

ЭФФЕКТЫ ЭКРАНИРОВАНИЯ И ОСЦИЛЛЯЦИИ ФРИДЕЛЯ В НАНОСТРУКТУРАХ С КВАНТОВЫМИ ЯМАМИ

В. М. Ковалев^a, А. В. Чаплик^{a,b}*

^a *Институт физики полупроводников Сибирского отделения Российской академии наук
630090, Новосибирск, Россия*

^b *Новосибирский государственный университет
630090, Новосибирск, Россия*

Поступила в редакцию 26 мая 2008 г.

Исследовано экранирование кулоновского взаимодействия с учетом фриделевских осцилляций в структурах с многокомпонентной электронной плазмой. Рассмотрены двойная квантовая яма и сверхрешетка. Вариационным методом вычислена энергия основного состояния донора (экситона) в двойной квантовой яме как функция заселенности подзон.

PACS: 71.35.Cc, 78.66.Fd

1. ВВЕДЕНИЕ

Кулоновское взаимодействие между электронами, электроном и дыркой в экситоне или между электроном и заряженной примесью экранируется благодаря присутствию подвижных носителей заряда. Конкретный вид экранированного потенциала определяется эффективной размерностью и энергетическим спектром электронного газа. Так, в трехмерной плазме исходное кулоновское взаимодействие двух зарядов заменяется, благодаря экранированию, законом Юкавы плюс фриделевские осцилляции $\cos(2p_F r)/r^3$, если электронный газ вырожден; здесь p_F — импульс Ферми, r — расстояние между зарядами и положено $\hbar = 1$. Аналогичный результат в двумерном случае выглядит иначе: монотонная часть при $r \rightarrow \infty$ имеет асимптотику Qa_B^2/r^3 [1], где Q — сторонний точечный заряд, a_B — эффективный боровский радиус, тогда как осциллирующий вклад пропорционален $\sin(2p_F r)/r^2$. Экранирование в двумерной электронной системе теоретически исследовалось также в работах [2, 3], а в работе [4] рассчитана энергия связи двумерного экситона с учетом экранирования и конечной ширины квантовой ямы (КЯ). Во всех этих работах изучалось экранирование кулоновского взаимодействия однокомпонентной плазмой, т. е. даже при учете конечной ширины КЯ в [4] предполагалось, что все электроны системы занимают один (нижний) уровень поперечного квантования.

Целью настоящей работы является изучение экранирования кулоновского взаимодействия в наноструктурах, содержащих несколько компонент двумерной электронной плазмы. Эти компоненты различаются квантовым числом поперечного квантования (номера подзоны в КЯ) или номером слоя в двух- или многокомпонентной структурах, когда туннелирование между слоями исключено. Мы используем теорию линейного отклика, в которой экранированный потенциал выражается через поляризационный оператор Линхарда. В случае многокомпонентной плазмы этот оператор является, очевидно, матрицей $\Pi_{ij}(\omega, \mathbf{q})$, где индексы « i », « j » нумеруют компоненты, ω и \mathbf{q} — частота и волновой вектор (двумерный), от которых зависит поляризуемость системы. В дальнейшем нас будет интересовать статический случай $\omega = 0$.

В слоистой системе, погруженной в среду с фоновой диэлектрической проницаемостью ϵ , индуцированная часть полного (т. е. экранированного) потенциала U_{ind} удовлетворяет уравнению Пуассона. Для фурье-компоненты имеем

*E-mail: chaplik@isp.nsc.ru

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} - q^2\right) U_{ind}(\mathbf{q}, z) = -\frac{4\pi e^2}{\varepsilon} \sum_{nm} \Pi_{nm} \varphi_n(z) \varphi_m(z) U_{nm}(\mathbf{q}), \quad (1)$$

где $\varphi_n(z)$ — собственные функции поперечного движения, U_{nm} — матричные элементы полного потенциала, а Π_{nm} имеет стандартный вид:

$$\Pi_{nm}(\mathbf{q}) = -\sum_{\mathbf{k}} \frac{f_n(\mathbf{k}) - f_m(\mathbf{q} + \mathbf{k})}{E_n(\mathbf{k}) - E_m(\mathbf{q} + \mathbf{k}) + i\delta}, \quad (2)$$

$E_n(\mathbf{k})$ — энергия электрона в n -й подзоне, f_n — фермиевские числа заполнения. С помощью функции Грина уравнения (1)

$$G(z, z') = \exp(-q|z - z'|)/2q$$

можно найти его формальное решение и, прибавив к U_{ind} затравочный (не экранированный) потенциал U^0 , взять матричные элементы по функциям φ_n и получить замкнутую систему уравнений для величин $U_{nm}(q)$:

$$U_{ij}(q) + \frac{2\pi\tilde{e}^2}{q} \sum_{nm} I_{ij,nm}(q) \Pi_{nm}(q) U_{nm} = U_{nm}^0(q), \quad \tilde{e}^2 = \frac{e^2}{\varepsilon}. \quad (3)$$

