

# РЕГУЛЯРНАЯ И ХАОТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА ЦЕПОЧКИ МАГНИТНЫХ ДИПОЛЕЙ С МОМЕНТАМИ ИНЕРЦИИ

*А. М. Шутый\**

*Ульяновский государственный университет  
432970, Ульяновск, Россия*

Поступила в редакцию 30 октября 2008 г.

На основе численного анализа исследованы возбуждаемые однородным переменным магнитным полем нелинейные динамические режимы цепочки связанных шарообразных тел, обладающих дипольными магнитными моментами. Построением бифуркационных диаграмм получены условия реализации нескольких типов регулярных, хаотических и квазипериодических колебаний. Выявлено влияние связи между диполями на возбуждаемую динамику системы. Рассмотрены особенности временных сечений Пуанкаре для реализуемых случаев синхронного хаоса с противофазной синхронизацией и несинхронного хаоса. Рассчитан спектр показателей Ляпунова для динамических режимов изолированного диполя.

PACS: 05.45.Pq, 75.40.Gb, 75.75.+a

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Исследования сложной нелинейной динамики и, в частности, процессов хаотизации, реализуемых в различных физических системах, в настоящее время имеют важное как теоретическое, так и практическое значение [1–3]. Это связано не только с задачами перевода хаоса на требуемый гармонический режим, но и с возможным использованием регулируемых хаотических и стохастических состояний в новейших технологиях управления и обработки информации [1, 4]. При этом наиболее актуальным является рассмотрение динамики связанных систем, лежащей в основе процессов синхронизации и самоорганизации [4]. Магнитные системы являются весьма удобными и универсальными объектами для изучения сложных динамических режимов, в том числе процессов самоорганизации и динамики различных взаимодействующих пространственных и временных структур. Ведутся исследования формирования и преобразования магнитных доменов [5, 6], динамики связанных магнитных моментов в тонких пленках [7, 8], взаимодействия в магнитных ансамблях [9, 10]. Одной из важных в данном направлении систем является система магнитных частиц, что обусловлено, в частности, формированием на их основе

различных магнитных жидкостей [11, 12] и включением их в биологические среды [13]. Особое значение подобные объекты приобрели в связи с последними достижениями нанотехнологий. Однако анализ стационарных нелинейных режимов намагниченных тел представлен в литературе немногочисленными работами [14, 15], в которых проведены численные исследования возбуждаемой переменным полем хаотической и регулярной динамик двух связанных магнитных диполей с моментами инерции и использовалась модель с одной степенью свободы (вращением вокруг одной оси).

В настоящей работе на основе построения бифуркационных диаграмм, временных сечений Пуанкаре и спектра показателей Ляпунова проводится численный анализ возбуждаемой переменным полем нелинейной динамики взаимодействующих тел, обладающих дипольными магнитными моментами и способных совершать вращения вокруг трех пространственных осей. Тела с механическими моментами инерции предполагаются однородными и шарообразными, что обусловлено не только необходимостью упрощений на первых этапах исследования, но и техническими особенностями формирования соответствующих реальных магнитных объектов [16, 17]. Материал объектов считается магнитожестким (с бесконечно большой коэрцитивной силой). В качестве наиболее простой, но обладающей основными

\*E-mail: shuty@mail.ru

динамическими особенностями системы рассматривается цепочка связанных диполей с периодическими граничными условиями. Приводится также сравнение полученной динамики с режимами, возбуждаемыми как в системе двух связанных диполей, так и в случае изолированного диполя, что позволяет выявить влияние связи на реализуемые динамические режимы и в определенной степени прогнозировать результаты исследований более сложных систем.

## 2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ И БИФУРКАЦИОННЫЕ ДИАГРАММЫ

Предполагается, что соседние диполи в цепочке удалены друг от друга на расстояние  $\mathbf{r} = a\mathbf{e}_z$  в направлении оси  $z$ . При этом принимается, что каждый из них способен вращаться вокруг неподвижной точки, которая совпадает с центром симметрии и является также центром инерции. В присутствии внешнего однородного вдоль цепочки переменного магнитного поля  $\mathbf{H} \sin(\tilde{\omega}t)$  система динамических уравнений в приближении учета связи только соседних магнитных диполей имеет вид

$$J_i \frac{d\boldsymbol{\omega}_i}{dt} + \alpha_i \boldsymbol{\omega}_i = \mathbf{p}_i \times \left\{ \mathbf{H} \sin(\tilde{\omega}t) + \sum_{m=i\pm 1} \left[ \frac{3\mathbf{r}_m(\mathbf{p}_m \cdot \mathbf{r}_m)}{a^5} - \frac{\mathbf{p}_m}{a^3} \right] \right\}, \quad (1)$$

$$\frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{p}_i,$$

где  $\mathbf{p}_i$  и  $\boldsymbol{\omega}_i = d\boldsymbol{\varphi}_i/dt$  — дипольный магнитный момент и угловая скорость  $i$ -го диполя ( $\varphi_{ij}$  — угол поворота соответствующего диполя вокруг оси  $j = x, y, z$ ),  $J_i$  — момент инерции,  $\alpha_i$  — параметр диссипации. Далее магнитные диполи принимаются идентичными:  $|\mathbf{p}_i| = p$ ,  $J_i = J$ ,  $\alpha_i = \alpha$ . Переходя к безразмерным параметрам, запишем систему (1) в явном виде:

$$\frac{d\omega_{ix}}{d\tau} = -\beta\omega_{ix} + f(\rho_{iy}\eta_y - \rho_{iz}\eta_z) \sin(\Omega\tau) + \sum_m (\rho_{iz}\rho_{my} + 2\rho_{iy}\rho_{mz}),$$

$$\frac{d\omega_{iy}}{d\tau} = -\beta\omega_{iy} + f(\rho_{iz}\eta_x - \rho_{ix}\eta_z) \sin(\Omega\tau) - \sum_m (\rho_{iz}\rho_{mx} + 2\rho_{ix}\rho_{mz}),$$

$$\frac{d\omega_{iz}}{d\tau} = -\beta\omega_{iz} + f(\rho_{ix}\eta_y - \rho_{iy}\eta_x) \sin(\Omega\tau) + \sum_m (\rho_{iy}\rho_{mx} - \rho_{ix}\rho_{my}),$$

$$\frac{d\rho_{ix}}{d\tau} = \omega_{iy}\rho_{iz} - \omega_{iz}\rho_{iy}, \quad (2)$$

