ЖЭТФ, 2008, том 134, вып. 6 (12), стр. 1125–1129

О ТОЧНОСТИ УСРЕДНЕННОГО ОПИСАНИЯ ДВИЖЕНИЯ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В ВЫСОКОЧАСТОТНЫХ ПОЛЯХ

В. И. Гейко [*]***, Г. М. Фрайман***

Институт прикладной физики Российской академии наук
603950, Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию 1 июля 2008 г.

Рассмотрен вопрос о точности усредненного пондеромоторного описания движения заряженных частиц в высокочастотных плавно неоднородных электромагнитных полях в нерелятивистском приближении. Приведен вывод усредненных уравнений в рамках гамильтоновой теории возмущений с помощью техники канонических преобразований. Найдены поправки к пондеромоторному потенциалу, в том числе инерционные, т. е. зависящие от дрейфового импульса. Показано, что изменение энергии частицы после взаимодействия с полем экспоненциально мало по параметру адиабатичности $v/\omega L$.

PACS: 45.50.Dd, 52.20.Dq

В этом году исполняется 50 лет с момента опубликования знаменитой работы Гапонова и Миллера [1] об усредненном описании движения заряженных частиц в сильных электромагнитных полях. Согласно усредненному описанию, дрейфовое движение является потенциальным, а энергообмен с полем в среднем отсутствует. С момента появления работы [1] до настоящего времени многими авторами предпринимались неоднократные попытки выяснить пределы применимости этого приближения (например, [2, 3]). К сожалению, ответ на этот вопрос так и не был получен. Дальше второго-третьего приближения в формулировке, основанной на решении дифференциальных уравнений, пробиться не удавалось, прежде всего, из-за исключительной громоздкости возникающих выражений.

Идея, положенная в основу настоящей работы, довольно проста. Поскольку исходная задача является гамильтоновой, теорию усреднения нужно развивать каноническую, т. е. сохраняющую гамильтоновость в каждом порядке. Оказалось, что идея восходит еще к Пуанкаре, а конкретные методы были развиты сравнительно недавно учениками Колмогорова и Арнольда [4].

Кратко напомним основные результаты работы [1]. Движение классической нерелятивистской заряженной частицы в электромагнитном поле $\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}(\mathbf{r})e^{i\omega t}$, $\mathbf{H}(\mathbf{r},t) = \mathbf{H}(\mathbf{r})e^{i\omega t}$ описывается следующим уравнением:

$$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{e}{m}\mathbf{E}(\mathbf{r},t) + \frac{e}{cm}\left[\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{H}(\mathbf{r},t)\right]. \tag{1}$$

Усредненное описание базировалось на предположении, что решение представляется в виде суммы двух функций: медленно меняющейся на масштабе периода колебаний внешнего поля функции $\mathbf{r}_d(t)$ (дрейфовая координата) и осциллирующей на частоте ω функции $\mathbf{r}_\sim(t)$. В работе [1] в предположении, что $|\mathbf{r}_\sim(t)| \ll L$ и $|\dot{\mathbf{r}}_d(t)| \ll \omega L$ (где L — характерный масштаб изменения амплитуды поля) после усреднения по периоду высокочастотного поля, для дрейфового движения было получено уравнение

$$\ddot{\mathbf{r}}_d = -\nabla\Phi, \quad \Phi = \frac{e^2}{4m^2\omega^2}\,|\mathbf{E}|^2, \tag{2}$$

или интеграл движения

$$\frac{\dot{\mathbf{r}}_d^2}{2} + \Phi = \mathrm{const}. \tag{3}$$

Видно, что дрейфовое движение носит потенциальный характер, т. е. кинетическая энергия имеет стандартный вид, а влияние поля сводится к появлению усредненного потенциала во втором порядке по полю. Однако не ясно, будет ли оно потенциальным в следующих порядках теории возмущений.

