

ЛАГРАНЖЕВЫ СТРУКТУРНЫЕ ФУНКЦИИ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

*К. П. Зыбин**, *В. А. Сирота*, *А. С. Ильин*, *А. В. Гуревич*

*Физический институт им. П. Н. Лебедева Российской академии наук
119991, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 27 февраля 2008 г.

На основе решения уравнения Навье–Стокса в области инерционного интервала развитой гидродинамической турбулентности разработана статистическая теория, позволяющая построить лагранжевы структурные функции $K_n(\tau)$. На временах τ , малых по сравнению с корреляционным временем τ_c крупномасштабной турбулентности, они подчиняются скейлинговым соотношениям $K_n(\tau) \propto \tau^{\zeta_n}$. Получены аналитические выражения для параметров ζ_n . Проведено детальное сопоставление теории с результатами экспериментов [1]. Продемонстрировано их полное количественное согласие. Введено новое понятие в теории турбулентности: пространственные корреляции положений точек вдоль лагранжевой траектории $R_n(\tau)$. Показано, что все высшие корреляторы положения R_n при $n > 3$ имеют универсальный скейлинг.

PACS: 47.27.Jv

1. ВВЕДЕНИЕ

В установившемся турбулентном течении возбуждаются случайные пульсации скорости, которые могут быть представлены как наложение случайных движений разного масштаба. В развитой турбулентности, при больших числах Рейнольдса R , выделяются три области характерных масштабов течения: область крупномасштабных пульсаций скорости, инерционный интервал и диссипативная область.

Крупномасштабные пульсации развиваются на масштабах L порядка характерных размеров течения (например, в трубе диаметром D : $L \sim 0.1D$). Они имеют наибольшие амплитуды скорости, в них заключена основная энергия турбулентного движения. Крупномасштабная турбулентность является непосредственным результатом неустойчивости ламинарного течения в заданных граничных условиях. Важно, что крупномасштабная турбулентность всегда, независимо от величины числа Рейнольдса R , неоднородна и анизотропна. Практически не меняется с ростом R и область масштабов, занимаемых крупномасштабными пульсациями.

Если вязкость жидкости ν очень мала, а число Рейнольдса соответственно велико, то очень малой становится область диссипативных масштабов $\lambda < \eta$. Здесь $\eta = L/R^{3/4}$ — масштаб Колмогорова [2]. Напротив, область масштабов λ , составляющих инерционный интервал $\eta \ll \lambda \ll L$, возрастает с ростом R .

Для создания статистически стационарного потока с сильно возбужденными случайными осцилляциями необходимо затратить энергию. Источником энергии служит постоянный градиент давления, создаваемый внешним воздействием. Энергия внешнего источника передается наиболее крупномасштабным пульсациям. От них она перетекает к пульсациям меньшего масштаба. Диссипация энергии происходит только в самой мелкомасштабной диссипативной области.

Во всем инерционном интервале диссипации энергии нет. Это позволяет записать уравнения гидродинамики в бездиссипативном эйлеровском пределе $\nu \rightarrow 0, R \rightarrow \infty$ [3]. Кроме того, это дает возможность использовать метод траекторий Лагранжа и, тем самым, принципиально упростить теорию. Именно такой подход лежит в основе работы авторов [4]. В этой работе на основании решения уравнения Навье–Стокса была разработана статистическая теория, описывающая образование

*E-mail: zybin@lpi.ru

филаментов — вытянутых вихревых структур в турбулентном потоке, обладающих большой завихренностью.

В последнее время благодаря развитию лазерной техники появились возможности провести очень детальные экспериментальные исследования траекторий пробных частиц в турбулентной среде [1, 5]. Это позволило экспериментально изучить свойства статистического ансамбля лагранжевых траекторий. В то же время, с теоретической точки зрения статистические свойства развитой гидродинамической турбулентности на сегодня мало исследованы в терминах лагранжевых переменных [4], хотя такой подход представляется естественным [6]. Недавно было предложено уравнение, моделирующее статистические свойства Лагранжевой турбулентности [7]. Это уравнение является, однако, модельным, оно не базируется на уравнении Навье–Стокса.

Настоящая работа является продолжением работы [4]. Ее основная цель состоит в построении лагранжевых структурных функций

$$K_n(\tau) = \langle (v(t+\tau) - v(t))^n \rangle,$$

где значения скорости взяты в близкие моменты времени t и $t + \tau$ вдоль траектории частицы, а усреднение проводится по ансамблю траекторий. Теория Колмогорова предсказывает для этих функций степенную зависимость

$$K_n \propto \tau^{\zeta_n}, \quad \zeta_n = n/2.$$

В экспериментах обнаружено отклонение скейлинговых показателей от колмогоровских значений. Мы вычисляем аномальные скейлинговые показатели, основываясь на решении уравнения Навье–Стокса. Кроме того, мы выводим соотношение между структурными функциями различных порядков, которое может сохраняться и в случаях, когда степенная зависимость отсутствует — например, вблизи границ инерционного интервала. Для эйлеровских структурных функций используется так называемый самоподобный анзац (Extended Self-Similarity) установленный экспериментально [8], связывающий структурные функции третьего и других порядков. Полученное нами теоретическое соотношение может играть аналогичную роль для лагранжевых структурных функций.