Здесь введены формфакторы

$$I_{ij,nm}(q) = \int \varphi_i(z) \varphi_j(z) e^{-q|z-z'|} \varphi_n(z') \varphi_m(z') dz dz', \quad (4)$$

которые вместе с $\Pi_{nm}(q)$ определяют матричную диэлектрическую функцию

$$\varepsilon_{ijnm} = \delta_{in} \delta_{jm} + \frac{2\pi\tilde{e}^2}{q} I_{ijnm}(q) \Pi_{nm}(q). \quad (5)$$

Как видно из приведенных уравнений, в многокомпонентной системе вклад в экранирование дают, в принципе, все компоненты плазмы, даже с учетом того, что заполнение подзон заканчивается при некотором n_0 , так что $f_n \equiv 0$ при $n > n_0$. Однако вклад пустых подзон убывает с ростом n как за счет знаменателя поляризационного оператора Π_{nm} , так и из-за убывания формфакторов $I_{ij,nm}(q)$ ввиду быстрых осцилляций функций $\varphi_n(z)$ при больших n . Это дает основания ограничиться учетом лишь небольшого числа подзон для качественного выяснения характера экранирования в многокомпонентной структуре. Ниже мы рассмотрим двойную КЯ,

а также бесконечную периодическую систему параллельных слоев в отсутствие туннелирования, которая, как оказывается, тоже допускает точное аналитическое решение. Мы найдем также энергию связи донора (экситона) в двойной КЯ и ее зависимость от заселенности подзон.

2. ДВОЙНАЯ КВАНТОВАЯ ЯМА

Учитывая в каждой из ям лишь нижнюю подзону, мы получаем двухуровневую систему, для которой из соотношений (3) следуют четыре уравнения. Вследствие вещественности функций $\varphi_n(z)$ имеем $U_{12} = U_{21}$, так что остается три уравнения для величин U_{11}, U_{22} и U_{12} . Будем также считать, что рассматриваемая структура симметрична относительно своей срединной плоскости. Тогда функции $\varphi_n(z)$ классифицируются по четности, и четность двух учитываемых состояний $\varphi_1(z)$ и $\varphi_2(z)$ различна. В этом случае обращаются в нуль формфакторы $I_{11,12}$ и $I_{22,21}$, и уравнение для U_{12} отщепляется от системы трех уравнений:

$$U_{12}(q) = \frac{U_{12}^0(q, z_0)}{1 + \gamma_q [\Pi_{12}(q) + \Pi_{21}(q)] I_4(q)}, \quad (6)$$

где $\gamma_q = 2\pi\tilde{e}^2/q$, $I_4(q) = I_{12,12}(q)$. U_{12}^0 зависит от положения z_0 заряда, создающего затравочный потенциал $U^0(r, z)$. Для диагональных элементов получаем

$$U_{11}(q) = \{U_{11}^0(q)[1 + \gamma_q \Pi_{22}(q) I_2(q)] - \gamma_q \Pi_{22}(q) U_{22}^0(q) I_3(q)\} \times \{1 + \gamma_q [\Pi_{11}(q) I_1(q) + \Pi_{22}(q) I_2(q)] + \gamma_q^2 [I_1(q) I_2(q) - I_3^2(q)] \Pi_{11}(q) \Pi_{22}(q)\}^{-1}. \quad (7)$$

В уравнениях (6) и (7) введены обозначения $I_1 = I_{1111}$, $I_2 = I_{2222}$, $I_3 = I_{1122}$, а выражение для $U_{22}(q)$ отличается от (7) заменой индексов $1 \leftrightarrow 2$. В рассматриваемой нами симметричной двойной КЯ функции φ_1 и φ_2 могут быть записаны в виде

$$\varphi_1(z) = \frac{\psi_1(z) + \psi_2(z)}{\sqrt{2}}, \quad \varphi_2(z) = \frac{\psi_1(z) - \psi_2(z)}{\sqrt{2}}, \quad (8)$$

где ψ_1 и ψ_2 соответствуют состояниям, локализованным в первой или второй яме. В простейшем случае можно принять [5]:

$$\psi_1^2(z) = \delta\left(z - \frac{H}{2}\right), \quad \psi_2^2(z) = \delta\left(z + \frac{H}{2}\right),$$