[*] E-mail: koleso1v@gmail.com, gigorvas@mail.ru

Чтобы ответить на этот вопрос, проведем усреднение в рамках гамильтонового подхода. Действительно, задача (1) является гамильтоновой с гамильтонианом [5]

$$H = \frac{1}{2m}\left(\mathbf{p} - \frac{e}{c}A(\mathbf{r}, t)\right)^2, \qquad (4)$$

где $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ — вектор-потенциал поля и

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{H} = \operatorname{rot}\mathbf{A}.$$

Приведем задачу к безразмерному виду, для чего введем новые переменные:

$$\begin{gathered}\tau = \omega t, \quad \tilde{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{L}, \quad \mathbf{P} = \frac{\mathbf{p}}{m\omega L},\\ \varepsilon = \frac{e|A_{max}|}{cL\omega m} = \frac{r_\sim}{L} \ll 1,\\ \mathbf{a} = \frac{\mathbf{A}}{|A_{max}|}, \quad \tilde{H} = \frac{H}{m(L\omega)^2},\end{gathered} \qquad (5)$$

в которых гамильтониан записывается как

$$\tilde{H} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{P} - \varepsilon\mathbf{a}(\tilde{\mathbf{r}})\cos\tau\right)^2, \qquad (6)$$

а ε — малый параметр задачи. Здесь мы полагаем, что поле является локализованным в пространстве и уменьшается до нуля на бесконечности, поэтому существует максимальное значение поля, равное A_{max}. Для удобства записи будем в дальнейшем опускать тильду над переменными. Назовем осцилляторным гамильтонианом такой гамильтониан, среднее от которого по периоду при постоянных канонических переменных есть нуль. Тогда выражение (6) преобразуется к виду

$$H = \frac{\mathbf{P}^2}{2} + \varepsilon^2\frac{\mathbf{a}^2(\mathbf{r})}{4} + \varepsilon H_\sim(P, r, \tau, \varepsilon), \qquad (7)$$

где

$$H_\sim = -\mathbf{a}\cdot\mathbf{P}\cos\tau + \varepsilon a^2\cos(2\tau)/4.$$

Видно, что координатная часть входит в гамильтониан как возмущение, т. е. имеет в качестве множителя ε, поэтому наиболее интересен для рассмотрения случай малых $|\mathbf{P}|$, таких что $|\mathbf{P}| \le \varepsilon$. Именно в этом случае возможно отражение частицы пондеромоторным потенциалом. Впоследствии для получения наглядных результатов нам придется явно использовать малость $|\mathbf{P}|$. Заметим, что для пролетных частиц ($|\mathbf{P}| > \varepsilon$) задача существенно проще [6].

Для того чтобы ослабить влияние малых осцилляторных поправок, можно сделать замену переменных, приводящую к исчезновению последнего слагаемого в правой части (7). Это можно сделать путем перехода к новым обобщенным координатам и импульсам с помощью техники канонических преобразований [7]. Напомним, что каноническое преобразование может быть определено своей производящей функцией F, а связь новых и старых обобщенных переменных выглядит следующим образом:

$$\begin{gathered}\mathbf{r} = -\frac{\partial F(\mathbf{P}, \mathbf{r}_1, \tau)}{\partial \mathbf{P}}, \quad \mathbf{P}_1 = -\frac{\partial F(\mathbf{P}, \mathbf{r}_1, \tau)}{\partial \mathbf{r}_1},\\ H_1 = H + \frac{\partial F}{\partial \tau}.\end{gathered} \qquad (8)$$

Здесь индекс «1» означает новые переменные. Будем искать производящую функцию в виде

$$F = -\mathbf{r}_1\cdot\mathbf{P} + \varepsilon S(\mathbf{P}, \mathbf{r}_1, \tau). \qquad (9)$$

После подстановки новых координат и импульсов новый гамильтониан в порядке до ε^2 включительно записывается как

$$\overline{H} = \frac{\mathbf{P}_1^2}{2} + \varepsilon\overline{H}_1 + \varepsilon^2\overline{H}_2 + O(\varepsilon^3), \qquad (10)$$