$$\frac{d\rho_{iy}}{d\tau} = \omega_{iz}\rho_{ix} - \omega_{ix}\rho_{iz},$$

$$\frac{d\rho_{iz}}{d\tau} = \omega_{ix}\rho_{iy} - \omega_{iy}\rho_{ix},$$

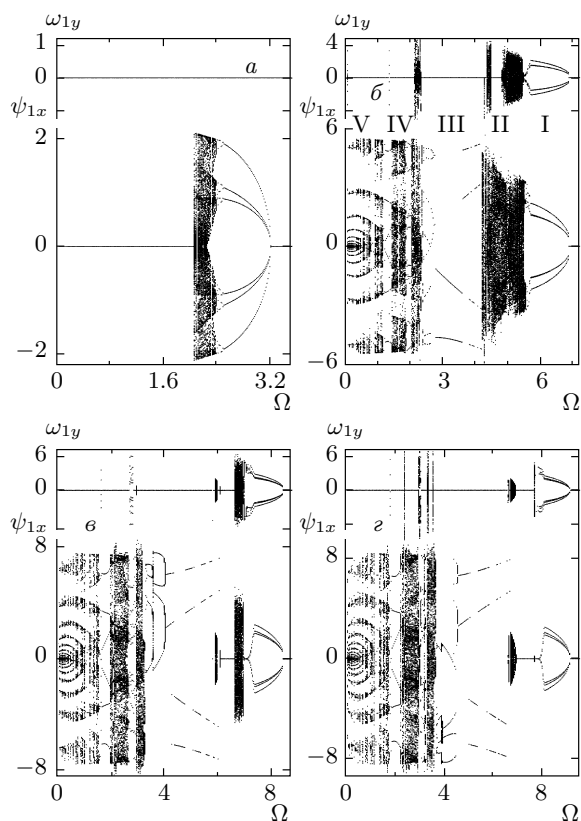
где дифференцирование проводится по безразмерному времени  $\tau = \nu t$ , где  $\nu = \sqrt{p^2/Ja^3}$  (при этом  $\boldsymbol{\omega}_i = d\boldsymbol{\varphi}_i/d\tau$ ),  $\rho_{ij} = p_{ij}/p$  и  $\eta_j = H_j/H$  — нормированные компоненты векторов магнитных моментов и внешнего магнитного поля. Остальные безразмерные параметры выражаются через исходные следующим образом:

$$\Omega = \tilde{\omega}/\nu, \quad \beta = \alpha/\nu J, \quad f = pH/\nu^2 J. \quad (3)$$

Внешнее переменное поле далее принимается линейно поляризованным и ориентированным вдоль оси  $z$  ( $\eta = \eta_z$ ). В отсутствие внешнего магнитного поля ( $\eta = 0$ ) связанная система имеет два состояния устойчивого равновесия с  $\rho_{iz} = 1$  или  $\rho_{iz} = -1$ , выбор между которыми определяется начальными условиями. Для исследования изолированного магнитного диполя система (2) состоит из шести уравнений без слагаемых, содержащих суммы.

В случае однородного по цепочке переменного поля динамика связанных диполей либо представляет собой синхронные колебания всей системы, либо система разбивается на две подсистемы, диполи каждой из которых разделены диполями другой подсистемы и совершают синхронные колебания по общему аттрактору. Это подтверждает также прямой численный эксперимент, который показал, что расчет динамики четырех диполей (в системе (2)) по результатам не отличается от расчета системы большего, например сотни, четного числа диполей. Таким образом, численный анализ системы (2) можно проводить только для двух диполей (подсистем) при удвоении выражения, стоящего под знаком суммы. Далее индекс  $i = 1, 2$  будет обозначать также две указанные подсистемы магнитных диполей.

Исследование методами численного анализа устанавливающих под воздействием переменного магнитного поля нелинейных динамических режимов наиболее удобно начать построением бифуркационных диаграмм [1, 14, 18]. На рис. 1 диаграммы приведены для одной из подсистем связанных диполей на плоскостях  $(\psi_{1x}; \Omega)$  и  $(\omega_{1y}; \Omega)$ ,



**Рис. 1.** Бифуркационные диаграммы для одной из подсистем связанных магнитных диполей: частотные зависимости экстремумов угловой скорости вращения диполей вокруг оси  $x$  и соответствующих им значений скорости вращения вокруг оси  $y$ ;  $\beta = 1.5, f = 5$  (а), 15 (б), 25 (в), 30 (г)

где  $\psi_{1x} = \omega_{1x \max}, \omega_{1x \min}$ , каждому значению частоты  $\Omega$  соответствуют экстремальные значения угловой скорости вращения вокруг оси  $x$ , а  $\omega_{1y}$  — соответствующие указанным экстремумам значения скорости вращения вокруг оси  $y$ . Принимались следующие начальные условия:  $\omega_{ij}(0) = 0, \rho_{iz}(0) \approx 1$ . При этом, если на бифуркационной диаграмме одному значению частоты отвечает лишь одна точка, т.е. единственное значение  $\psi_{1x}$ , то имеет место либо отсутствие колебаний вокруг выбранной оси (когда  $\psi_{1x} = 0$ ), либо равномерное вращение (когда  $\psi_{1x} \neq 0$ ). В случае двух или большего конечного числа точек реализуются регулярные колебательные режимы: при  $\omega_{1x \min} = -\omega_{1x \max}$  устанавливаются колебания относительно некоторого равновесного положения, при  $|\omega_{1x \min}| \neq |\omega_{1x \max}|$  — режимы, при которых объекты совершают неограниченное число витков вокруг оси вращения (далее подобные режимы будем называть вращательными).

Множеству близко расположенных точек отвечает хаотическая динамика магнитных диполей (за исключением описанных ниже случаев, когда имеют место квазипериодические режимы).

На диаграммах, как правило, можно выделить пять частотных интервалов (см. рис. 1б). При больших частотах переменного поля имеет место динамическая невосприимчивость. Уменьшение частоты приводит к возникновению регулярных колебаний с малыми амплитудами угловой скорости; угол отклонения магнитного диполя от начального положения при этом оказывается меньше  $\pi$ . Частотный интервал, отвечающий данным режимам (здесь и далее будем обозначать его и соответствующие ему режимы цифрой I), со стороны больших частот ограничен бифуркацией Хопфа, а со стороны меньших — частотным интервалом II, отвечающим преимущественно хаотическим колебаниям. При дальнейшем уменьшении частоты реализуются вращательные регулярные режимы магнитных диполей, которым соответствует продолжительный частотный интервал III, ограниченный слева интервалом IV, отвечающим хаотической динамике. Последний из частотных интервалов V характеризуется частой сменой регулярных и хаотических режимов, причем в случае хаоса экстремальные значения угловой скорости оказываются расположенными вблизи выделенных значений. Следует отметить, что внутри интервалов II и IV, отвечающих преимущественно хаотической динамике, также имеются частотные области регулярных режимов магнитных диполей, а в интервале II при достаточно больших полях и параметре диссипации появляются области, отвечающие квазипериодическим колебаниям (см. рис. 1в,г). В случае слабого переменного поля (см. рис. 1а) реализуются только режимы, отвечающие интервалам I и II, и на малых частотах имеет место динамическая невосприимчивость системы. Из рис. 1 также видно, что усиление переменного поля вначале приводит к расширению, а затем к уменьшению и даже полному исчезновению интервала II. Интервалы III–V при увеличении  $f$  расширяются и смещаются в сторону больших частот.

