} P_n(t=0)|c_{\downarrow,n+1}(t)|^2 = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t=0) \{1 + \cos[2\xi_n \cos(\Omega_D t)]\}. \quad (32)$$

Применим для вычисления бесконечной суммы в (32) формулу суммирования Пуассона [19]:

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} dn f(n)e^{2\pi i\nu n} + \frac{1}{2} f_0, \quad (33)$$

где $f(n)$ — непрерывная функция переменной n , аналог дискретного распределения f_n . Подставляя сюда $f_n(t) = \cos[2\xi_n \cos(\Omega_D t)]/2$ из выражения (32), получим

$$\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \cos[2\xi_n \cos(\Omega_D t)] P_n(0) = \frac{1}{2} \times \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} dn \cos[2\xi_0\sqrt{n+1} \cos(\Omega_D t)] P(n)e^{2\pi i\nu n} + \frac{1}{4} \cos[2\xi_0 \cos(\Omega_D t)] P(0). \quad (34)$$

Сумма в правой части последнего выражения содержит интегралы вида

$$p_{\nu}(t) = \text{Re} \int_0^{\infty} dn P(n) \exp[i\Lambda S_{\nu}(n, t)], \quad (35)$$

где

$$\Lambda = 2, \quad S_{\nu}(n, t) \equiv \pi\nu n - \xi_0\sqrt{n+1} \cos(\Omega_D t), \quad (36)$$

целое число $\nu \geq 0$ — индекс суммирования из формулы (33). Предполагая, что зависимость $P(n)$ значительно медленнее зависимости от n функции $\exp[-i\Lambda S_{\nu}(n, t)]$, для вычисления таких интегралов можем воспользоваться приближением стационарной фазы [19].

Асимптотическое приближение стационарной фазы справедливо при $\Lambda \rightarrow \infty$. Поэтому в рассматриваемом нами случае применимость этого приближения оказывается под вопросом. Метод стационарной фазы применялся в работе [10] при $\Lambda = 2$ при исследовании эффекта коллапса и возрождения для исходного поля в резонаторе в сжатом состоянии. Расчеты [10] показали ограниченную применимость этого метода в условиях, когда среднее число фотонов в резонаторе велико. При этом для некоторых значений параметров системы результаты расчета в приближении стационарной фазы не согласуются с точными расчетами даже качественно.

Применим далее для оценок интегралов (35) метод стационарной фазы. Сохраняя только главный член асимптотики интеграла [19], находим

$$p_{\nu}(t) \approx P(n = n_{\nu}) \sqrt{\frac{\pi}{|\partial^2 S_{\nu} / \partial n^2|_{n=n_{\nu}}}} \times \cos \left[2S_{\nu}(n = n_{\nu}, t) + \frac{\pi}{4} \text{sign} \left. \frac{\partial^2 S_{\nu}}{\partial n^2} \right|_{n=n_{\nu}} \right]. \quad (37)$$

Значение n_{ν} находится из условия стационарности фазы S_{ν} :

$$\left. \frac{\partial S_{\nu}(n, t)}{\partial n} \right|_{n=n_{\nu}} = 0. \quad (38)$$

Из соотношений (36) и (38) получаем

$$n_{\nu} = \frac{\cos^2(\Omega_D t)}{(2\pi\nu)^2} \xi_0^2 - 1, \quad \nu > 0. \quad (39)$$

Тогда функция (36) в точке стационарной фазы принимает вид

$$S_{\nu}(n = n_{\nu}, t) = -\frac{\lambda^2(t)}{4\pi\nu} - \pi\nu, \quad (40)$$

где

$$\lambda(t) \equiv \xi_0 \cos(\Omega_D t). \quad (41)$$

Находим также, что

$$\left. \frac{\partial^2 S_{\nu}(n, t)}{\partial n^2} \right|_{n=n_{\nu}} = -\frac{(\pi\nu)^2}{2S_{\nu}(n = n_{\nu}, t)}. \quad (42)$$

Теперь явный вид выражения (35) в рассматриваемых условиях при $\nu > 0$ есть

$$p_\nu(t) \approx P \left(n = \frac{\lambda^2(t)}{(2\pi\nu)^2} - 1 \right) \times \sqrt{\frac{\pi\lambda^2(t)}{2(\pi\nu)^3}} \cos \left[\frac{\lambda^2(t)}{2\pi\nu} - \frac{\pi}{4} \right]. \quad (43)$$

Член суммы для $\nu = 0$ будет вычислен ниже.