где H — расстояние между квантовыми ямами, $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака. Заметим, что такая упрощенная модель все же учитывает туннелирование между ямами, поскольку собственные функции подзон φ_1 и φ_2 описывают коллективизированные по двум ямам состояния электронов. С другой стороны, волновые функции входят только под интегралы, определяющие формфакторы, и поэтому использование дельта-модели не может качественно изменить результат. Для величин, входящих в формулу (7), получаем

$$I_1(q) = I_2(q) = I_3(q) = \frac{1}{2}(1 + e^{-qH}),$$

$$I_4(q) = \frac{1}{2}(1 - e^{-qH}),$$

а для матричных элементов затравочного потенциала $U^0(q, z) = \gamma_q e^{-q|z-z_0|}$ имеем

$$U_{11}^0(q) = U_{22}^0(q) = \gamma_q \frac{1}{2} \left(\exp\left(-q\left|\frac{H}{2} - z_0\right|\right) + \exp\left(-q\left|\frac{H}{2} + z_0\right|\right) \right), \quad (9)$$

$$U_{12}^0(q) = U_{21}^0(q) = \gamma_q \frac{1}{2} \left(\exp\left(-q\left|\frac{H}{2} - z_0\right|\right) - \exp\left(-q\left|\frac{H}{2} + z_0\right|\right) \right).$$

Если экранируемый сторонний заряд находится в первой яме ($z_0 = H/2$), то формулы (6) и (7) существенно упрощаются:

$$U_{12}(q) = \frac{\gamma_q I_4(q)}{1 + \gamma_q [\Pi_{12}(q) + \Pi_{21}(q)] I_4(q)}, \quad (10)$$

$$U_{11}(q) = U_{22}(q) = \frac{\gamma_q I_1(q)}{1 + \gamma_q [\Pi_{11}(q) + \Pi_{22}(q)] I_1(q)}.$$

При нулевой температуре матричные элементы поляризационного оператора имеют следующий вид:

$$\Pi_{11}(q) = \frac{m^*}{\pi} \left[1 - \theta \left(1 - \frac{4p_1^2}{q^2} \right) \sqrt{1 - \frac{4p_1^2}{q^2}} \right], \quad (11)$$

$$\Pi_{22}(q) = \frac{m^*}{\pi} \left[1 - \theta \left(1 - \frac{4p_2^2}{q^2} \right) \sqrt{1 - \frac{4p_2^2}{q^2}} \right], \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{12}(q) + \Pi_{21}(q) = & \\ = \frac{m^*}{\pi} & \left[2 - \theta \left[\left(1 + \frac{2m^*\Omega}{q^2} \right)^2 - \frac{4p_1^2}{q^2} \right] \times \right. \\ \times \sqrt{\left(1 + \frac{2m^*\Omega}{q^2} \right)^2 - \frac{4p_1^2}{q^2}} - \text{sign} \left(1 - \frac{2m^*\Omega}{q^2} \right) \times & \\ \times \theta \left[\left(1 - \frac{2m^*\Omega}{q^2} \right)^2 - \frac{4p_2^2}{q^2} \right] \times & \\ \times \sqrt{\left(1 - \frac{2m^*\Omega}{q^2} \right)^2 - \frac{4p_2^2}{q^2}} \Big]. & \quad (13) \end{aligned}$$

(Выражения для $\Pi_{11}(q)$ и $\Pi_{22}(q)$ соответствуют полученным еще Стерном [1] для одиночного электронного листа.) Здесь p_1, p_2 — фермиевские импульсы в подзонах, m^* — эффективная масса электрона, $\Omega = E_2 - E_1$ — расстояние между подзонами, $\theta(x)$ — функция Хевисайда. Потенциал, действующий на электроны в верхней ($z = H/2$) или нижней ($z = -H/2$) части двойной КЯ, получается усреднением $U(z)$ соответственно с $\psi_1^2(z)$ или с $\psi_2^2(z)$ и легко выражается через матричные элементы U_{ij} по функциям $\varphi_{1,2}(z)$:

$$\langle U \rangle_{1,2} = \frac{U_{11} + U_{22}}{2} \pm U_{12}, \quad (14)$$

где под U_{ij} можно понимать уже восстановленные обратным фурье-преобразованием функции координат. Нас интересуют асимптотики $\langle U \rangle_{1,2}$ при больших ρ . В них имеется монотонная часть (вклад малых q) и осцилляции Фриделя. Монотонная часть находится, если в $\Pi_{ij}(q)$ и в $I_1(q)$ положить $q = 0$, а в величине $I_4(q)$ провести разложение до членов порядка q^2 (именно так получится правильный коэффициент при главном члене асимптотического разложения $\langle U(\rho) \rangle_{1,2}$). В этом пределе получаем $\Pi_{11} = \Pi_{22} = m^*/\pi$, $\Pi_{12} + \Pi_{21} = 2(N_1 - N_2)/\Omega \equiv \Pi_0$, N_1, N_2 — числа заполнения подзон. Видно, что для диагональных элементов асимптотика совпадает со случаем одиночного электронного листа, но радиус экранирования уменьшается ровно вдвое:

$$U_{11}(\rho) = U_{22}(\rho) \sim \frac{\tilde{\epsilon}^2}{(2q_s)^2 \rho^3}, \quad q_s = \frac{2}{a_B}. \quad (15)$$