В случае регулярных режимов оси вращения магнитных диполей лежат, в общем случае, в плоскости  $xy$ , а на конкретный выбор их ориентации влияют флуктуации начальных условий (в частности, в проводимых расчетах принималось  $\rho_{iy}(0) \approx \pm 10^{-7}$ ). В случае хаотических режимов в частотных интервалах II и IV имеют место плоскостная динамика, когда ось вращения остается неизменной, а аттрактором в фазовом пространстве  $\rho_{ij}$  является окруж-

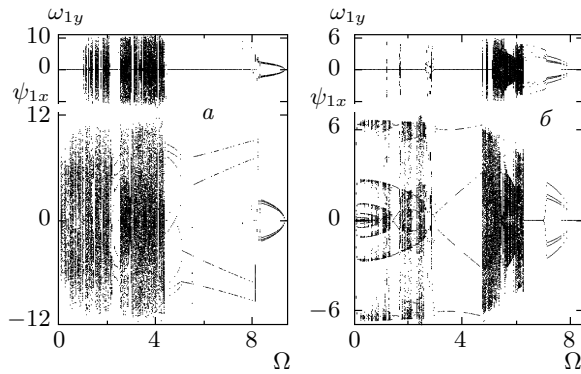


Рис. 2. То же, что на рис. 1, при  $f = 30$ ,  $\beta = 0.5$  (а),  $3.0$  (б)

ность, и трехмерные колебания, когда направление оси вращения изменяется со временем. При этом плоскостной хаотической динамике в интервале IV отвечает синхронный хаос с противофазной синхронизацией соседних диполей [4], а объемной динамике в данном интервале и хаотическим режимам в интервале II — несинхронный хаос, когда колебания диполей разных подсистем принадлежат общему аттрактору, но  $\rho_{1j}(\tau) \neq \rho_{2j}(\tau)$ , или синхронизация неустойчива и устанавливается только на малые интервалы времени (о чем будет сказано ниже). Регулярная динамика двух подсистем диполей совершается в противофазе при всех режимах, кроме режимов интервала I, в котором имеют место синфазные колебания.

Регулярные режимы интервала III устанавливаются в условиях бистабильности, так как возможны два направления вращения. Из рис. 1 видно, что вероятности выбора того или иного направления приблизительно равны. Получение чередующихся частотных областей, отвечающих только одному из направлений, обусловлено особенностями компьютерного счета. Следует заметить, что обнаруженная в работе [14] асимметрия в установлении направления вращения магнитных диполей может быть объяснена заданными начальными условиями. Динамическая бистабильность имеет место также в области малых частот интервала II. Точнее, хаотическая динамика в этой области является метастабильной, так как достаточно большое отклонение диполей от равновесной ориентации (которое при хаотических колебаниях может произойти в различные моменты времени) выводит фазовую траекторию в область притяжения регулярного аттрактора.

На рис. 2 приведены аналогичные бифуркационные диаграммы для  $f = 30$  и  $\beta = 0.5, 3.0$ , из кото-

рых следует, что в случае малых параметров диссипации (при выбранной величине возмущения) регулярные режимы в частотном интервале V и хаотические режимы интервала II практически отсутствуют. Рост диссипации приводит также к уменьшению в интервале IV областей, отвечающих объемным несинхронным хаотическим колебаниям, которые при этом сменяются плоскостными колебаниями синхронного хаоса.

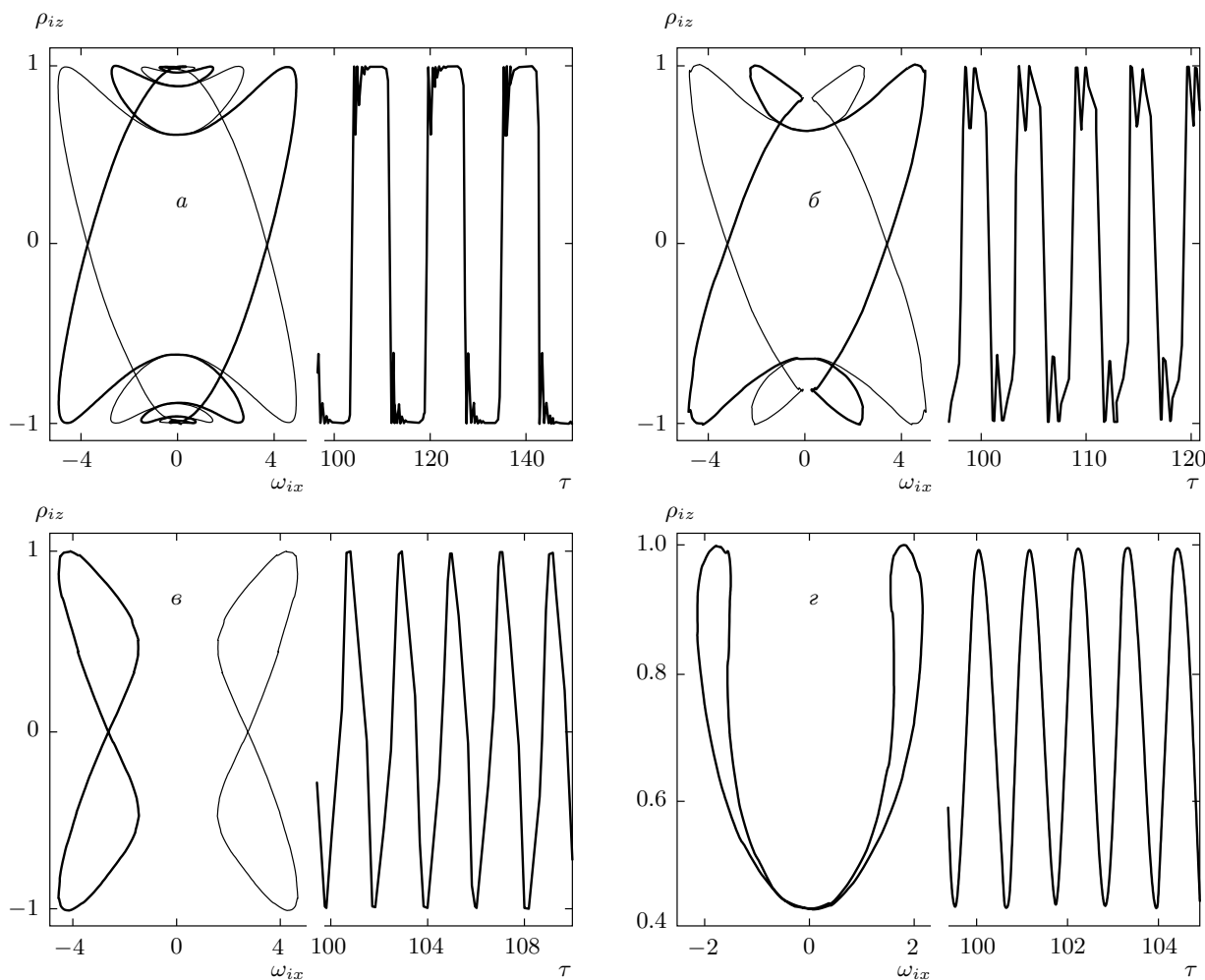
Дополнительный анализ показывает, что рассмотренные выше бифуркационные диаграммы и отражаемые ими динамические режимы характерны также для двух связанных диполей и изолированного диполя. Однако в случае изолированного диполя отсутствуют объемные хаотические колебания, а также рассмотренные ниже квазипериодические режимы.