Рассмотрим далее случай когерентного состояния исходного поля в резонаторе. Для дискретного распределения фотонов

$$\frac{\langle n \rangle^n}{n!} e^{-\langle n \rangle} = P \left(n = \frac{\lambda^2(t)}{(2\pi\nu)^2} - 1 \right)$$

при условии $n \gg 1$ может быть использована непрерывная гауссовская аппроксимация следующего вида:

$$P_n \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \exp \left[-2 \left(\sqrt{n} - \sqrt{\langle n \rangle} \right)^2 \right], \quad (44)$$

где $\langle n \rangle \equiv |\alpha|^2 = \sum_n n P_n$ — среднее значение числа фотонов.

Используя (44), из выражения (43) находим

$$p_\nu(t) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi\langle n \rangle}} \times \exp \left\{ -2 \left[\frac{1}{2\pi\nu} \sqrt{\frac{\lambda^2(t)}{(2\pi\nu)^2} - 1} - \sqrt{\langle n \rangle} \right]^2 \right\} \times \frac{\lambda(t)}{\pi\sqrt{2\nu^3}} \cos \left[\frac{\lambda^2(t)}{2\pi\nu} - \frac{\pi}{4} \right], \quad (45)$$

откуда следует, что восстановление осцилляций Доплера – Раби возникает в моменты времени, когда показатель экспоненты близок к нулю, т. е. явление возрождения присутствует при

$$t_{r,\nu} = \pm \frac{1}{\Omega_D} \arccos \left(\frac{2\pi\nu}{\xi_0} \sqrt{\langle n \rangle} \right) + m \frac{2\pi}{\Omega_D}. \quad (46)$$

Очевидно, что ν -е восстановление осцилляций возможно, если $(2\pi\nu/\xi_0)\sqrt{\langle n \rangle} < 1$ для данного ν .

Отдельно может быть вычислено слагаемое в выражении (34) с $\nu = 0$, имеющее вид

$$p_{\nu=0}(t) = \text{Re} \left\{ \int_0^\infty dn P(n) \times \exp [2i (-\xi_0 \sqrt{n+1} \cos(\Omega_D t))] \right\} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi\langle n \rangle}} \int_0^\infty dn \exp \left[-2 \left(\sqrt{n} - \sqrt{\langle n \rangle} \right)^{1/2} \right] \times \cos [2\sqrt{n+1}\xi_0 \cos(\Omega_D t)]. \quad (47)$$

Предположим, что $n \gg 1$, и заменим в (47) $\sqrt{n+1} \rightarrow \sqrt{n}$. Используя подстановку $y = \sqrt{n}$ и расширяя область интегрирования (заменяя нижний предел интегрирования $y = 0$ на $-\infty$, поскольку гауссова функция распределения имеет острый максимум при больших n), находим следующее выражение:

$$p_{\nu=0}(t) \approx \exp \left[-\frac{\lambda^2(t)}{2} \right] \cos [2\lambda(t)\sqrt{\langle n \rangle}], \quad (48)$$

откуда видно, что коллапс осцилляций Доплера – Раби, описывается первым сомножителем этого выражения и ярко проявляется при $\lambda^2(t) \gg 1$.

Вероятность перехода атома в нижнее состояние представляет собой сумму:

$$P_\downarrow(t) = \frac{1}{2} p_0(t) + \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^\infty p_\nu(t) + \frac{1}{4} \cos [2\xi_0 \cos(\Omega_D t)] P_0(t=0) + \frac{1}{2}. \quad (49)$$

Анализ формулы (49) и сравнение ее с соответствующим выражением для P_\downarrow , полученным [10] для атома с покоящимся центром масс, указывает на существенное различие характера динамики электронного состояния атома в случае движущегося атома. Как показано в работе [10], в случае покоящегося атома явление возрождения осцилляций Раби описывается членами суммы $p_\nu(t)$ для $\nu \geq 1$, каждый из которых характеризует возрождение с номером ν из их последовательности $\nu = 1, 2, \dots$, а первоначальный коллапс осцилляций описывается членом $p_0(t)$. Из формул (49) и (45), (48) видно, что последовательность возрождений осцилляций Доплера – Раби описывается как членами $p_\nu(t)$, $\nu \geq 1$, так и членом $p_0(t)$. Возрождение осцилляций, характеризующееся членом $p_0(t)$, происходит периодически во времени с периодом $T_{rev} = 2\pi\Omega_D^{-1}$, определяемым доплеровским сдвигом частоты. Кроме того, в отличие от случая покоящегося атома, амплитуда осцилляций

для последующих возрождений не убывает по сравнению с предыдущими возрождениями и длительность возрождений постоянна для всех членов их последовательности.