Для недиагонального элемента получается такая же асимптотика $1/\rho^3$, но коэффициент теперь зависит от чисел заполнения подзон и от расстояния между ямами. Интеграл $(2\pi)^{-2} \int U_{12}(q) \exp(i\mathbf{q}\rho) d\mathbf{q}$ после указанных разложений приводится к

$$\tilde{\epsilon}^2 \int \frac{H(1 - qH/2)}{2(1 + \pi\tilde{\epsilon}^2 H \Pi_0)} J_0(q\rho) q dq$$

и при $\rho \gg H, a_B$ получается

$$U_{12}(\rho) \sim \frac{\tilde{\epsilon}^2 H^2}{2(1 + \pi \tilde{\epsilon}^2 H \Pi_0) \rho^3}. \quad (16)$$

В состоянии термодинамического равновесия величина Π_0 растет при увеличении концентрации электронов до тех пор, пока не начнет заселяться вторая подзона. После этого Π_0 принимает значение $\Pi_0 = 2(N_1 - N_2)/\Omega = 2m^*/\pi$ и в дальнейшем остается постоянным. Суммарный потенциал в плоскости, не содержащей затравочный заряд $U_{11} - U_{12}$, в области больших ρ меняет знак при H большем некоторого критического значения H_c . При заполнении обеих подзон $H_c = a_B/2$. Физическая причина такой переэкранировки состоит в следующем: если затравочный заряд находится при $\rho = 0$ в плоскости $z = H/2$, то под ним в плоскости $z = -H/2$ индуцируется отрицательный заряд, и его влияние в отдаленной точке этой плоскости превышает влияние затравочного заряда при достаточно больших H .

3. ФРИДЕЛЕВСКИЕ ОСЦИЛЛЯЦИИ

Как известно, осциллирующий вклад в экранированный потенциал на больших расстояниях возникает из-за сингулярностей диэлектрической функции, связанных со скачком фермиевского распределения при $T = 0$. В нашем случае это точки ветвления радикалов, входящих в Π_{11} , Π_{22} и Π_{12} (см. уравнения (11)–(13)). Как следует из формул (11), (12), осциллирующий вклад диагональных элементов возникает от точек $q = 2p_1, 2p_2$:

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{11}(\rho) \sim & -\tilde{\epsilon}^2 q_s \times \\ & \times \frac{4p_1^2 I_1^2(2p_1)}{[2p_1 + q_s I_1(2p_1)(2 - \sqrt{1 - p_2^2/p_1^2})]^2} \frac{\sin(2p_1 \rho)}{(2p_1 \rho)^2} - \\ & - \tilde{\epsilon}^2 q_s \frac{4p_2^2 I_1^2(2p_2)}{[2p_2 + 2q_s I_1(2p_2)]^2} \frac{\sin(2p_2 \rho)}{(2p_2 \rho)^2} \end{aligned} \quad (17)$$

и аналогично для $\tilde{U}_{22}(\rho)$. По сравнению с результатом [1] присутствие электронов во второй подзоне изменяет коэффициент при $\sin(2p_1 \rho)/(2p_1 \rho)^2$ и добавляет член, осциллирующий с периодом π/p_2 .

Более существенные изменения возникают благодаря недиагональному элементу U_{12} . Если в состоянии термодинамического равновесия вторая подзона не заселена, то U_{12} вообще не имеет сингулярных точек при вещественных q . Но при $p_1^2 > 2m^*\Omega$ появляются частицы во второй зоне и их граничный импульс находится из соотношения $p_2^2 = p_1^2 - 2m^*\Omega$.

Легко проверить, что для суммы $\Pi_{12} + \Pi_{21}$ в этом случае получается:

$$\begin{aligned} \Pi_{12}(q) + \Pi_{21}(q) = & \frac{2m^*}{\pi} \times \\ & \times \left[1 - \theta(q^2 - 2m^*\Omega) \sqrt{\left(1 + \frac{2m^*\Omega}{q^2}\right)^2 - \frac{4p_1^2}{q^2}} \right]. \end{aligned} \quad (18)$$