В разд. 2 приведены краткое изложение основного метода и некоторые из полученных ранее результатов. В частности, в работе [4] были получены уравнения для функции распределения пульсаций в инерционном интервале и найдено стационар-

ное распределение флуктуаций по модулю завихренности. Мы вычисляем моменты модуля завихренности, исходя из этого уравнения. В разд. 3 с использованием развитого ранее метода найдены все лагранжевы структурные функции скорости, что дает фактически полное описание перемежаемости в турбулентном потоке. В разд. 4 теория детально сопоставляется с результатами последних экспериментов и показывается их исключительно хорошее соответствие. В разд. 5 введено новое понятие пространственной корреляции положений точек вдоль лагранжевых траекторий. Предсказан вид структурной функции пространственных корреляций, допускающей прямую экспериментальную проверку.

2. ОСОБЕННОСТИ ТУРБУЛЕНТНЫХ СТРУКТУР В ИНЕРЦИОННОМ ИНТЕРВАЛЕ

Как указывалось выше, при описании турбулентности в инерционном интервале можно пренебречь вязкостью. При этом уравнение Навье–Стокса в несжимаемой жидкости сводится к уравнению Эйлера

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \frac{\nabla p}{\rho} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (1)$$

Здесь \mathbf{v} — скорость течения, p — давление, плотность ρ постоянна и в дальнейшем выбрана единичной. Уравнение, определяющее давление, следует из (1):

$$-\Delta p = \nabla_i v_j \cdot \nabla_j v_i. \quad (2)$$

Таким образом, уравнения (1) образуют замкнутую систему.

Основной процесс, определяющий особенности структуры турбулентности в инерционном интервале — возникновение и развитие вихревых нитей [4]. Физическая природа этого процесса связана с параметрической неустойчивостью течения, возникающей под действием анизотропных пульсаций давления крупномасштабной турбулентности. Произвольный выделенный объем жидкости вытягивается под действием случайных крупномасштабных сил, превращаясь в нитевидную вихревую структуру. Главную роль в этом процессе играет несжимаемость жидкости. С одной стороны, она обеспечивает сохранение объема капли. Благодаря этому вытягивание капли сопровождается сильным сокращением ее поперечного масштаба, при этом из-за сохранения момента усиливается поперечное вращение. С другой стороны, не менее важно, что скорость звука в

несжимаемой среде стремится к бесконечности. Это обеспечивает мгновенный перенос крупномасштабных пульсаций давления. Они и служат основной причиной быстрого вытягивания нитей.

Рассмотрим этот процесс на простом примере аксиально симметричного течения. Уравнения гидродинамики (1) для компонент скоростей вдоль радиуса, v_r , азимутального угла, v_ϕ , и оси цилиндра, v_z , имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\phi^2}{r} &= -\frac{\partial p}{\partial r}, \\ \frac{\partial v_\phi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\phi}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_\phi}{\partial z} + \frac{v_\phi v_r}{r} &= 0, \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} &= -\frac{\partial p}{\partial z}, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r v_r) + \frac{\partial v_z}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Будем искать решение системы (3) в виде

$$v_\phi = \omega r, \quad v_r = ar, \quad v_z = bz. \tag{4}$$

Здесь ω , a и b — произвольные функции t , вектор завихренности имеет абсолютную величину ω и направлен вдоль оси z . Тогда давление представляется в виде

$$p(r, z, t) = \frac{P_1(t)}{2} r^2 + \frac{P_2(t)}{2} z^2. \tag{5}$$

Из последнего уравнения (3) следует связь между a и b :

$$2a + b = 0. \tag{6}$$

Эта связь выражает сохранение объема жидкости. Действительно, рассмотрим элемент жидкости, занимающий в текущий момент цилиндр радиуса $R(t)$ и длины $Z(t)$. Тогда из (4) следует

$$\dot{R} = a(t)R, \quad \dot{Z} = b(t)Z,$$

отсюда

$$\begin{aligned} R(t) &= R_0 \exp\left(\int_0^t a(t_1) dt_1\right), \\ Z(t) &= Z_0 \exp\left(\int_0^t b(t_1) dt_1\right). \end{aligned}$$

Объем цилиндра в произвольный момент t сохраняется:

$$\begin{aligned} \pi R(t)^2 Z(t) &= \pi R_0^2 Z_0 \exp\int_0^t (2a(t_1) + b(t_1)) dt_1 = \\ &= \pi R_0^2 Z_0. \end{aligned}$$

Подставляя (4) в систему (3), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{a} + a^2 - \omega^2 &= -P_1, \\ \dot{\omega} + 2a\omega &= 0, \\ \dot{b} + b^2 &= -P_2. \end{aligned} \tag{7}$$

После дифференцирования второго уравнения системы (7) и подстановки в него всех остальных уравнений получим линейное уравнение для завихренности:

$$\ddot{\omega} = -P_2(t)\omega. \tag{8}$$

Система уравнений (3) — нелинейная, однако нелинейность отражает лишь баланс сил в поперечном к оси цилиндра направлении. Иными словами, происходит компенсация нелинейных членов. Действительно, из уравнения (5) видно, что P_2 соответствует перепаду давления вдоль оси цилиндра z . Предположим, что цилиндр достаточно сильно вытянут и находится в турбулентном потоке. Тогда $P_2(t)$ — сложная функция времени, отражающая крупномасштабные пульсации давления. Пульсации случайные, так что среднее по времени $\langle P_2(t) \rangle$ равно нулю. Тогда в среднем интервалы времени, когда $P_2(t) > 0$ и $P_2(t) < 0$, представлены равновероятно. Но при $P_2(t) > 0$ функция $\omega(t)$ осциллирует, причем амплитуда осцилляций меняется мало. Наоборот, при $P_2(t) < 0$ функция $\omega(t)$ экспоненциально растет. Ясно, что в среднем будет происходить рост ω . Отметим также, что изменение завихренности $\omega(t)$ однозначно связано с изменением «длины цилиндра» $Z(t)$:

$$\omega(t) = \omega_0 \frac{Z(t)}{Z_0}.$$

Следовательно, такой рост ω означает «вытягивание» цилиндра.