Для построения бифуркационных диаграмм при численном моделировании (с использованием метода Рунге–Кутты с подстраиваемым шагом) динамика магнитных моментов выводилась на стационарный режим, т. е. когда увеличение времени наблюдения за системой не меняет (в пределах точности вычислительной программы) аттракторов режимов. Время, в течение которого фиксировались экстремальные значения  $\psi_{1x}$ , подбиралось таким образом, чтобы полностью успевала проявиться форма аттракторов устанавливающихся хаотических режимов (в большинстве случаев данное время  $\tau \approx (50-100)\pi/\Omega$ ). При этом с увеличением  $\tau$  форма аттрактора не меняется, а на бифуркационной диаграмме увеличивается лишь плотность отвечающих ему точек.

### 3. РЕГУЛЯРНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ РЕЖИМЫ

Рассмотрим основные типы реализуемой регулярной динамики связанных магнитных диполей. На рис. 3 представлены фазовые траектории  $\rho_{iz}(\omega_{ix})$  и соответствующие временные зависимости  $\rho_{iz}(\tau)$  для регулярных режимов, устанавливающихся при  $f = 15$  и  $\beta = 1.5$  на частотах  $\Omega = 0.4, 1.2, 3.0, 5.7$ . В случаях рис. 3а–в колебания диполей двух подсистем совершаются в противофазе, при этом выполняются равенства  $\rho_{1z}(\tau) = \rho_{2z}(\tau)$  и  $\rho_{1x,y}(\tau) = -\rho_{2x,y}(\tau)$ ; в случае рис. 3г колебания диполей системы синфазные.

При малых частотах  $\Omega < 1$  (интервал V) устанавливаются режимы переключательного типа (рис. 3а) с большим временем пребывания магнит-



**Рис. 3.** Проекция фазовых траекторий регулярных режимов двух подсистем магнитных диполей ( $i = 1$  — толстая линия,  $i = 2$  — тонкая) и соответствующие временные зависимости;  $f = 15$ ,  $\beta = 1.5$ ,  $\Omega = 0.4$  (а), 1.2 (б) 3.0 (в), 5.7 (г)

ных моментов в состоянии с  $\rho_{iz} = \pm 1$  и короткими фазами перехода, содержащими высокочастотные колебания. Переходы между двумя состояниями осуществляются в плоскости  $zy$ , что, как было сказано, обусловлено выбором начальных условий. Увеличение частоты внешнего поля приводит к увеличению в периоде колебаний доли переходной фазы и сглаживанию ступенчатого профиля зависимости  $\rho_{iz}(\tau)$ . Реализуемые режимы переключательного типа могут быть как регулярными, так и хаотическими, — на бифуркационных диаграммах (рис. 1) узкие частотные интервалы, отвечающие регулярной динамике, чередуются с интервалами, отвечающими хаосу. При регулярных режимах переходы из состояний с  $\rho_{iz} = \pm 1$  к состояниям с  $\rho_{iz} = \mp 1$  могут осуществляться как в одном направлении, т. е. имеет место неравномерное во времени вращение магнитных ди-

полей (данному случаю соответствует рис. 3а), так и в разных направлениях с различным периодом чередования. В частности, при  $\Omega = 0.26$  реализуется режим с периодом, равным двум периодам переменного поля, а при  $\Omega = 0.24$  — шести периодам поля, когда три перехода, совершаемые в одном направлении, например по часовой стрелке, сменяются тремя переходами, осуществляемыми в противоположном направлении. При хаотических режимах направления переходов меняются случайным образом, а аттрактор оказывается подобным «зашумленному» аттрактору регулярных колебаний. Таким образом, хаос переключательного типа оказывается подобным спиновому хаосу [4].

Регулярные режимы, соответствующие частотным областям внутри интервала IV (отвечающего преимущественно хаосу), не являются вращатель-

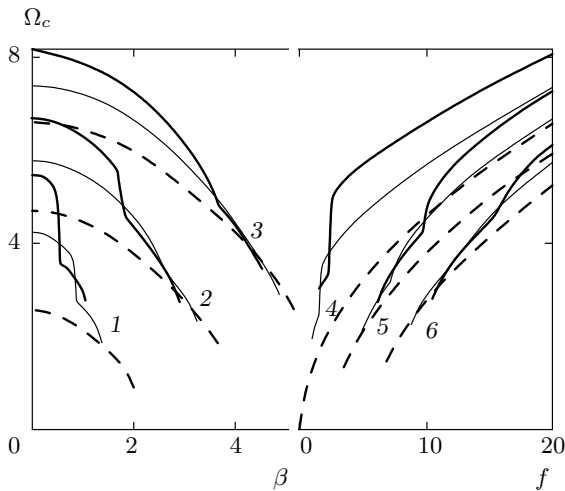


Рис. 4. Зависимости для изолированного (штрихи), двух связанных (тонкая линия) и цепочки (толстая линия) диполей частоты  $\Omega_c$ , отвечающей бифуркации Хопфа, от параметров  $\beta$  (кривые 1, 2, 3 при  $f = 3, 10, 20$ ) и  $f$  (кривые 4, 5, 6 при  $\beta = 0.5, 2.0, 3.0$ )

ными — магнитные диполи не совершают полного оборота вокруг оси вращения (рис. 3б). При этом реализуются состояния с  $\rho_{iz} = \pm 1$ , а траектории оказываются симметричными относительно плоскости  $xy$ . Так как перед установлением рассматриваемых режимов диполи в течение некоторого времени совершают хаотические колебания, начальная ориентация мало влияет на выбор оси вращения, которая располагается в плоскости  $xy$  произвольным образом согласно предшествующей переходной динамике. Регулярные режимы, устанавливающиеся на частотах интервала III, является вращательными (рис. 3в) с направлением вращения, определяемым различными флуктуациями начальных условий и параметров системы. Режимы интервала I (рис. 3г) представляют собой синфазные колебания магнитных диполей  $\rho_{1j}(\tau) = \rho_{2j}(\tau)$  относительно положения с  $\rho_{iz} = 1$  (или  $\rho_{iz} = -1$ ). Среди динамических режимов данные колебания имеют наименьшую амплитуду.