Радикал в (18) обращается в нуль в двух точках: $q_+^2 = (p_1 + p_2)^2$ и $q_-^2 = (p_1 - p_2)^2$, но из-за θ -функции вклад точки q_- обращается в нуль. Таким образом, от недиагонального матричного элемента потенциала возникает вклад, осциллирующий на больших расстояниях с комбинационной частотой

$$\langle \tilde{U}(\rho) \rangle_{1,2} \sim \tilde{U}_{11}(\rho) \pm B \frac{\sin(p_1 + p_2)\rho}{(p_1 + p_2)^2 \rho^2}, \quad (19)$$

$$B = -\tilde{\epsilon}^2 q_s \frac{4q_+ I_4^2(q_+) \sqrt{p_1 p_2}}{[q_+ + 2q_s I_4(q_+)]^2}.$$

Коэффициент в (19) вычислен в рамках принятой нами δ -модели для собственных функций φ_1, φ_2 (8). Но структура матрицы поляризационного оператора Π_{mn} зависит лишь от энергетического спектра, а не от конкретного вида волновых функций. Поэтому ясно, что присутствие в асимптотике потенциала осциллирующего вклада с периодом $2\pi/q_+$, является общим свойством двухкомпонентных систем.

4. ДОНОР В ДВОЙНОЙ КВАНТОВОЙ ЯМЕ

Рассмотрим донор, локализованный в верхней ($z_0 = H/2$) части двойной квантовой ямы. В этом случае фурье-образ потенциала дается выражениями (10), взятыми с обратным знаком (притяжение). Волновую функцию основного состояния электрона, локализованного на таком центре, будем искать вариационным методом. Выберем в качестве пробной функции $\Psi(\rho, z)$:

$$\begin{aligned} \Psi(\rho, z) = & \\ = & \frac{q_s}{\sqrt{2\pi}} e^{-\lambda\rho/a_B} (\varphi_1(z) \cos \theta + \varphi_2(z) \sin \theta), \end{aligned} \quad (20)$$

где λ, θ — вариационные параметры. Вычисляя обычным образом энергию, для основного состояния имеем

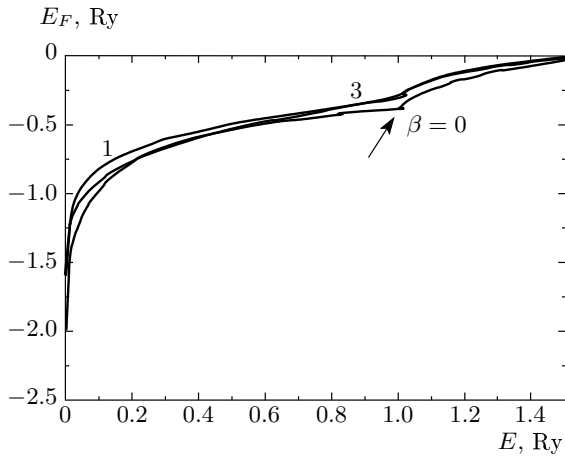


Рис. 1. Зависимость основного состояния донора от уровня Ферми в системе. Стрелкой показано заселение второй подзоны квантования. Все энергии даны в ридбергах Ry. Для численного счета мы приняли $E_1 = 0$, $E_2 = 1\text{Ry}$. Зависимости приведены для трех расстояний между квантовыми ямами $\beta = H/a_B$

$$E(\lambda, \theta) = \frac{\lambda^2}{2\mu a_B^2} + E_1 \cos^2 \theta + E_2 \sin^2 \theta - \frac{16\lambda^3}{2\pi a_B^3} \int_0^\infty \frac{qdq U_{11}(q)}{[(2\lambda/a_B)^2 + q^2]^{3/2}} - \frac{8\lambda^3 \sin 2\theta}{2\pi a_B^3} \int_0^\infty \frac{qdq U_{12}(q)}{[(2\lambda/a_B)^2 + q^2]^{3/2}}. \quad (21)$$

Дифференцируя это выражение по вариационным параметрам, получим систему уравнений для определения λ и θ . Полученная система решалась численно. Результаты расчета представлены на рис. 1. Видно, что при увеличении концентрации электронов в системе экранирование растет и, как следствие, приводит к уменьшению энергии связи донора. Скачок в плотности состояний при заселении второй подзоны приводит к излому и более быстрому уменьшению энергии связи донора как функции концентрации.

На рис. 2 изображена зависимость энергии основного состояния от положения донора в барьере между ямами. Видно, что минимум энергии связи достигается в срединной плоскости структуры, где вследствие симметрии обращается в нуль недиагональный элемент $U_{12}(q)$. Отметим, что последнее обстоятельство характерно для симметричной структуры и не связано с конкретным видом волновых функций поперечного движения.