Приведенный пример поясняет физическое существо процесса. В работе [4] проведен детальный анализ в окрестности лагранжевых траекторий и показано, что возникают аналогичные рассмотренному цилиндру изогнутые вихревые нити, в которых, как и в цилиндре, нелинейные члены компенсируются. Растяжение завихренной нити определяется крупномасштабными пульсациями давления, причем уравнения имеют линейную структуру, аналогичную (8).

Таким образом, в результате использования метода лагранжевых траекторий теория в инерционном интервале сводится к статистическому анализу поведения системы линейных осцилляторов:

$$\ddot{\omega}_n = -\rho_{nk}\omega_k, \quad \rho_{nk} = \nabla_n \nabla_k P. \tag{9}$$

Здесь ρ_{nk} — случайная величина, определяемая анизотропной частью крупномасштабных пульсаций давления $P(t)$. Величина завихренности $\omega(t)$ взята вдоль траектории частицы. Вместо уравнения второго порядка (9) удобно ввести систему двух уравнений первого порядка:

$$\dot{\omega}_i = \nu_i, \quad \dot{\nu}_i = -\rho_{ij}\omega_j, \quad (10)$$

где $\nu_i \equiv \dot{\omega}_i$.

Для изучения статистических свойств системы (10) вводится совместная плотность вероятности

$$f(t, \omega, \nu) = \langle \delta(\omega - \omega(t))\delta(\nu - \nu(t)) \rangle, \quad (11)$$

где $\omega(t), \nu(t)$ — решения уравнения (10) при данной реализации ρ_{ij} и данных начальных условиях. Усреднение проводится по ансамблю всех возможных реализаций. В выражении для плотности вероятности ω и ν — независимые переменные. Функция $f(t, \omega, \nu)$ с учетом слабой анизотропии крупномасштабных пульсаций описывается уравнением Фоккера — Планка:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \nu_k \frac{\partial f}{\partial \omega_k} = \left[\omega^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \nu^2} + \left(\omega_k \frac{\partial}{\partial \nu_k} \right)^2 f \right]. \quad (12)$$

Здесь время t нормировано на характерное время изменения плотности вероятности порядка корреляционного времени.

Умножая уравнение (12) на $\omega^{2n}\nu^{2m}(\omega \cdot \nu)^k$ и интегрируя по $d\omega d\nu$, получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений для моментов. Для дальнейшего нам нужна зависимость от времени четных моментов вида $\langle \omega^{2n} \rangle$. Чтобы найти ее, рассмотрим инвариантные моменты четного порядка $2P$. Они имеют вид

$$M(n, m, k) = \langle \omega^{2n}\nu^{2m}(\omega \cdot \nu)^k \rangle, \quad n + m + k = P.$$

Используя уравнение (12), получим для величин $M(n, m, k)$ систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}M(n, m, k) &= 2nM(n-1, m, k+1) + \\ &+ 2m(4k+2m+2)M(n+1, m-1, k) + \\ &+ 4m(m-1)M(n, m-2, k+2) + kM(n, m+1, k-1) + \\ &+ 2k(k-1)M(n+2, m, k-2). \end{aligned}$$

Из этой системы уравнений видно, что производная по времени от момента порядка $2P$ равна некоторой линейной комбинации моментов того же порядка. Число различных моментов порядка $2P$ определяется числом троек целых положительных чисел

(n, m, k) , таких что $n + m + k = P$. Нетрудно подсчитать, что их полное число есть

$$Q = \frac{1}{2}(P+1)(P+2).$$

При этом система состоит из Q дифференциальных уравнений. Она полностью замкнута, другие моменты в нее не входят. Таким образом, эволюция моментов порядка $2P$ описывается системой линейных обыкновенных дифференциальных уравнений размерности Q . Асимптотика $t \rightarrow \infty$ определяется максимальным корнем характеристического уравнения. Так как $\langle \omega^{2n} \rangle$ — положительная величина, она не может осциллировать, и соответствующий максимальный корень Λ_{2n} действителен. Следовательно, все эти моменты растут экспоненциально: $\langle \omega^{2n} \rangle \propto \exp(\Lambda_{2n}t)$. Вычисляя соответствующие определители и приравнивая их нулю, получаем алгебраические уравнения и находим конкретные численные выражения максимальных собственных значений. Первые шестнадцать Λ_{2n} равны

$$\begin{aligned} \Lambda_2 &= 2.52, & \Lambda_4 &= 6.12, & \Lambda_6 &= 10.43, \\ \Lambda_8 &= 15.25, & \Lambda_{10} &= 20.48, & \Lambda_{12} &= 26, \\ \Lambda_{14} &= 32.03, & \Lambda_{16} &= 38.25, & \Lambda_{18} &= 44.73, \\ \Lambda_{20} &= 51.46, & \Lambda_{22} &= 58.42, & \Lambda_{24} &= 65.58, \\ \Lambda_{26} &= 72.95, & \Lambda_{28} &= 80.52, & \Lambda_{30} &= 88.26, \\ \Lambda_{32} &= 96.16. \end{aligned} \quad (13)$$

Приведем здесь, цитируя [4], список основных свойств уравнения (12) с точки зрения моментов.