Из формул (48) и (41) также следует, что при $\Omega_{n=0} \sim \Omega_D$ коллапс осцилляций Доплера–Раби, обусловленный слагаемым $p_0(t)$, отсутствует, поскольку последовательные процессы коллапса и возрождения протекают в этом случае на одном периоде осцилляций и, вследствие этого, накладываются друг на друга. Поскольку члены $p_{\nu=0}(t)$ убывают с ростом ν , основная динамика осцилляций определяется членом $p_{\nu=0}(t)$ вида (48), входящим в выражение (49).

5. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО РАСЧЕТА И СРАВНЕНИЕ ИХ С АНАЛИТИЧЕСКИМИ ДАННЫМИ, ПОЛУЧЕННЫМИ МЕТОДОМ СТАЦИОНАРНОЙ ФАЗЫ ДЛЯ АНАЛИЗА КОЛЛАПСА И ВОЗРОЖДЕНИЯ ОСЦИЛЛЯЦИЙ ДОПЛЕРА–РАБИ АТОМА

Поскольку пространственная зависимость поля стоячей волны в резонаторе имеет вид

$$\sin(kz) = \sin\left(\Omega_D t + \frac{v}{c} \Delta\omega t\right),$$

в условиях резонанса $\Delta\omega = 0$ период осцилляций поля определяется доплеровским сдвигом частоты: $T_D = 2\pi/\Omega_D$. Вследствие этого, картина осцилляций Доплера–Раби атома повторяется во времени с периодом T_D , или на длине пробега атома vT_D , равной удвоенной длине волны поля. Как видно на рис. 1, зависимость вероятности пребывания атома в верхнем электронном состоянии, $P_{\downarrow}(t)$, в интервале времени $[mT_D, (m+1)T_D]$ симметрична относительно его средней точки $(m+1/2)T_D$, т.е. на второй половине периода стоячей волны поля в резонаторе происходит явление «обращения времени» динамики системы.

Аналитическая теория предсказывает регулярные возрождения осцилляций Доплера–Раби для больших чисел фотонов, что подтверждается численными расчетами. Изображенная на рис. 1 кривая, полученная аналитически с помощью формул (49) и (43), (48) при $\langle n \rangle = 100$, $v = 100$ см/с, $g = 10^5$ с⁻¹, удовлетворительно согласуется с точным численным расчетом. Положения возрождений на оси времени совпадают с большой точностью с аналитическими данными, однако амплитуды осцилляций значительно отличаются от точных численных результатов.

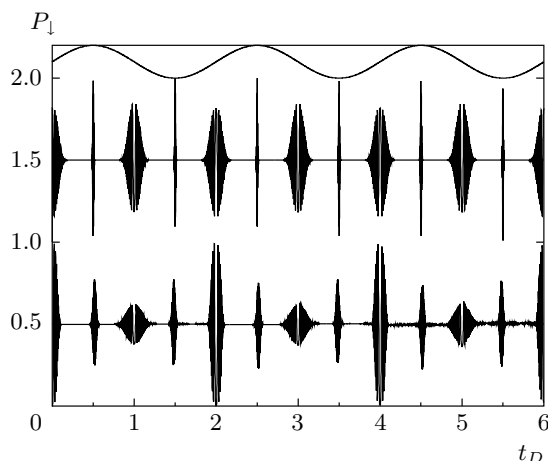


Рис. 1. Зависимость вероятности перехода возбужденного атома в нижнее состояние с излучением фотона, P_{\downarrow} , от безразмерного времени $t_D = \Omega_D t / \pi$. Исходное состояние поля в резонаторе при $t = 0$ — когерентное. Среднее число фотонов $\langle n \rangle = 100$ и отстройка $\Delta\omega = 0$. Нижняя кривая — точный численный расчет; верхняя кривая ($P_{\downarrow}(t) + 1$) — приближенный расчет методом стационарной фазы для тех же значений параметров. Частота перехода атома $\omega_a = 10^{12}$ с⁻¹, константа связи $g = 10^5$ с⁻¹, скорость движения центра масс атома вдоль оси резонатора $v = 10^2$ см/с. Вверху изображена пространственная зависимость поля в резонаторе $\sin(kz(t_D))$. Длина пролета атома в резонаторе $L = vt = 0.565$ см. Отношение частоты Раби к частоте Доплера $\xi = 602.6$, $\xi \equiv \Omega_R / \Omega_D$, $\Omega_R = [(\Delta\omega/2)^2 + g^2(\langle n \rangle + 1)]^{1/2}$