На рис. 4 для изолированного, двух связанных и цепочки магнитных диполей приведены зависимости критической частоты  $\Omega_c$  рождения предельного цикла (с уменьшением частоты после динамической невосприимчивости), т. е. частоты бифуркации Хопфа, от параметров  $\beta$  и  $f$ , характеризующих соответственно величину диссипации и амплитуду внешнего поля. Видно, что связь между диполями увели-

чивает критическую частоту практически при всех значениях параметров, за исключением некоторых областей вблизи предельных (для возбуждения колебаний) величин  $\beta$  и  $f$ . При этом значение частоты  $\Omega_c$  возрастает с увеличением  $f$  или с уменьшением параметра  $\beta$ . Имеющийся излом на кривых, отвечающих связанным диполям, обусловлен возникновением неустойчивости аттрактора и переходом динамики к другому регулярному режиму. Для цепочки диполей величина  $\Omega_c$  оказывается больше, чем для двух связанных диполей, главным образом, до указанного излома (при достаточно малых  $\beta$  и больших  $f$ ).

#### 4. ХАОТИЧЕСКИЕ И КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕЖИМЫ

Наряду с рассмотренными в предыдущем разделе переключательными режимами, имеющими аттрактор со слабовыраженной хаотичностью, в динамике магнитных диполей, как было показано на бифуркационных диаграммах, реализуются различные типы хаотических колебаний, в частности, как синхронный, так и несинхронный хаос. На рис. 5 для одной из подсистем магнитных диполей на фазовых плоскостях  $(\rho_{1y}, \omega_{1x})$  и  $(\rho_{1z}, \omega_{1x})$  дано точечное представление проекций фазовых траекторий, в котором плотность распределения точек (серого цвета) пропорциональна инвариантной мере Крылова–Боголюбова по аттракторам, отвечающим значениям параметров  $f = 15, \beta = 1.5$  на частотах  $\Omega = 1.5, 2.2, 4.6, 5.4$ . Черными точками даны временные сечения Пуанкаре аттракторов [19, 20], являющиеся дискретным по времени (с шагом  $\Delta\tau = \pi/\Omega$ ) представлением рассматриваемых проекций аттракторов нормированного магнитного момента. Сечения построены при начальной фазе  $\phi = 0$  переменного поля, записываемого в виде  $H(\tau) = H \sin(\phi + \Omega\tau)$ .

Хаотические колебания, приведенные на рис. 5а, являются плоскостными, т. е. с постоянной осью вращения (осью  $x$ ), и синхронными с  $\rho_{1z}(\tau) = \rho_{2z}(\tau)$  и  $\rho_{1y}(\tau) = -\rho_{2y}(\tau)$ . Режимы данного типа проявляют хорошо развитую хаотичность, имея широкий аттрактор, и реализуются в частотном интервале IV в результате постепенной трансформации ранее указанных хаотических режимов с узкими аттракторами. Инвариантная мера этих режимов существенно различается в различных частях аттрактора (ее диаграмма имеет выраженную структуру), а временные сечения локализованы вдоль выделенных линий фазовой плоскости. В этом же частотном ин-

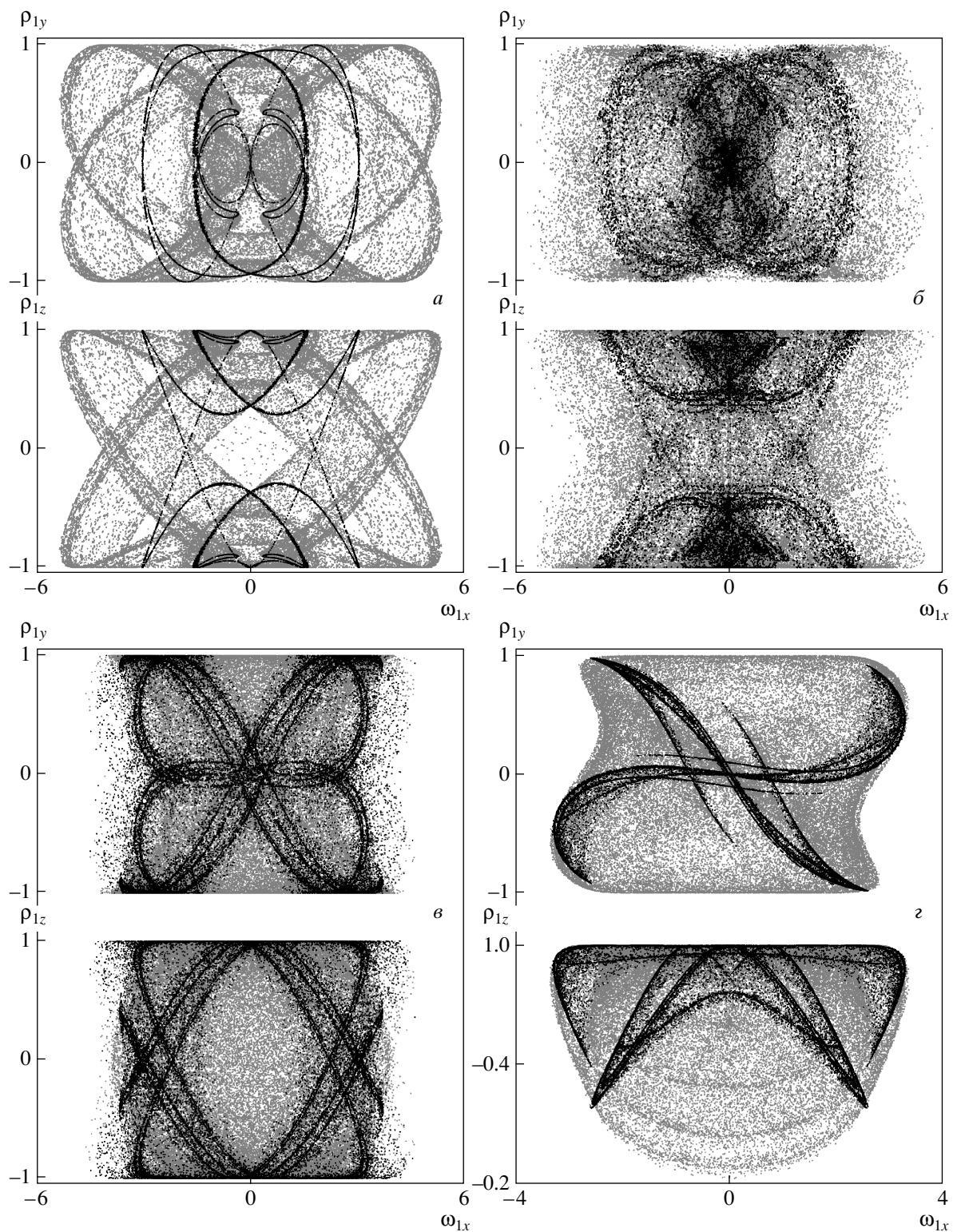
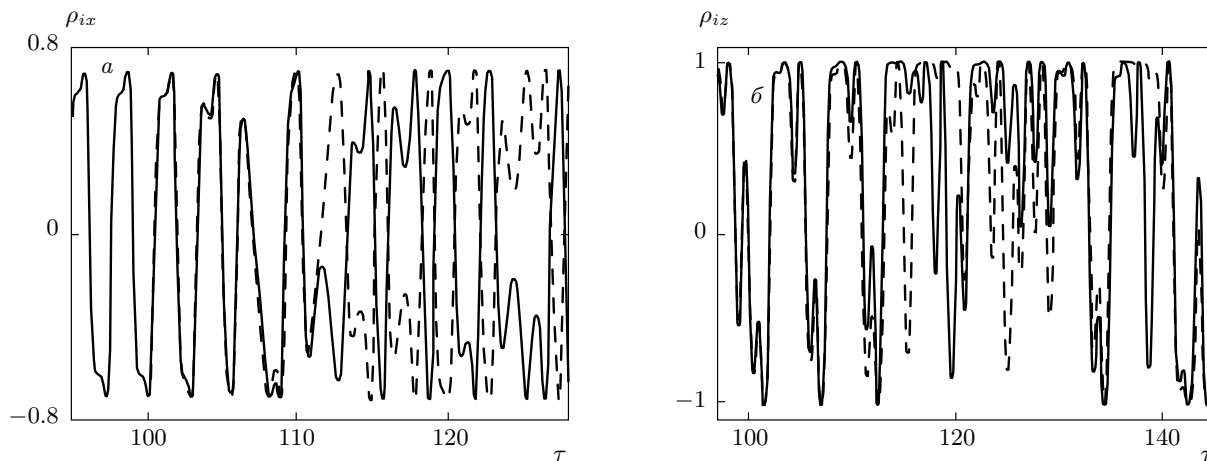