1. Все моменты величин ω_k и ν_j суммарной степени $P = n + m + k$ связаны только между собой системой линейных дифференциальных уравнений первого порядка. Поэтому представляется возможным последовательно вычислить моменты любого порядка.

2. Моменты четного порядка растут экспоненциально быстро. Независимо от начальных условий на больших временах совместная плотность вероятности (12) зависит только от модулей ω, ν и косинуса угла между векторами $\mu = (\omega \cdot \nu)/\omega\nu$.

3. Высшие четные моменты растут быстрее низших.

Эти общие свойства выражают наличие перемежаемости турбулентности. Например, на больших временах $\langle x^{2n} \rangle \gg \langle x^2 \rangle^n$. Конкретно, в [4] были определены параметры экспоненциального роста Λ_{2n} для второго ($n = 1$) и четвертого ($n = 2$) моментов:

$$\langle \omega^{2n} \rangle = C_{2n} e^{\Lambda_{2n}t}, \quad \Lambda_2 = (16)^{1/3} = 2.52, \quad \Lambda_4 = 6.12.$$

Видно, что $\Lambda_4 > 2\Lambda_2$, т.е. при больших t имеем $\langle \omega^4 \rangle \gg \langle \omega^2 \rangle^2$.

3. ЛАГРАНЖЕВЫ СТРУКТУРНЫЕ ФУНКЦИИ

Для вычисления лагранжевых структурных функций нам необходимо знать траекторию частицы в потоке. Проведенный нами ранее анализ показывает, что в пространстве возникают области больших значений завихренности. В работе [4] было показано, что эти области представляют собой филаменты (нити, вытянутые вдоль вихревых линий). Тогда модель траектории пробной частицы в течении выглядит так, как показано на рис. 1. В областях I, где завихренность течения невелика, траектория частиц является плавной и медленно меняется на временах порядка характерного корреляционного времени крупномасштабных пульсаций τ_c ; в областях же II, где завихренность велика, происходят высокочастотные (с частотой ω) осцилляции. Рассмотрим этот случай, так как он дает определяющий вклад в корреляционные функции (действительно, на «гладких участках траектории» парный коррелятор как функция разности времен τ пропорционален τ^2 , а на осциллирующих, как мы увидим ниже, он пропорционален τ).

Итак, выберем точку, в которой значение ω имеет локальный максимум. Выберем цилиндрическую систему координат с центром в этой точке и осью z , направленной вдоль ω . Рассмотрим теперь близкую окрестность этой точки. Поскольку происходит быстрое вращение вокруг направления завихренности z , течение можно считать не зависящим от угла ϕ . Поэтому рассмотрим аксиально симметричное течение. В линейном приближении имеем

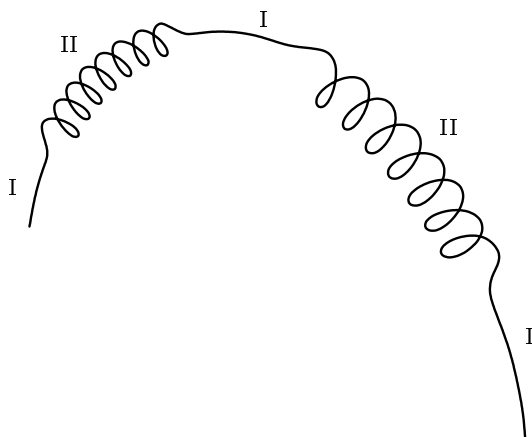


Рис. 1. Модельный вид траектории лагранжевой частицы

$$v_\phi = \omega r, \quad v_r = a(t)r, \quad v_z = b(t)z, \quad (14)$$

что возвращает нас к примеру (4), рассмотренному в разд. 2.

Из уравнений непрерывности и сохранения углового момента, согласно (6), (7), имеем

$$2a + b = 0, \quad \dot{\omega} + 2a(t)\omega = 0.$$

Выражение для $\mathbf{r}(t)$ задается уравнениями (14):

$$\frac{dr}{dt} = a(t)r, \quad \frac{dz}{dt} = b(t)z, \quad \frac{d\phi}{dt} = \omega(t). \quad (15)$$

При этом параметры ω, a, b меняются медленно на временах порядка τ_c , а осцилляции происходят быстро, $\omega\tau_c \gg 1$. Таким образом, с точностью до τ/τ_c имеем

$$|\delta\mathbf{v}| = |\mathbf{v}(t + \tau) - \mathbf{v}(t)| = 2v_\phi \sin \frac{\delta\phi}{2} = 2r\omega \sin \frac{\omega\tau}{2}. \quad (16)$$