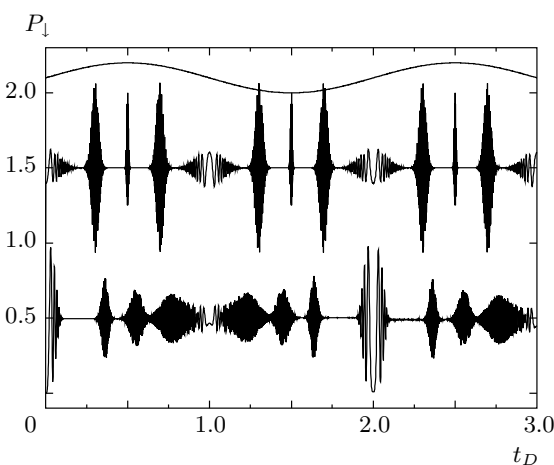


Рис. 2. То же, что на рис. 1, для $\langle n \rangle = 30$, $\omega_a = 10^{11}$ с⁻¹, $v = 10^3$ см/с, $\xi = 333$, $L = vt = 2.827$ см

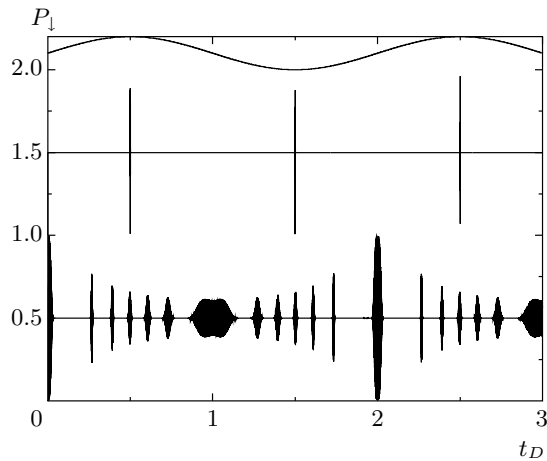


Рис. 3. То же, что на рис. 1, для $\langle n \rangle = 1000$, $g = 10^7 \text{ с}^{-1}$, $v = 10^3 \text{ см/с}$, $\xi = 18970$, $L = vt = 0.28 \text{ см}$

Подобная закономерность присутствует на рис. 2 для меньшего числа фотонов $\langle n \rangle = 30$ и большей скорости движения атома $v = 10^3 \text{ см/с}$. Уменьшение числа фотонов при этом приводит к перекрыванию соседних возрождений и возникновению нерегулярных осцилляций вблизи точки перегиба пространственной моды поля.

Увеличение среднего числа фотонов $\langle n \rangle = 1000$ (и/или рост константы связи g) приводит к росту параметра

$$\xi \equiv \frac{\Omega_R}{\Omega_D}, \quad \Omega_R = \sqrt{\left(\frac{\Delta\omega}{2}\right)^2 + g^2(\langle n \rangle + 1)} = \Omega_{\langle n \rangle}$$

и, вследствие этого, к увеличению числа актов возрождения на периоде $[mT_D, (m + 1)T_D]$ (рис. 3). Как показывает сравнение аналитической оценки с точным расчетом, в условиях, когда значение ξ очень велико, аналитическая оценка качественно отличается от точного численного расчета и воспроизводит только возрождения, возникающие в пучностях поля (рис. 3).

Отметим, также, что при меньших значениях ξ динамика атома на интервалах времени $[mT_D, (m + 1)T_D]$ становится различной для разных m . Так, при малых $m < 10$ для $\langle n \rangle \sim 1000$, $\xi \sim 100$ возрождения появляются только при $t = mT_D$, а на следующем этапе эволюции системы при $m > 10$ последовательно возникает ряд промежуточных возрождений, амплитуда которых увеличивается с ростом m .