Рис. 5. Проекция точечных представлений фазовых траекторий (серые точки), отражающих инвариантную меру Крылова – Боголюбова хаотических аттракторов одной из подсистем диполей, и соответствующие временные сечения Пуанкаре аттракторов (черные точки;  $\Delta\tau = \pi/\Omega$ );  $f = 15$ ,  $\beta = 1.5$ ,  $\Omega = 1.5$  (а), 2.2 (б), 4.6 (в), 5.4 (г)



**Рис. 6.** Временные зависимости нормированных компонент магнитных моментов первой и второй (сплошная и штриховая линии) подсистем диполей в случае несинхронного хаоса;  $f = 15$ ,  $\beta = 1.5$ ,  $\Omega = 2.2$  (а), 4.6 (б)

тервале устанавливаются трехмерные хаотические колебательные режимы, соответствующие рис. 5б, которые характеризуются отсутствием синхронизации при рассмотрении динамики в течение достаточно продолжительного времени. Инвариантная мера в данном случае распределена по аттрактору значительно более равномерно по сравнению с предыдущим типом режимов, а временные сечения менее локализованы, но имеют области сгущения. Аналогичные несинхронные хаотические режимы с достаточно равномерным распределением инвариантной меры и «размытыми» временными сечениями реализуются в частотном интервале II. Причем такой характер хаоса на этих частотах относится как к трехмерным (рис. 5г), так и к плоскостным колебаниям (рис. 5в). Следует заметить, что, как показали дополнительные исследования, в случае двух связанных диполей плоскостные хаотические колебания на частотах интервала II являются синхронными с противофазной синхронизацией и имеют локализованные временные сечения, подобные сечениям рис. 5а.

При больших частотах интервала II аттракторы хаотических режимов представляют собой объединение двух аттракторов, которые расположены преимущественно в положительной и отрицательной областях компоненты  $\rho_{iz}$  (общих для обеих подсистем диполей) и между которыми осуществляются переключения. С увеличением частоты указанные переключения становятся более редкими, и далее устанавливаются бистабильные состояния с двумя соответствующими режимами, аттракторы которых симметричны относительно плоскости  $xy$ . Одному из та-

ких режимов, устанавливающихся в частотном интервале II в состоянии динамической бистабильности, отвечает рис. 5г.

Реализуемый в цепочке диполей несинхронный хаос характеризуется наличием синхронизации (синфазной или противофазной) в течение малых интервалов времени: периоды синхронных колебаний чередуются с периодами несинхронных колебаний или имеют место переходы от синфазной синхронизации к противофазной (и наоборот), а также переходы между различными типами (т.е. по разным компонентам) противофазной синхронизации. На рис. 6 представлены для первой и второй подсистем диполей временные зависимости нормированных компонент магнитных моментов  $\rho_{ix}(\tau)$  при  $\Omega = 2.2$ , рис. 6а (отвечает случаю рис. 5б) и  $\rho_{iz}(\tau)$  при  $\Omega = 4.6$ , рис. 6б (отвечает случаю рис. 5в). Первый случай показывает один из переходов от синхронных синфазных хаотических колебаний к противофазным колебаниям при объемной хаотической динамике; при этом переходе компонента  $\rho_{iy}$  ведет себя аналогично компоненте  $\rho_{ix}$ , т.е. имеет место переход от синфазной к противофазной синхронизации, а по компоненте  $\rho_{iz}$  диполи остаются синфазно синхронизированными. Во втором случае видно включение в синхронные противофазные ( $\rho_{1y}(\tau) = -\rho_{2y}(\tau)$  при  $\rho_{1z}(\tau) = \rho_{2z}(\tau)$ ) хаотические колебания временного интервала несинхронных колебаний при плоскостной динамике.