Для вычисления n -х корреляционных функций надо возвести модуль $\delta\mathbf{v}$ в n -ю степень и усреднить по плотности вероятности распределения завихренности. Проинтегрируем заранее функцию распределения (11) по всем переменным, кроме модуля завихренности; получим плотность вероятности модуля завихренности $P(\omega, t)$. Стационарная плотность вероятности $P(\omega)$ при больших ω была определена в работе [4]. В главном порядке она имеет вид

$$P(\omega) = C\omega^{-4}. \quad (17)$$

Рассмотрим вначале парную структурную функцию

$$K_2(\tau) = \langle (\mathbf{v}(t + \tau) - \mathbf{v}(t))^2 \rangle.$$

Согласно сказанному выше, она имеет вид

$$K_2(\tau) \propto \int P(\omega, t) \omega^2 \sin^2(\omega\tau) d\omega. \quad (18)$$

Легко увидеть, что она сходится для стационарной плотности распределения вероятности (17). Действительно,

$$K_2(\tau) \propto \int_0^\infty \frac{\omega^2 \sin^2(\omega\tau/2)}{\omega^4} d\omega \propto \tau \int_0^\infty \frac{\sin^2(q)}{q^2} dq$$

(δv_z^2 дает вклад, квадратичный по z).

Итак, мы нашли, что при $\tau \ll \tau_c$ парная структурная функция вдоль лагранжевой траектории имеет вид

$$K_2(\tau) \propto \tau.$$

Это выражение согласуется с предсказанием теории Колмогорова (К41) [2, 3].

Для определения высших структурных функций $K_n(\tau)$ воспользуемся полученными ранее выражениями для моментов завихренности. Действительно, $K_n(\tau)$ задается выражением

$$K_n(\tau) \propto \int_0^\infty P(\omega, t) |\omega|^n |\sin(\omega\tau)|^n d\omega. \quad (19)$$

С другой стороны,

$$\int_0^\infty P(\omega, t) \omega^{2n} d\omega \propto e^{\Lambda_{2n} t}.$$

Вычислим структурные функции (19) на временах t , удовлетворяющих неравенству

$$1 \ll t \ll \frac{\ln(\tau^{-2})}{\Lambda_{2n+2} - \Lambda_{2n}}, \quad \tau \rightarrow 0.$$

Тогда при $\tau \rightarrow 0$ можно ограничиться первым членом в разложении синуса в выражении (19), и мы получим

$$K_n(\tau) \propto \tau^n e^{\Lambda_{2n} t}. \quad (20)$$

Выражение (20) означает, что, исключив время t , можно выразить все структурные функции через $K_2(\tau)$:

$$\left(\frac{K_n(\tau)}{\tau^n}\right)^{1/\Lambda_{2n}} \propto \left(\frac{K_2(\tau)}{\tau^2}\right)^{1/\Lambda_4}. \quad (21)$$

Отсюда, учитывая, что $K_2(\tau) \propto \tau$, находим

$$K_n \propto \tau^{\zeta_n}.$$

Скейлинговые параметры ζ_n равны

$$\zeta_n = n - \frac{\Lambda_{2n}}{\Lambda_4}. \quad (22)$$

Приведем численные значения первых двенадцати параметров ζ_n :

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= 0.59, & \zeta_2 &= 1, & \zeta_3 &= 1.3, \\ \zeta_4 &= 1.51, & \zeta_5 &= 1.65, & \zeta_6 &= 1.75, \\ \zeta_7 &= 1.77, & \zeta_8 &= 1.75, & \zeta_9 &= 1.69, \\ \zeta_{10} &= 1.59, & \zeta_{11} &= 1.45, & \zeta_{12} &= 1.28. \end{aligned} \quad (23)$$

Заметим, что при определении скейлинговых параметров мы могли и не пользоваться выражением для стационарной структурной функции $K_2(\tau)$. Действительно, учтем, что с ростом n параметры

Λ_n быстро возрастают, принимая большие значения (например, $\Lambda_{32} = 96.16$). Тогда, используя формулу (21), получим

$$K_1(\tau) \propto \tau^{1-16\Lambda_2/\Lambda_{32}} K_{16}^{\Lambda_2/\Lambda_{32}}.$$

Учитывая очень малое значение отношения $\Lambda_2/\Lambda_{32} \approx 0.026$, естественно пренебречь отличием последнего члена $K_{16}^{0.026}$ от единицы. Получаем

$$K_1(\tau) \propto \tau^{0.58},$$

аналогично для K_2 находим

$$K_2(\tau) \propto \tau^{0.98} \approx \tau.$$

Тем самым демонстрируется согласованность нестационарных и стационарных решений уравнения (12). Тот же способ дает следующие четыре скейлинговые константы:

$$\zeta'_1 = 0.58, \quad \zeta'_2 = 0.98, \quad \zeta'_3 = 1.26,$$

$$\zeta'_4 = 1.46, \quad \zeta'_5 = 1.59, \quad \zeta'_6 = 1.67.$$

Заметим, что при получении связи между структурными функциями (21) мы ограничились лишь первым членом разложения по τ . Убедимся в справедливости этого разложения при $\tau \ll 1$. Выразим, используя (20), растущую по времени экспоненту через K_{16} , получим

$$e^t = \left(\frac{K_{16}}{\tau^{16}}\right)^{1/\Lambda_{32}}. \quad (24)$$

Полный ряд для K_2 имеет вид

$$K_2 = \tau^2 e^{\Lambda_4 t} - \frac{1}{3} \tau^4 e^{\Lambda_6 t} + \frac{2}{45} \tau^6 e^{\Lambda_8 t} + \dots \quad (25)$$

Подставляя (24) в (25), найдем

$$K_2 = \tau^{0.98} K_{16}^{0.06} - \frac{1}{3} \tau^{2.26} K_{16}^{0.11} + \frac{2}{45} \tau^{3.46} K_{16}^{0.16} + \dots$$

Видно, что асимптотически при $\tau \rightarrow 0$ структурная функция определяется именно первым членом, близким к стационарному. Аналогичные соотношения справедливы и для более высоких структурных функций.