где

$$\overline{H}_1(\mathbf{P}, \mathbf{r}_1, \tau) = \left(\mathbf{P}\cdot\frac{\partial S}{\partial \mathbf{r}_1} - \mathbf{P}\cdot\mathbf{a}(\mathbf{r}_1)\cos\tau + \frac{\partial S}{\partial \tau}\right), \qquad (11)$$

$$\begin{gathered}\overline{H}_2(\mathbf{P}, \mathbf{r}_1, \tau) = \left(\left(\frac{\partial S}{\partial \mathbf{P}}\cdot\nabla\left(\mathbf{a}(\mathbf{r}_1)\cdot\mathbf{P}\right)\right)\cos\tau + \right.\\ \left. + \frac{\mathbf{a}^2(\mathbf{r}_1)}{4} + \frac{\mathbf{a}^2(\mathbf{r}_1)}{4}\cos(2\tau) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial S}{\partial \mathbf{r}_1}\right)^2\right).\end{gathered} \qquad (12)$$

Для нового гамильтониана потребуем отсутствие осцилляторных слагаемых при первой степени малого параметра ($\overline{H}_1 = 0$). В итоге для $S(\mathbf{P}_1, \mathbf{r}, \tau)$ получаем уравнение

$$\overline{H}_1 = \mathbf{P}\left(\frac{\partial S}{\partial \mathbf{r}_1} - \mathbf{a}(\mathbf{r}_1)\cos\tau\right) + \frac{\partial S}{\partial \tau} = 0, \qquad (13)$$

решение которого имеет вид[1)]

$$S(\mathbf{r}_1, \mathbf{P}, \tau) = \mathbf{P}\int\limits_{-\infty}^{\tau}\mathbf{a}\left(\mathbf{r}_1 + \mathbf{P}(t - \tau)\right)\cos t\,dt. \qquad (14)$$

Новый гамильтониан уже не будет содержать члены порядка ε (по построению). В следующем порядке малости (ε^2) в выражении для гамильтониана будут как осцилляторные, так и медленные члены,

[1)] Характеристики уравнения (13) являются дрейфовыми траекториями нулевого приближения.

которые и дают поправки к дрейфовому гамильтониану. Полный гамильтониан имеет вид

$$H_1 = \frac{\mathbf{P}_1^2}{2} + \varepsilon^2 \langle \overline{H}_2 \rangle_\tau + \varepsilon^2 \overline{H}_\sim, \tag{15}$$

где

$$\overline{H}_\sim = \overline{H}_2 - \langle \overline{H}_2 \rangle_\tau, \tag{16}$$

а угловые скобки означают усреднение по времени τ при прочих постоянных обобщенных переменных. Из формул (12) и (14) видно, что в порядке ε^2 поправки к дрейфовому гамильтониану будут зависеть и от дрейфового импульса $\mathbf{P}_1$. Это можно рассматривать как поправку к пондеромоторному потенциалу либо как некий аналог эффективной массы, появляющийся в высокочастотном поле. Другими словами, это инерционная поправка. Найдем ее, ограничиваясь только членами порядка $\mathbf{P}_1^2$, для этого разложим (14) в ряд по малому $|\mathbf{P}_1|$ и учтем только члены порядка $\mathbf{P}_1^2$. В итоге имеем

$$H_{1d} = \frac{\mathbf{P}_1^2}{2} + \frac{\varepsilon^2}{4}\Big[\mathbf{a}^2 + 3\left((\mathbf{P}_1\cdot\nabla)\,\mathbf{a}\right)^2 + \left[\mathbf{P}_1 \times \operatorname{rot}\mathbf{a}\right]^2 + \\ + 4\,(\mathbf{P}_1\cdot\nabla)\,\mathbf{a}\cdot\left[\mathbf{P}_1\times\operatorname{rot}\mathbf{a}\right]\Big] \tag{17}$$