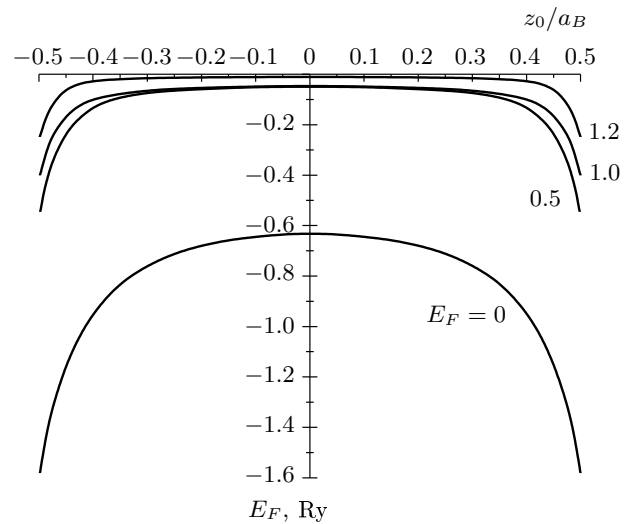


Рис. 2. Зависимость энергии связи от положения донора в барьере между ямами. Энергии даны в ридбергах. Расстояние между ямами $\beta = 1$. Значения уровня Ферми указаны на рисунке

5. МНОГОСЛОЙНАЯ СВЕРХРЕШЕТКА

Рассмотрим бесконечную периодическую систему параллельных слоев, в каждом из которых имеется двумерная электронная плазма. Пренебрежем туннелированием и конечной толщиной слоя, т. е. в качестве волновых функций поперечного движения запишем $\varphi_n(z) = \sqrt{\delta(z - n\Delta)}$, где Δ — период структуры. В такой постановке задача об экранировании в сверхрешетке рассматривалась в работе [6]. Метод, примененный в ней, оказался весьма сложным, и авторы привели лишь численные результаты для некоторых частных случаев. Ниже мы покажем, что задача допускает аналитическое решение в асимптотической области расстояний от стороннего заряда для произвольного направления относительно оси сверхрешетки. В принятой модели отличны от нуля лишь формфакторы $I_{nm,mm} = \exp(-q\Delta|n - m|)$. Система уравнений (3) принимает вид

$$U_{nn} + \gamma_q \sum_m \Pi_{mm} e^{-q\Delta|n-m|} U_{mm} = \gamma_q e^{-q\Delta|n_0-n|}, \quad (22)$$

где n_0 — номер плоскости, в которой расположен сторонний заряд; без ограничения общности можно положить $n_0 = 0$. Введем фурье-образ величин $U_{nn}(q)$ по индексу n :

$$U(k, q) = \sum_n U_{nn}(q) e^{-ik\Delta n}, \quad -\frac{\pi}{\Delta} < k < \frac{\pi}{\Delta}$$

и учтем, что в периодической структуре Π_{mm} не зависят от m . Умножая обе стороны уравнения (22) на $e^{-ik\Delta n}$ и суммируя по n , легко получить:

$$U(k, q) = \frac{\gamma_q Q(k, q)}{1 + \gamma_q \Pi(q) Q(k, q)}, \quad (23)$$

где

$$Q(k, q) = \frac{\text{sh}(q\Delta)}{\text{ch}(q\Delta) - \cos(k\Delta)}. \quad (24)$$

В длинноволновом пределе $k\Delta, q\Delta \ll 1$ и $q \ll p_F$ можно положить $\Pi = m^*/\pi$ и получить из уравнений (23), (24):

$$U(k, q) = \frac{4\pi\tilde{e}^2}{\Delta(k^2 + q^2) + 2q_s}. \quad (25)$$

Обращая (25) в \mathbf{r} -пространство, получим потенциал в n -ой плоскости на расстоянии ρ :

$$U(\rho, n) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{iq\rho} d\mathbf{q} \times \int_{-\pi/\Delta}^{\pi/\Delta} U(k, q) e^{ik\Delta n} d(\Delta k). \quad (26)$$

Интеграл по dk можно распространить от $-\infty$ до ∞ и получить:

$$U(\rho, n) = \frac{\tilde{e}^2}{r_n} \exp(-r_n \kappa), \quad (27)$$

где $\kappa^2 = 2q_s/\Delta$, $r_n^2 = \rho^2 + (n\Delta)^2$. Таким образом, в данном приближении, когда $\rho \gg \Delta$, $n \gg 1$ экранирование становится трехмерным и изотропным, причем роль томас-фермиевского радиуса играет величина $\sqrt{\Delta a_B}/2$.