Отметим, что выражение (21) позволяет получить скейлинговые соотношения между любыми двумя структурными функциями. Например, величины

$$C_{n/m} = \frac{K_n}{K_m^{\Lambda_{2n}/\Lambda_{2m}}} \tau^{m \frac{\Lambda_{2n}}{\Lambda_{2m}} - n} \quad (26)$$

не должны зависеть от времени.

4. СРАВНЕНИЕ ТЕОРИИ С ЭКСПЕРИМЕНТОМ

Этот раздел посвящен сопоставлению теории с результатами последовательной серии экспериментальных исследований турбулентности, осуществленной в последнее время группой Боденшатца [1, 5]. Экспериментальная установка представляет собой цилиндрический сосуд с водой объемом 0.1 м^3 . Течение в сосуде создается вращением в противоположных направлениях двух дисков с пропеллером, установленных вблизи верхней и нижней крышек цилиндра — течение Куэтта. Частота вращения дисков может меняться, что позволяет изменять параметры течения, возбуждать турбулентность и исследовать ее, эффективно наращивая локальное число Рейнольдса R_λ в изучаемом масштабе. Специальная лазерная система позволяет детально исследовать трехмерную картину турбулентных пульсаций скорости течения.

В работе [5] наблюдались сильно вытянутые вихревые нити. В этих экспериментах было продемонстрировано, что наибольшие значения ускорения достигаются именно в окрестности таких вихревых структур. Было показано, что распределение вероятностей таких ускорений в области больших значений имеет существенно негауссовский вид.

Таким образом, общая картина наблюдаемой вихревой структуры в турбулентном течении вполне соответствует нашей теории [4].

Количественное сопоставление рассматриваемой здесь теории удастся осуществить с уникальными результатами работы [1]. В этой работе изучаются структурные функции лагранжевых траекторий мелких примесных частиц путем их прямого наблюдения в турбулентном течении. Частицы — полистироловые микросферы радиуса 25 мкм , их диаметр меньше или сравним с колмогоровским масштабом η для всех изучаемых локальных чисел Рейнольдса R_λ . Исследование турбулентности проводится в геометрическом центре системы в объеме $(2.5 \text{ см})^3$.

Последнее обстоятельство заслуживает особого внимания. Дело в том, что размеры изучаемой вблизи центра области очень малы в сравнении с размером всей системы. Как ясно из геометрических соображений, средняя скорость течения в этой области практически отсутствует, так что наблюдаемые перемещения частиц определены турбулентными пульсациями скорости. Поэтому выбранная область представляется нам идеальным полигоном для исследования свойств локально однородной турбулентности.

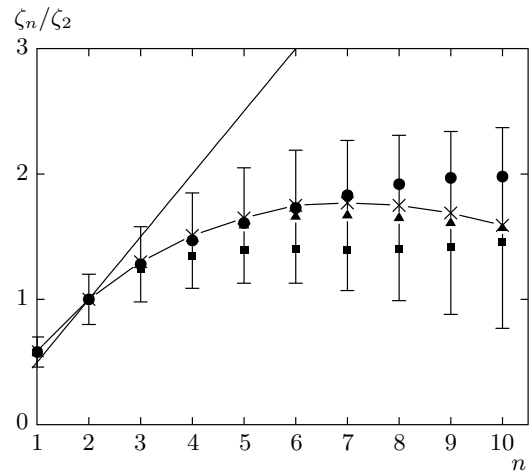


Рис. 2. Зависимость скейлинговых параметров ζ_n от n , полученная в теории (22) (крестики). Точки соединены линией для удобства просмотра. Остальные точки — экспериментальные данные из работы [1], приведенные в таблице; $R_\lambda = 200$ (■), 690 (●), 815 (▲). Показана также максимальная дисперсия данных эксперимента, наблюдаемая при $R_\lambda = 815$. Прямая на рисунке соответствует теории Колмогорова о равномерном перетекании диссипируемой в системе энергии по масштабам в инерционном интервале. Отклонения от этой прямой, как наблюдаемые в эксперименте, так и полученные в нашей теории, являются отражением перемежаемости

В таблице и на рис. 2 приведены полученные в эксперименте скейлинговые показатели лагранжевых структурных функций скорости различных порядков, нормированные на показатель второго порядка. Измерения проведены до десятого порядка ζ_{10} . В трех первых колонках представлены результаты эксперимента для трех существенно различающихся значений локального числа Рейнольдса: $R_\lambda = 200, 690, 815$. В четвертой колонке — результаты нашей теории. Видно хорошее согласие теории с данными наблюдений. Более того, видно, что согласие средних значений с теорией улучшается с ростом R_λ . Так и должно быть, поскольку теория соответствует пределу $R \rightarrow \infty$. Отметим, что, согласно теории, скейлинговые степени сначала растут с ростом момента, достигают максимума при седьмом моменте ζ_7 , а для более высоких моментов убывают. Такой же ход моментов виден в эксперименте для наибольшего значения числа R_λ . Заметим, что теория предсказывает и средние значения более высоких моментов, еще не определенных на опыте.