Далее рассмотрим случай, когда среднее число фотонов в поле резонатора невелико, а значение па-

раметра ξ очень большое. На рис. 4а изображена динамика населенности нижнего электронного состояния атома при $\langle n \rangle = 50$, $v = 10^3 \text{ см/с}$, $g = 10^7 \text{ с}^{-1}$ для малых значений времени $0 < t < 0.3t_D$. Для таких значений параметров отношение частоты Раби к частоте Доплера $\xi = 4.3 \cdot 10^3$. Точный численный расчет (нижняя кривая на рис. 4а) показал, что динамика системы с учетом движения центра масс атома существенно отличается от случая неподвижного атома. Возрождения осцилляций Доплера – Раби повторяются во времени не через одинаковые промежутки времени, как предсказывает теория для неподвижного атома, а с частотой, возрастающей со временем. Длительности возрождений, как и в случае покоящегося атома, возрастают, и для $t > 0.3t_D$ соседние возрождения перекрываются между собой, в результате чего устанавливается нерегулярная динамика системы, продолжающаяся до момента времени $t = t_D = \pi/\Omega_D$. При $t > \pi/\Omega_D$ эволюция системы протекает в обратном порядке, и при $t = 2\pi/\Omega_D$ восстанавливается исходное состояние системы при $t = 0$. Далее, при $t > 2\pi/\Omega_D$ происходит периодическое повторение уже описанной динамики системы.

Систематические расчеты, проведенные нами, показали, что в пределе $v \rightarrow 0$ характерная для осцилляций Доплера – Раби движущегося атома повторяющаяся во времени динамика системы атом + поле, в процессе которой система возвращается в свое исходное состояние через равные промежутки времени $2t_D$, отсутствует при $v \rightarrow 0$. При малых скоростях атома, в согласии с моделью Джейнса – Каммингса для когерентного состояния электромагнитного поля, последовательность коллапсов и возрождений, присутствующая на начальном этапе взаимодействия атома с полем, с ростом времени сменяется необратимой хаотической динамикой системы.

Перейдем к рассмотрению вопроса о влиянии отстройки частоты перехода атома от частоты поля на эффект коллапса и возрождения. Систематические расчеты, проведенные нами, показали, что присутствие отстройки приводит к снятию эффектов коллапса и возрождения осцилляций Доплера – Раби. Как показано на рис. 4б, при отстройке $\Delta\omega = 0.2\Delta$, $\Delta \equiv g\sqrt{\langle n \rangle + 1}$ динамика системы имеет регулярный характер с периодом π/Ω_D , причем в точках перегиба пространственной модовой функции электромагнитного поля в резонаторе вероятность перехода в нижнее состояние атома с излучением фотона всегда равна нулю. Максимальное значение вероятности достигается в пучностях поля. На рис. 4в изображены те же осцилляции Доплера – Раби, что и на