Увеличение параметра  $f$  приводит к появлению на частотах интервала II квазипериодических трехмерных колебаний (см. рис. 1в,г и рис. 2б), аттрак-



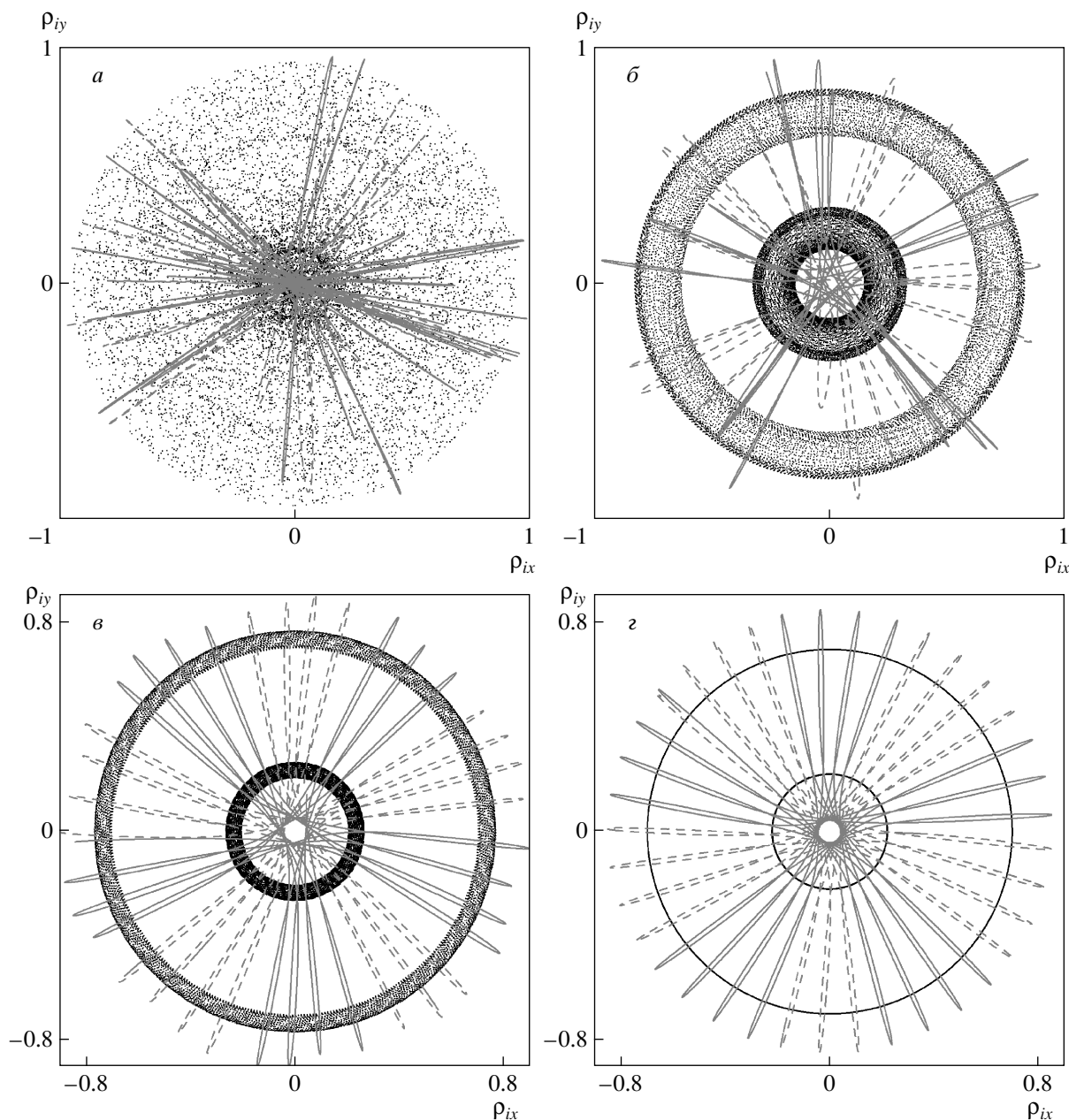


Рис. 7. Проекция на плоскость  $xy$  и временные сечения (черные точки;  $\Delta\tau = \pi/\Omega$ ) траекторий хаотических (а-б) и квазипериодического (г) режимов первой и второй (сплошная и штриховая линии) магнитных подсистем;  $f = 30$ ,  $\beta = 3.0$ ,  $\Omega = 5.58$  (а), 5.59 (б), 5.63 (в), 5.7 (г)

тором которых является двумерный тор. На рис. 7 в качестве примера представлены проекции на плоскость  $xy$  траекторий нормированных магнитных моментов первой и второй магнитных подсистем при  $f = 30$ ,  $\beta = 3.0$  на различных частотах  $\Omega$ . Представлены также временные сечения соответствующих аттракторов (как и в предыдущих случаях, с шагом  $\Delta\tau = \pi/\Omega$  при начальной фазе перемен-

ного поля  $\phi = 0$ ). Видно, что вначале, т. е. на более низких частотах, имеют место хаотические колебания (рис. 7а-б), причем с увеличением частоты временные сечения аттракторов хаотических режимов сужаются, имея проекцию в форме колец, и колебания приближаются к квазипериодическим (рис. 7г). Дальнейшее увеличение частоты приводит к уменьшению амплитуды квазипериодических колебаний.