R_λ	200	690	815	Теория
ζ_1/ζ_2	0.59 ± 0.02	0.58 ± 0.05	0.58 ± 0.12	0.59
ζ_3/ζ_2	1.24 ± 0.03	1.28 ± 0.14	1.28 ± 0.30	1.3
ζ_4/ζ_2	1.35 ± 0.04	1.47 ± 0.18	1.47 ± 0.38	1.51
ζ_5/ζ_2	1.39 ± 0.07	1.61 ± 0.21	1.59 ± 0.46	1.65
ζ_6/ζ_2	1.40 ± 0.08	1.73 ± 0.25	1.66 ± 0.53	1.75
ζ_7/ζ_2	1.39 ± 0.09	1.83 ± 0.28	1.67 ± 0.60	1.77
ζ_8/ζ_2	1.40 ± 0.10	1.92 ± 0.32	1.65 ± 0.66	1.75
ζ_9/ζ_2	1.42 ± 0.11	1.97 ± 0.35	1.61 ± 0.73	1.69
ζ_{10}/ζ_2	1.46 ± 0.12	1.98 ± 0.38	1.57 ± 0.80	1.59

Как видно из таблицы, дисперсия измеренных в эксперименте скейлинговых показателей растет с ростом порядка момента и с увеличением R_λ . Этот факт заслуживает особого внимания. Рост дисперсии с увеличением момента соответствует рассматриваемой теории. Он является следствием перемежаемости. Дело в том, что чем выше момент, тем выше его пиковые значения, и тем реже они встречаются. Пики вносят определяющий вклад в средние значения высоких моментов. Поэтому при заданном ансамбле реализаций случайного процесса величина дисперсии растет с ростом момента. Естествен и рост дисперсии с увеличением локального числа Рейнольдса R_λ , так как реальная высота пиков ограничена вязкостью. О существенной роли вязкости говорит и характерное время установления высших моментов, показанное в работе [1]. В отсутствие вязкости, т. е. при $R_\lambda \rightarrow \infty$, потребовалось бы огромное число реализаций для определения средних значений высоких моментов. Это свойство продемонстрировано, в частности, в работе [9], где в численных расчетах анализировались статистические моменты решения уравнений Якоби на геодезической со случайной кривизной.

Помимо интегральных характеристик — скейлинговых показателей степени — можно сопоставить с результатами нашей теории приведенные в работе [1] прямые экспериментальные данные о зависимости от τ высших структурных функций. Для этого воспользуемся формулой (26), применив ее к парам структурных функций соседних порядков. Например, для структурных функций наибольших измеренных порядков имеем

$$C_{10/9} = \frac{K_{10}}{K_9^{1.15}} \tau^{0.35}, \quad C_{10/8} = \frac{K_{10}}{K_8^{1.35}} \tau^{0.76}. \quad (27)$$

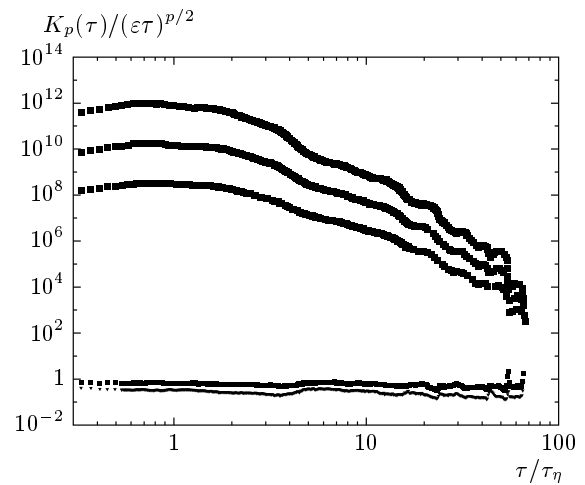


Рис. 3. Три верхние кривые — найденные в эксперименте [1] лагранжевы структурные функции скорости K_8 , K_9 и K_{10} , нормированные на степенные функции, которые дает для них колмогоровская теория. Нижние кривые — комбинации пар структурных функций $C_{10/9}$ и $C_{10/8}$, построенные по формуле (27). Согласно нашей теории, они не должны зависеть от τ . По оси абсцисс время τ нормировано на вязкое время τ_η

Величины $C_{10/9}$, $C_{10/8}$, вычисленные по экспериментальным данным [1], приведены на рис. 3. Видно, что они являются постоянными с точностью до погрешности экспериментального графика. Это полностью соответствует нашей теории.

В недавней работе [10] представлены новые экспериментальные данные, полученные в расширенной области наблюдений, и проведено тщательное сопоставление с результатами численного счета. Установлено их хорошее соответствие в области достаточно больших значениях $\tau/\tau_\eta \approx 10 - 50$ и при

наибольших доступных числах Рейнольдса (эксперимент — $R_\lambda = 690$, счет — $R_\lambda = 280$). Близкие значения скейлинговых показателей дает и наша теория: $\zeta_4/\zeta_2 = 1.51$, $\zeta_6/\zeta_2 = 1.75$ (ср. эти значения с рис. 5 из работы [10]).