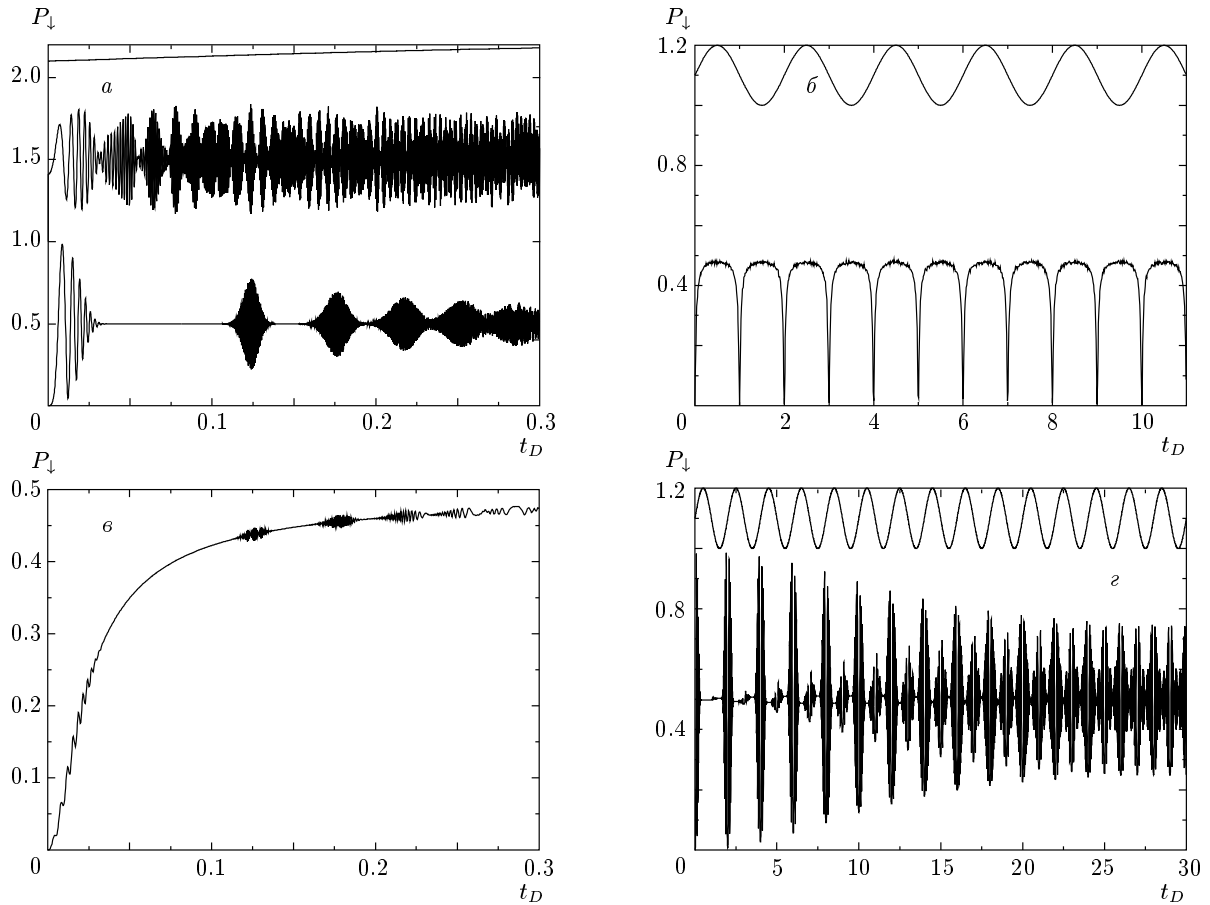


Рис. 4. То же, что на рис. 1, при $\langle n \rangle = 50$, $v = 10^3$ см/с, $g = 10^7$ с⁻¹, $\Delta\omega = 0$, $L = v_z t = 0.028$ см, $\xi = 4.281 \cdot 10^3$ (а); $\Delta\omega = 0.2\Delta$, $\Delta \equiv g\sqrt{\langle n \rangle + 1}$ для $0 < t_D < 11$, $L = vt = 0.94$ см, $\xi = 4.281 \cdot 10^3$ (б); $\Delta\omega = 0.2\Delta$ для малых $0 < t_D < 0.3$, $L = v_z t = 0.028$ см, $\xi = 4.281 \cdot 10^3$ (в); $v = 10^5$ см/с, $\Delta\omega = 0$, $L = vt = 2.83$ см, $\xi = 42.81$ (г)

рис. 4б, на малом интервале времени $0 < t < 0.3t_D$. Видно, что процессы коллапса и возрождения присутствуют в динамике системы лишь в качестве мелкой модуляции основного процесса периодических незатухающих осцилляций с периодом π/Ω_D .

На рис. 4г приведены результаты точного расчета для условий, аналогичных случаю рис. 4а, но при значительно большей скорости движения атома $v = 10^5$ см/с. Видно, что при увеличении скорости в динамике осцилляций Доплера–Раби атома присутствует последовательность регулярных коллапсов и возрождений вблизи моментов времени $t_m = 2\pi m/\Omega_D$, $m = 0, 1, 2, \dots$, амплитуда которых убывает со временем, а также другая последовательность возрождений и коллапсов, возникающих в моменты времени $t_m = \pi m/\Omega_D$, $m = 1, 2, \dots$, амплитуда которых растет со временем. На больших временах амплитуды двух последовательностей возрожде-

ний становятся равными друг другу. С ростом величины отстройки, при $\Delta\omega = 0.4\Delta$, динамика осцилляций Доплера–Раби становится регулярной, аналогично той, что изображена на рис. 4б.

Рассмотрим теперь случай, когда исходное электромагнитное поле в резонаторе находится в тепловом (хаотическом) квантовом состоянии. На рис. 5а приведена динамика вероятности $P_{\downarrow}(t)$ для среднего числа фотонов $\langle n \rangle = 50$ и скорости атома $v = 10^3$ см/с. Как видно из рис. 5а, эффект коллапса осцилляций Доплера–Раби проявляется однократно, на начальном этапе эволюции системы, для короткого промежутка времени. В отличие от случая когерентного состояния исходного поля в резонаторе, строгая повторяемость динамики системы с периодом $2\pi/\Omega_D$, характерная для когерентного состояния поля, в случае теплового поля отсутствует. Вероятность P_{\downarrow} достигает своих максимальных значе-