Анизотропия системы проявляется, когда нарушается одно из приведенных выше неравенств, т. е. вблизи оси z ($n \gg 1, \rho \sim \Delta$) и в направлениях, параллельных плоскостям ($\rho \rightarrow \infty, n \sim 1$). Приведем асимптотики при $\rho = 0, n \gg 1$ и при $n = 0, \rho \gg \Delta$ (вычисления соответствующих интегралов приведено в Приложении):

$$U(\rho = 0, n \gg 1) = \left(1 + \frac{q_s \Delta}{3}\right)^{-1} \frac{\tilde{e}^2}{|z|} \exp(-\kappa|z|), \quad (28)$$

$$U(\rho \gg \Delta, n = 0) = \left(1 + \frac{q_s \Delta}{2}\right)^{-1/2} \frac{\tilde{e}^2}{\rho} \exp(-\kappa\rho). \quad (29)$$

Мы видим, что трехмерный характер экранирования сохраняется (закон Юкавы), но имеется анизотропная перенормировка (уменьшение) заряда. Зная экранированный потенциал $U(\rho, n)$, легко найти индуцированный заряд в точке ρ плоскости n . Эта величина вычислялась в работе [7] для гидродинамической модели двумерной плазмы (длинноволновое приближение). В асимптотических режимах $\rho \gg \Delta, n \sim 1$ и $\rho \sim \Delta, n \gg 1$ существенны малые импульсы, и результаты [7] дают закон Юкавы, как и наши формулы (28), (29), полученные в рамках метода RPA.

Наконец, рассмотрим фриделевские осцилляции экранирования в сверхрешетке. Сингулярный вклад в фурье-компоненту $U(k, q)$ на больших расстояниях от заряда вдоль плоскостей выделяется обычным образом:

$$U(k, \rho) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \frac{\gamma_q Q(k, q) e^{iq\rho} d\mathbf{q}}{1 + \gamma_q \frac{m^*}{\pi} \left[1 - \theta(1 - 4p_F^2/q^2) \sqrt{1 - 4p_F^2/q^2}\right] Q(k, q)} \approx -\tilde{e}^2 q_s \frac{Q^2(k, 2p_F)}{[2p_F + q_s Q(k, 2p_F)]^2} \frac{\sin(2p_F \rho)}{\rho^2}. \quad (30)$$

Далее нужно обратить $U(k, \rho)$ в (30) по формуле

$$\frac{\Delta}{2\pi} \int_{-\pi/\Delta}^{\pi/\Delta} U(k, \rho) e^{ink\Delta} dk, \quad (31)$$

чтобы найти потенциал $U_n(\rho)$ в n -м слое. Соответствующий интеграл типа

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{in\varphi}}{(A - \cos \varphi)^2} d\varphi$$

берется элементарно, и после несколько громоздких выкладок мы получаем

$$U_n(\rho) = -\tilde{\epsilon}^2 q_s \frac{\text{sh}^2(2p_F \Delta)}{\text{sh}^2(2p_F \bar{\Delta})} \times \\ \times \text{cth}(2p_F \bar{\Delta}) \exp(-2p_F \bar{\Delta} |n|) \frac{\sin(2p_F \rho)}{(2p_F \rho)^2}, \quad (32)$$

где величина $\bar{\Delta}$ находится из уравнения

$$\text{ch}(2p_F \bar{\Delta}) = \text{ch}(2p_F \Delta) + \frac{q_s}{2p_F} \text{sh}(2p_F \Delta). \quad (33)$$

Таким образом, координатная зависимость осциллирующей части потенциала (в отличие от монотонной) остается двумерной, т.е. пропорциональной ρ^{-2} . Амплитуда осциллирующего вклада в асимптотику потенциала экспоненциально убывает при удалении от плоскости, в которой расположен сторонний заряд, с декрементом $2p_F \bar{\Delta}$. Поскольку, согласно (33), $\bar{\Delta} \neq \Delta$, длина затухания по оси z отличается от π/p_F — периода осцилляций по ρ , но стремится к этой величине в пределе $q_s \ll p_F$ (двумерная плазма высокой плотности).

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Известно, что в одиночном слое двумерных электронов при $T = 0$ радиус экранирования длинноволновых компонент электростатического возмущения ($q < 2p_F$) не зависит от концентрации носителей и равен просто $q_s^{-1} = a_B/2$. Экранированный потенциал точечного заряда убывает на бесконечности как $1/\rho^3$ (монотонная часть) и осциллирует как $\sin(2p_F \rho)/\rho^2$ [1]. Мы показали в данной работе, что в двойной КЯ при тех же условиях результаты изменяются следующим образом.

1) Радиус экранирования зависит от разности заселенностей подзон благодаря вкладу межподзонных переходов (недиагональный элемент U_{12}); в состоянии равновесия этот радиус перестает изменяться с началом заполнения второй подзоны.

2) Фриделевские осцилляции содержат вклад с комбинационным периодом, если заселены обе подзоны двойной КЯ.