или в размерном виде

$$H_{1d} = \frac{\mathbf{P}_d^2}{2m} + \frac{e^2}{4mc^2}\left[\mathbf{A}^2 + \frac{1}{m^2\omega^2}\Big\{3\left((\mathbf{P}_d\cdot\nabla)\mathbf{A}\right)^2 + \right. \\ \left. + \left[\mathbf{P}_d\times\operatorname{rot}\mathbf{A}\right]^2 + 4\,(\mathbf{P}_d\cdot\nabla)\,\mathbf{A}\cdot\left[\mathbf{P}_d\times\operatorname{rot}\mathbf{A}\right]\Big\}\right]. \tag{18}$$

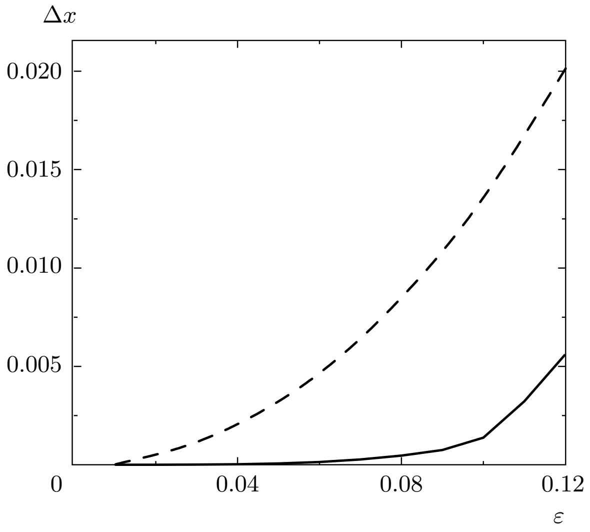
Поправка зависит от направления движения частицы по отношению к вектор-потенциалу. Это особенно ясно, поскольку выражение (17) может быть преобразовано к следующему:

$$H_{1d} = \frac{\mathbf{P}_1^2}{2} + \frac{\varepsilon^2}{4} \times \\ \times \left[\mathbf{a}^2 + \nabla(\mathbf{P}_1\cdot\mathbf{a})\left(\nabla(\mathbf{P}_1\cdot\mathbf{a}) + 2(\mathbf{P}_1\cdot\nabla)\mathbf{a}\right)\right], \tag{19}$$

из которого видно, что эта поправка исчезает, если градиент продольной компоненты вектор-потенциала (вдоль дрейфового импульса $\mathbf{P}_1$) равен нулю. Отметим, что член $\mathbf{P}_d \times \operatorname{rot}\mathbf{A}$ в правой части (18) имеет смысл части силы Лоренца, связанной с магнитным полем. Очевидно, что в этом же порядке возникают релятивистские поправки [2], однако можно показать, что их влияние несущественно, если

$$\frac{\Delta H_{rel}}{\Delta H_d} \propto \left(\frac{\omega L}{c}\right)^2 \ll 1, \tag{20}$$

где ΔH_d — поправка к дрейфовому гамильтониану из (18), ΔH_{rel} — поправка к дрейфовому гамильтониану, обусловленная релятивизмом [2].



Зависимости от ε разности расстояний, пройденных частицей после пролета области локализации поля, между решениями точной задачи (1) и приближенными (3) (штриховая линия) и (18) (сплошная линия)

Прежде чем обсуждать полученные результаты, отметим, что сама процедура вывода выражения (19) зависит от вида производящей функции. Мы могли бы выбрать и другой, отличный от (9), вид. Например, производящая функция могла бы зависеть от нового импульса и старой координаты [7]. В этом случае мы бы получили другой вид инерционной поправки. Это обусловлено тем, что различие производящих функций — в порядке ε^2, т. е. в том же порядке, какой имеет поправка к дрейфовому гамильтониану. Качественно это различие связано с неоднозначностью определения дрейфовых переменных. Вообще говоря, существует бесконечное множество преобразований, уничтожающих осцилляторную часть в порядке ε, различающихся на величину более высоких порядков по ε, в частности, ε^2. В данном случае, как и в случае однородного поля, старые координаты отличаются от новых наличием осцилляторной части. Это означает, что в новых медленных координатах и импульсах старая координата представляется как сумма дрейфовой и осцилляторной, т. е. аналогично тому, как это было сделано в работе [1]. Кроме того, точно такой же вид поправок к гамильтониану получается, если вычислять адиабатический инвариант в переменных энергия–время [6] в одномерном случае.