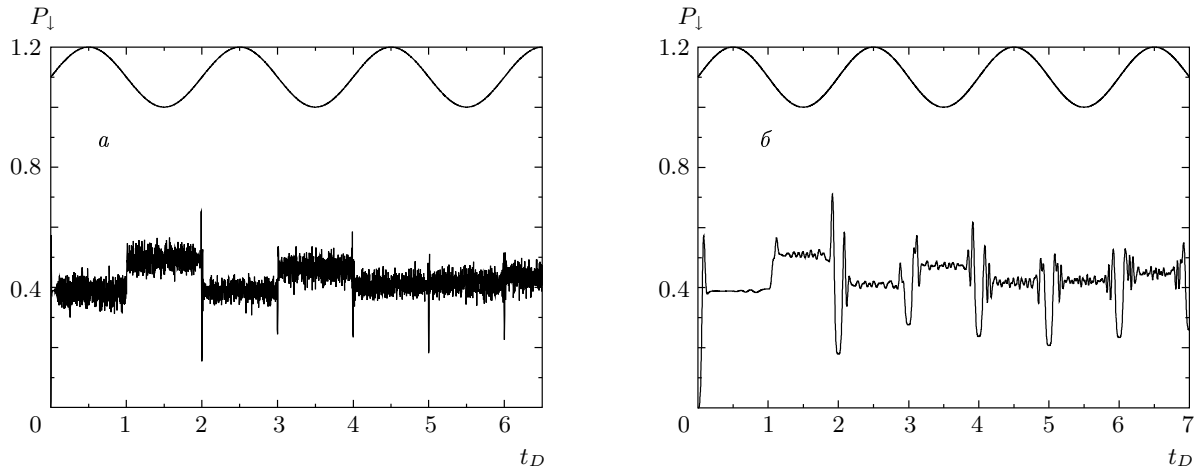


Рис. 5. То же, что на рис. 1, но для исходного теплового состояния поля в резонаторе (распределение Бозе – Эйнштейна) при $\langle n \rangle = 50$, $\omega_a = 10^{12} \text{ с}^{-1}$, $g = 10^7 \text{ с}^{-1}$ для $v = 10^3 \text{ см/с}$, $\xi = 4282$ (а) и $v = 10^5 \text{ см/с}$, $\xi = 42.82$ (б). Длина пролета атома в резонаторе $L = vt = 0.66 \text{ см}$

ний в узлах пространственного распределения электромагнитного поля. На рис. 5б изображена зависимость $P_{\downarrow}(t)$ для тех же условий, что и для рис. 5а, но при значительно большей скорости движения атома $v = 10^5 \text{ см/с}$ и, соответственно, меньшем значении $\xi = 42.82$. Видно, что в этих условиях явление коллапса проявляется значительно ярче, чем в случае меньшей скорости атома. Явление коллапса наблюдается при этом на длине пробега атома, равной половине длины волны поля в резонаторе, а длительность его составляет величину около π/Ω_D . Отметим также, что в рассматриваемых условиях теплового поля на этапе коллапса осцилляций Доплера – Раби инверсия атома $I(t) = P_{\uparrow}(t) - P_{\downarrow}(t)$ отлична от нуля, тогда как в случае когерентного поля при коллапсе осцилляций $I(t) = 0$.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе впервые рассмотрено явление коллапса и возрождения осцилляций Доплера – Раби движущегося атома, вызываемых электродипольным взаимодействием. Нами показано, что эффект коллапса и возрождения осцилляций Доплера – Раби возникает в случае неподвижного атома и радикально отличается от эффекта в случае покоящегося атома.

В резонансных условиях, когда $\Delta\omega \ll \Delta$, $\Delta \equiv g\sqrt{\langle n \rangle + 1}$, коллапсы и возрождения осцилляций Доплера – Раби с периодической структурой

возможны при $\xi = \Omega_R/\Omega_D \gg 1$. Периоды времени T_{rev} , через которые происходят возрождения, при этом определяются частотой Ω_D доплеровского сдвига частоты атома: $T_{rev} = T_D/2 = \pi/\Omega_D$.

При $\xi \sim 1$ последовательно возникающие во времени возрождения осцилляций перекрываются между собой, вследствие чего, вероятность перехода обладает, в общем случае, нерегулярной динамикой.

При наличии отстройки явление коллапса и возрождения не проявляется. Даже небольшая отстройка $\Delta\omega < \Delta$ приводит к установлению регулярных незатухающих осцилляций Доплера – Раби с частотой доплеровского сдвига Ω_D .