Подчеркнем, что при вычислении скейлинговых показателей в теории не использовалось никаких дополнительных предположений или подгоночных параметров. Поэтому совпадение численных значений констант, полученных в теории, с наблюдаемыми в эксперименте представляется удивительным (см. таблицу и рис. 2). То же относится и к точному виду лагранжевых структурных функций (рис. 3). Достаточно большая точность, с которой найденные нами комбинации лагранжевых структурных функций (26) оказываются постоянными, позволяет предположить, что их можно использовать в качестве лагранжева аналога ESS-анзатца, применяемого при анализе экспериментальных данных об эйлеровых структурных функциях [8].

5. УНИВЕРСАЛЬНЫЙ СКЕЙЛИНГ ДЛЯ ВЫСШИХ КОРРЕЛЯТОРОВ ПОЛОЖЕНИЯ ЛАГРАНЖЕВЫХ ЧАСТИЦ

Метод лагранжевых траекторий дает возможность изучать статистические корреляторы не только скоростей, но и положений частиц. Это позволяет ввести новое понятие в турбулентности: лагранжевы структурные функции положения частиц R_n . Определим эти величины согласно соотношению

$$R_n(\tau) = \langle |r(t + \tau) - r(t)|^n \rangle.$$

Тогда в областях повышенной завихренности, интегрируя (15) и действуя аналогично (16), найдем выражения для R_n :

$$R_n(\tau) \propto \int P(\omega) \sin^n(\omega\tau) d\omega \propto \int \frac{\sin^n(\omega\tau)}{\omega^4} d\omega.$$

Легко видеть, что при $n > 3$ интеграл, взятый со стационарной плотностью вероятности (17), сходится. Следовательно, высшие структурные функции положения лагранжевых частиц определены стационарной частью функции плотности вероятности. Причем в этой асимптотике все скейлинговые показатели одинаковы:

$$R_n(\tau) \propto \int \frac{\sin^n(\omega\tau)}{\omega^4} d\omega \propto \tau^3, \quad n > 3.$$

Иначе говоря, скейлинги всех высших структурных функций положения R_n при $n > 3$ в инерционном

интервале являются универсальными. Универсальный скейлинг R_n — яркое проявление определяющего влияния вихревых нитей на структуру гидродинамической турбулентности в масштабах инерционного интервала, т. е. при $R_1 \gg \eta$. Заметим, что в экспериментах [1] это условие выполняется автоматически, поскольку масштаб полистироловых частиц порядка η .

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В Заключении перечислим основные результаты работы.

1. Определены лагранжевы структурные функции скорости (21) в инерционном интервале развитой турбулентности. Вычислены скейлинговые показатели (23).

2. Проведены количественные сопоставления теории с результатами экспериментов [1, 10] и показано их хорошее согласие.

3. Указана комбинация структурных функций различных порядков, для которой теория дает постоянное значение. Возможно использование этой комбинации как лагранжева аналога ESS-анзатца [8].

4. Введено новое понятие в статистической теории турбулентности — корреляционные функции положения лагранжевых частиц в турбулентном потоке $R_n(\tau)$. Показано, что высшие корреляторы $R_n(\tau)$ при $n > 3$ определяются стационарной функцией распределения вероятности завихренности, а их скейлинговые экспоненты являются универсальными, т. е. не зависят от порядкового номера корреляционной функции n .

Важно подчеркнуть, что в рассматриваемой здесь теории скейлинг структурных лагранжевых функций заранее не предполагался — он получается как прямой результат теории. При этом в теории не использовалось никаких параметров, для подгонки скейлинговых законов. Все полученные здесь закономерности являются свойством уравнения для $f(t, \omega, \nu)$ (12), выведенного в области инерционного интервала непосредственно из уравнений Навье — Стокса.

Работа частично финансировалась Программой фундаментальных исследований РАН 13П «Математические методы в нелинейной динамике», Программой фундаментальных исследований ОФН РАН 12ОФ «Физика атмосферы: электрические процессы, радиофизические методы исследований» и гран-

том Президента РФ для поддержки ведущих научных школ № НШ-1338.2008.2. В. А. С. благодарит фонд «Династия» за поддержку.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Ху, М. Bourgoin, N. T. Ouellette, and E. Bodenschatz, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 024503 (2006).
2. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Гидродинамика*, Наука, Москва (1986).
3. У. Фриш, *Турбулентность. Наследие Колмогорова*, ФАЗИС, Москва (1998).
4. К. П. Зыбин, В. А. Сирота, А. С. Ильин, А. В. Гуревич, *ЖЭТФ* **132**, 510 (2007).
5. G. A. Voth, A. La Porta, A. M. Grawford, J. Alexander, and E. Bodenschatz, arXiv:physics/0110027v2.
6. P. K. Yeung, *Annu. Rev. Fluid Mech.* **34**, 115 (2002).
7. C. Beck, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 064502 (2007).
8. R. Benzi, S. Ciliberto, R. Tripiccion, C. Baudet, F. Massaioli, and S. Succi, *Phys. Rev. E* **48**, R29 (1993).
9. М. Е. Артюшкова, Д. Д. Соколов, *Астр. ж.* **49**, 584 (2005).
10. L. Biferale, E. Bodenschatz, M. Cencini et al., arXiv:0708.0311.