Для сравнения точности дрейфовых приближений (3) и (18) был проведен численный расчет в одномерном случае. Рассматривался случай пролетных частиц, такой что для каждого значения ε выбирался импульс влета, тоже равный ε. Поскольку в обоих приближениях импульс после пролета сохраняется, оказалось возможным сравнивать лишь времена пролета. На рисунке приведены две кривые, характеризующие разность конечных расстояний при фиксированном времени, пройденных частицей после пролета области локализации поля, между решением точного уравнения (1) и приближенными решениями, получаемыми из уравнений (3) и (18). Величина Δx, поделенная на импульс вылета, и есть разность времен пролета. Как видно, приближение с учетом инерционных поправок (18) точнее описывает движение частицы.

В данной задаче можно реализовать процедуру сверхсходимости, развитую Арнольдом (см., например, [4]). Действительно, исходная задача имела вид (4):

$$H = H_d(\mathbf{P}, \mathbf{r}) + \varepsilon H_{\sim}(\mathbf{P}, \mathbf{r}, \tau, \varepsilon). \tag{21}$$

После одного преобразования получаем

$$H_1 = H_{d1}(\mathbf{P}_1, \mathbf{r}_1) + \varepsilon^2 H_{\sim 1}(\mathbf{P}_1, \mathbf{r}_1, \tau, \varepsilon), \tag{22}$$

на следующем шаге —

$$H_2 = H_{d2}(\mathbf{P}_2, \mathbf{r}_2) + \varepsilon^4 H_{\sim 2}(\mathbf{P}_2, \mathbf{r}_2, \tau, \varepsilon). \tag{23}$$

Таким образом, на каждом шаге мы уменьшаем амплитуду осцилляций. Ясно, что за n шагов удается уменьшить осцилляторный гамильтониан до порядка ε^{2^n}. В этом и заключается идея метода сверхсходимости. Обратим внимание, что приведенная в работе процедура отличается от данной схемы. Во-первых, согласно формулам (21)–(23), надо было уничтожать весь осцилляторный гамильтониан, а не только член в порядке ε, но это не представляет особых сложностей, поскольку сводится лишь к аддитивной добавке еще одного слагаемого. Во-вторых, в качестве характеристик уравнения (13) следовало использовать решения дрейфового гамильтониана (7), т. е. содержащего пондеромоторный потенциал, в то время как мы использовали характеристики нулевого приближения, когда дрейфовые траектории являются прямыми. Однако можно показать, что это не влияет на поправки к дрейфовому гамильтониану в порядке ε^2.

Найдем изменение энергии частицы после взаимодействия с локализованным в пространстве полем. Рассмотрим для простоты одномерную ситуацию. Пусть частица налетает на область локализованного поля с начальным импульсом P_0. Импульс после взаимодействия назовем P_∞. Изменение энергии равно

$$\Delta H = \frac{P_\infty^2}{2} - \frac{P_0^2}{2}. \tag{24}$$

Будем интересоваться изменением энергии в главном порядке по ε. Заметим, что новый гамильтониан не содержит членов в порядке ε. Это означает, что изменение нового импульса возможно только в старших порядках, поэтому можно считать, что новая энергия в главном порядке сохраняется. Однако в силу нелокальности канонического преобразования (14) старый и новый импульсы различаются на величину порядка ε:

$$P_\infty = \overline{P}_\infty + \varepsilon \left.\frac{\partial S}{\partial \overline{x}}\right|_\infty = \overline{P}_\infty + \varepsilon \int\limits_{-\infty}^{\infty} a(\overline{P}_\infty t) \sin t\, dt. \tag{25}$$