В условиях резонанса, $\Delta\omega \approx \Omega_D$, возможных даже при небольшой отстройке частоты атомного перехода от частоты поля, $\Delta\omega \ll \Delta$, осцилляции Доплера – Раби протекают подобно тому, как это имеет место в случае неподвижного атома на временном интервале $[0, \pi/\Omega_D]$. Продолжительность последовательно появляющихся возрождений при этом увеличивается, а амплитуда их убывает. Такая динамика системы оказывается ограниченной во времени и присутствует на временных интервалах $[T_D m, T_D(m + 1/2)]$, $m = 0, 1, 2, \dots$. На следующих за этими интервалами промежутках времени $[T_D(m + 1/2), T_D(m + 1)]$ динамика системы развивается во времени в обратном порядке, возвращаясь в исходное состояние, в котором система находилась при $t = mT_D$. Таким образом, эволюция системы периодически повторяется с периодом T_D .

В условиях резонанса, $\Delta\omega \approx \Omega_D$, при большой отстройке частоты атомного перехода от частоты поля, $\xi \sim 1$, явление возрождения отсутствует при наличии частичного коллапса осцилляций Доплера–Раби на первом этапе эволюции системы. В то же время с ростом скорости v возрастает и величина доплеровского сдвига частоты Ω_D и уменьшается отношение ξ . При больших скоростях величина $\xi \ll 1$ и амплитуда осцилляций Доплера–Раби становится очень малой, поскольку $P_{\downarrow} \propto \xi^2$. Вследствие этого, появление осцилляций Доплера–Раби с большой амплитудой следует ожидать при достаточно больших значениях $\xi \sim 1$ в условиях, когда $\Omega_R \approx g_R \sqrt{\langle n \rangle + 1} \sim \Omega_D$.

Успешное развитие экспериментальных исследований одноатомных микролазеров и микролазеров [20–23] позволяет ожидать проведения экспериментальных наблюдений явления коллапса и возрождения осцилляций Доплера–Раби движущегося атома, рассмотренного нами в настоящей работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. F. W. Cummings, Phys. Rev. **140**, A1051 (1965).
2. T. von Foerster, J. Phys. A **8**, 95 (1975).
3. J. H. Eberly, N. B. Narozhny, and J. J. Sanchez-Mondragon, Phys. Rev. Lett. **44**, 1323 (1980).
4. N. B. Narozhny, J. J. Sanchez-Mondragon, and J. H. Eberly, Phys. Rev. A **23**, 236 (1981).
5. H. I. Yoo, J. J. Sanchez-Mondragon, and J. H. Eberly, J. Phys. A **14**, 1383 (1981).
6. J. Eiselt and H. Risken, Opt. Comm. **72**, 351 (1989).
7. J. Eiselt and H. Risken, Phys. Rev. A **43**, 346 (1991).
8. P. L. Knight and P. M. Radmore, Phys. Lett. **90 A**, 342 (1982).
9. M. Venkata Satyanarayana, P. Rice, R. Vyas, and H. J. Carmichael, J. Opt. Soc. Amer. B **6**, 228 (1989).
10. M. Fleischhauer and W. P. Schleich, Phys. Rev. A **47**, 4258 (1993).
11. W. P. Schleich, *Quantum Optics in Phase Space*, Wiley, New York (2000).
12. G. Rempe, H. Walther, and N. Klein, Phys. Rev. Lett. **58**, 353 (1987).
13. W. Ren, J. D. Cresser, and H. J. Carmichael, Phys. Rev. A **46**, 7162 (1992).
14. P. Meystre, Opt. Comm. **90**, 41 (1992).
15. W. Ren and H. J. Carmichael, Phys. Rev. A **51**, 752 (1995).
16. А. В. Козловский, Письма в ЖЭТФ **73**, 364 (2001).
17. А. В. Козловский, ЖЭТФ **120**, 529 (2001).
18. А. В. Козловский, Опт. и спектр. **102**, 572 (2007).
19. М. В. Федорюк, *Асимптотика: интегралы и ряды*, Наука, Москва (1987).
20. G. T. Foster, S. L. Mielke, and L. A. Orozco, Phys. Rev. A **61**, 053821 (2000).
21. H. Walther, B. T. H. Varcoe, B.-G. Englert, and T. Becker, Rep. Progr. Phys. **69**, 1325 (2006).
22. P. Nussenzveig, F. Bernardot, M. Brune, J. Hare, J. M. Raimond, S. Haroche, and W. Gawlik Phys. Rev. A **48**, 3991 (1993).
23. J. M. Raimond, M. Brune, and S. Haroche, Rev. Mod. Phys. **73**, 565 (2001).