3) В бесконечной периодической системе двумерных электронных слоев экранирование кулоновского потенциала становится трехмерным по характеру зависимости от расстояния до стороннего заряда (закон Юкавы); роль радиуса экранирования играет не зависящая от концентрации электронов величина $\sqrt{\Delta a_B}/2$. Анизотропия системы проявляется в зависимости предэкспоненциального множителя от направления. Амплитуда фриделевских осцилляций в n -й плоскости сверхрешетки экспоненциально убывает с ростом n .

Авторы благодарят Э. Г. Батыева и М. В. Энтина за полезные замечания.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 08-02-0152), гранта Президента РФ (МК-299.2008.2) и программ РАН.

ПРИЛОЖЕНИЕ

1. Потенциал на вертикали, проходящей через сторонний заряд: $\rho = 0, n \gg 1$. При этих условиях в интеграле, определяющем $U(\rho = 0, z = n\Delta)$, существенны малые $k\Delta$, так что в $Q(k, q)$ величину $\cos(k\Delta)$ можно разложить:

$$Q(k, q) = \frac{\text{sh}(q\Delta)}{\text{ch}(q\Delta) - 1 + k^2 \Delta^2 / 2}. \quad (34)$$

Тогда

$$U(\rho = 0, z) = \frac{2\pi \tilde{\epsilon}^2 \Delta}{(2\pi)^3} \int \frac{\Delta dk d\mathbf{q}}{q} \times \\ \times \frac{\text{sh}(q\Delta) e^{ikz}}{\text{ch}(q\Delta) - 1 + k^2 \Delta^2 / 2 + 2q_s \text{sh}(q\Delta)/q} \quad (35)$$

и после интегрирования по углу в \mathbf{q} -плоскости и по k получается:

$$U(\rho = 0, z) = \frac{\tilde{\epsilon}^2}{\sqrt{2}} \int \frac{dq}{R(q)} \text{sh}(q\Delta) e^{-|z|R(q)/\Delta}, \quad (36)$$

где $R(q) = (2(\text{ch}(q\Delta) - 1) + 2q_s \text{sh}(q\Delta)/q)^{1/2}$. Поскольку $|z| \gg \Delta$, а $R(q)$ монотонно возрастает с ростом q , то в выражении (36) существенна лишь малая область q вблизи минимального значения $R(q)$, т.е. вблизи $q = 0$. Разлагая $R(q)$ в экспоненте под интегралом (36), получим

$$R(q \rightarrow 0) \approx \sqrt{2q_s \Delta} \left(1 + \frac{q^2 \Delta^2}{4q_s \Delta} \left[1 + \frac{\Delta q_s}{3} \right] \right),$$

$$\text{sh}(q\Delta) \sim q\Delta,$$

а в знаменателе под интегралом (36) положим $R(q = 0) = \sqrt{2q_s \Delta}$. Отсюда получается формула (28).

2. Потенциал в плоскости, содержащий заряд: $\rho \gg \Delta, z = n\Delta = 0$. Теперь в $Q(k, q)$ считаем $q\Delta \ll 1$, а $k\Delta$ — произвольно:

$$\begin{aligned}
U(\rho, z = 0) &= \frac{2\pi\tilde{e}^2}{(2\pi)^3} \int \frac{d\mathbf{q}}{q} \times \\
&\times \int_{-\pi}^{\pi} d(k\Delta) \frac{q\Delta e^{iq\rho}}{1 + q^2\Delta^2/2 - \cos(k\Delta) + q_s\Delta} = \\
&= \frac{\tilde{e}^2}{2\pi} \int J_0(q\rho) q dq \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{1 + q^2\Delta^2/2 - \cos\theta + q_s\Delta} = \\
&= \tilde{e}^2 \int \frac{J_0(q\rho) q dq}{\sqrt{q^2 + \kappa^2} \sqrt{1 + (q^2 + \kappa^2)\Delta^2/4}}, \quad (37)
\end{aligned}$$

откуда, пренебрегая членом $(q\Delta)^2$ под корнем в знаменателе, приходим к формуле (29).

ЛИТЕРАТУРА

1. F. Stern, Phys. Rev. Lett. **18**, 546 (1967).
2. G. E. W. Bauer, Phys. Rev. **B 45**, 9153 (1992).
3. D. A. Kleinman, Phys. Rev. **B 32**, 3766 (1985).
4. Д. В. Кулаковский, С. И. Губарев, Ю. Е. Лозовик, Письма в ЖЭТФ **74**, 123 (2001).
5. G. Gumbs and G. R. Aizin, Phys. Rev. **B 51**, 7074 (1995).
6. P. B. Visscher and L. M. Falicov, Phys. Rev. **B 3**, 2541 (1971).
7. A. L. Fetter, Ann. Phys. (NY) **88**, 1 (1974).