Подставляя связь импульсов в (24), получим, что в случае плавного профиля изменение энергии экспоненциально мало:

$$\Delta H \propto \varepsilon \overline{P} \exp\left(-\frac{1}{\overline{P}}\right) \propto e A_{max} \frac{\omega L}{c} \exp\left(-\frac{\omega L}{v}\right). \tag{26}$$

Оценка (26) отображает лишь характер зависимости изменения энергии от малого $\overline{P}$, что же касается величины предэкспоненциального множителя, то ее получить сложнее [8, 9].

Таким образом, мы показали, что усредненное описание применимо, когда неадиабатические поправки малы:

$$\left|\frac{\mathbf{P}}{m\omega L}\right| \ll 1, \tag{27}$$

т. е. когда путь, проходимый частицей за период, мал по сравнению с характерным масштабом неоднородности поля. При этом для усредненного описания вместо формулы (17) можно использовать стандартное выражение (3), поскольку инерционная поправка мала и входит в гамильтониан по порядку величины, как $\varepsilon^2|\overline{P}|^2$. Тем не менее, даже в одномерном случае инерционные поправки важны, если интересоваться фазовыми эффектами, например, в задаче о колебаниях частицы в высокочастотной потенциальной яме. Кроме того, в трехмерном случае эти поправки приводят к дополнительным дрейфам в направлениях, определяемых не только квадратом поля, но и его поляризацией, а также движением самой частицы. В то же время, обязательным остается условие

$$\varepsilon = \frac{r_\sim}{L} \ll 1,$$

иначе развитие теории возмущений оказывается невозможным и, следовательно, нельзя ограничиться формальными соотношениями, получаемыми из ее первых порядков.

В заключение отметим, что сложность в реализации данного метода связана с разложением в ряды и накоплением членов всех порядков, для которых ищем поправки к H_d. Однако регулярная сходящаяся схема построения дрейфового гамильтониана показывает, что усредненное описание остается гамильтоновым во всех порядках теории возмущений, а движение носит консервативный характер. Имеет смысл говорить не о потенциальности, а о гамильтоновости усредненного движения, поскольку, как следует из формулы (17), усредненный гамильтониан, начиная со второго порядка теории возмущений, зависит как от дрейфовых координат, так и от импульсов.

Обратим также внимание, что выражение (19) было получено в условиях разложения (14) по малому $|\mathbf{P}_1|$. На самом деле, в (14) еще содержатся малые поправки, которые принципиальны и ответственны за условие черенковского синхронизма и связанное с этим изменение энергии. Кроме того, предложенная процедура встречает существенные трудности вблизи сепаратрисной поверхности, отделяющей пролетные частицы от отраженных (захваченных). Рассмотрение этих вопросов выходит за рамки данной работы.

Авторы выражают благодарность А. И. Нейштадту за полезные обсуждения. Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 08-02-01209-а) и Фонда некоммерческих программ «Династия».

ЛИТЕРАТУРА

1. А. В. Гапонов, М. А. Миллер, ЖЭТФ **34**, 242 (1958).

2. А. Г. Литвак, М. А. Миллер, Н. В. Шолохов, Радиофизика **V**, 6 (1962).

3. I. Y. Dodin and N. J. Fisch, Phys. Rev. E **74**, 056404 (2006).

4. В. И. Арнольд, В. В. Козлов, А. И. Нейштадт, *Динамические системы — 3*, ВИНИТИ, Москва (1985).

5. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория поля*, Наука, Москва (1988).

6. G. M. Fraiman and I. Y. Kostyukov, Phys. Plasmas **2**, 923 (1995).

7. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Механика*, Наука, Москва (1988).

8. D. V. Treschev, Regul. Chaotic Dyn. **2**, 9 (1997).

9. А. И. Нейштадт, Прикл. матем. и мех. **48**, 197 (1984).