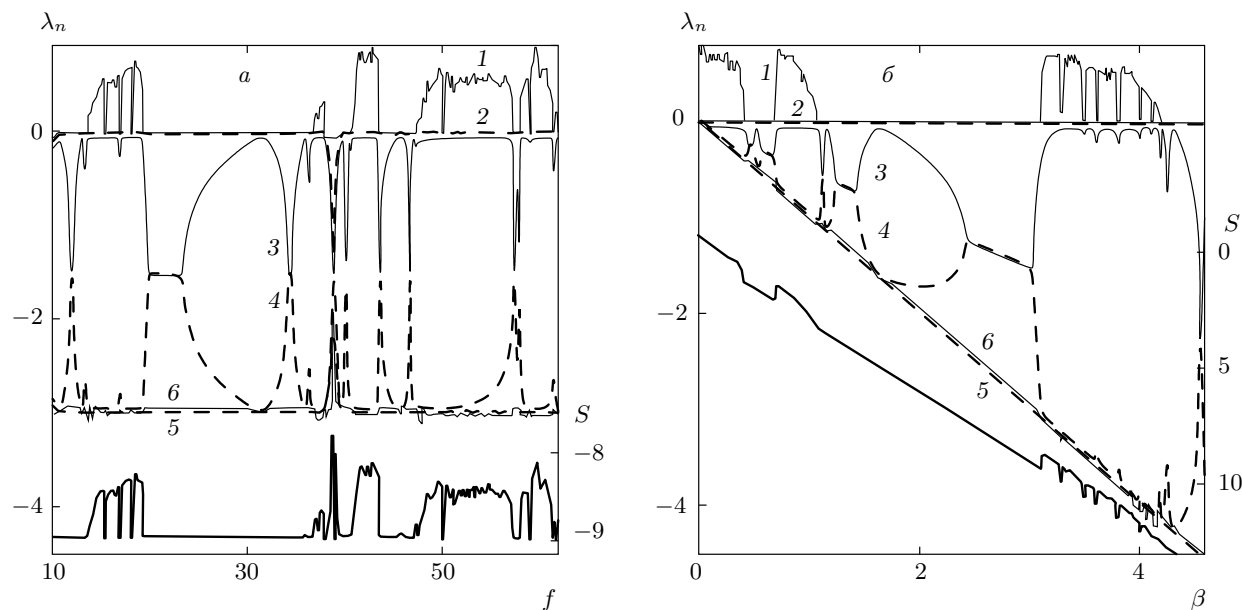


Рис. 8. Зависимости спектра ПЛ и их суммы  $S$  (жирная линия) от параметра  $f$  при  $\beta = 3.0$  (а) и параметра  $\beta$  при  $f = 20$  (б) на частоте  $\Omega = 3$ . Кривые 1–6 соответствуют ПЛ  $\lambda_{1-6}$

Расчеты, проведенные для двух связанных диполей, показали, что в этом случае реализуются переходы от хаотического аттрактора к двумерному тору квазипериодического режима через установление квазипериодических колебаний на многомерном торе.

### 5. СПЕКТР ПОКАЗАТЕЛЕЙ ЛЯПУНОВА ДЛЯ ИЗОЛИРОВАННОГО ДИПОЛЯ

Важной характеристикой динамических режимов является спектр показателей Ляпунова (ПЛ)  $\lambda_n$  [1, 2]. Эти показатели вводятся таким образом, что выбранная в начальный момент времени область малого радиуса  $\varepsilon$  с центром на аттракторе при движении этого центра по аттрактору в момент времени  $\tau$  имеет размеры  $l_n$  по  $N$  главным полуосям:

$$\{l_1, l_2, \dots, l_N\} = \{\varepsilon \exp(\lambda_1 \tau), \varepsilon \exp(\lambda_2 \tau), \dots, \varepsilon \exp(\lambda_N \tau)\}, \quad (4)$$

где число ПЛ равно числу степеней свободы системы. При рассмотрении изолированного магнитного диполя имеются шесть показателей, которые могут быть найдены по методике Бенеттина [2]. Для расчета спектра ПЛ по данной методике в случае одного диполя необходимо решать систему из 42-х дифференциальных уравнений, учитывая исходную систему динамических уравнений и системы с вариациями каждой из переменных ( $\omega_j$  и  $\rho_j$ , где  $j = x, y, z$ ). В

случае двух связанных диполей указанная система возрастает до 156-и уравнений. Однако, как показывает проведенный анализ, динамика изолированного диполя близка к динамике при наличии связи между диполями; следовательно, можно ожидать, что различия основных особенностей ПЛ для одного и цепочки диполей будут незначительными.

Для регулярных режимов все ПЛ (за исключением одного — нулевого) являются отрицательными. При переходе к хаотическому режиму один из показателей (обозначим его  $\lambda_1$ ) становится положительным и размерность аттракторов по Ляпунову определяется выражением

$$l = 2 + \lambda_1 / |S - \lambda_1|.$$

На рис. 8 приведены зависимости спектра ПЛ и суммы показателей  $S = \sum \lambda_n$  от параметра  $f$  при  $\beta = 3.0$  и параметра  $\beta$  при  $f = 20$  на безразмерной частоте  $\Omega = 3$ . С переходом от регулярного режима к хаотическому при изменении амплитуды внешнего поля (рис. 8а) происходит увеличение ПЛ, имевшего нулевое значение ( $\lambda_1$ ). При этом наименьший по модулю из отрицательных показателей ( $\lambda_2$ ) становится нулевым, а два других ПЛ ( $\lambda_3$  и  $\lambda_4$ ) существенно увеличиваются и уменьшаются таким образом, что их сумма практически не изменяется; остальные показатели ( $\lambda_5$  и  $\lambda_6$ ) изменяются незначительно. При возвращении к регулярным режимам имеют место

противоположные изменения ПЛ. В результате сумма  $S$  увеличивается при переходе к хаотическим режимам, как правило, повторяя зависимость показателя  $\lambda_1$  от параметра  $f$ . Аналогичным образом проявляется зависимость спектра ПЛ от частоты. При изменении параметра диссипации (рис. 8б) характер изменения показателей  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  подобен рассмотренной выше зависимости, а остальные ПЛ изменяются таким образом, что  $\lambda_3 + \lambda_4 \approx -\beta$  и  $\lambda_5 \approx \lambda_6 \approx -\beta$  (знак приближенного равенства, очевидно, обусловлен неточностью численного анализа). Таким образом, с учетом малости показателя  $\lambda_2$ , при регулярных режимах  $S \approx -3\beta$ , а в случае хаоса  $S \approx -3\beta + \lambda_1$ .

## 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенный анализ показал, что переменным магнитным полем возбуждаются различные типы регулярных и хаотических динамических режимов цепочки магнитных диполей, обладающих моментами инерции. Система диполей при этом, как правило, разбивается на две динамические подсистемы, находящиеся в противофазе при регулярных режимах и в случае синхронного хаоса. К регулярным режимам относятся устанавливающиеся при низких частотах режимы переключательного типа, а также режимы вращения, когда магнитные моменты делают неограниченное число витков, и колебательные режимы, при которых моменты не совершают полного оборота вокруг оси вращения и колеблются по симметричным относительно различных осей траекториям. Наиболее характерными хаотическими режимами являются режимы переключения с узкими аттракторами, вращательные режимы с хорошо развитой хаотичностью и реализуемые на высоких частотах режимы переключения, объединяющие два аттрактора, между которыми совершаются переходы. Хаотические колебания связанных диполей могут быть плоскостными и объемными. Среди плоскостной хаотической динамики выделяются синхронные колебания с противофазной синхронизацией, характеризующиеся сильной локализацией временных сечений аттракторов. В большинстве случаев несинхронного хаоса как при плоскостных, так и при объемных режимах наблюдается чередование коротких временных интервалов, отвечающих синхронным и несинхронным колебаниям; осуществляются также переходы между синфазными и противофазными колебаниями. При этом временные сечения хаоти-

ческих аттракторов имеют значительно меньшую локализацию. Наряду с хаотическими режимами при достаточно больших амплитудах и частотах внешнего поля реализуются квазипериодические колебания связанных магнитных диполей, аттрактором которых является двумерный тор. Из расчета спектра показателей Ляпунова для изолированного диполя получено, что переход порядок–хаос приводит к увеличению суммы показателей Ляпунова, определяемому изменением максимального показателя. Построенные диаграммы выявили широкие возможности управления переходами между различными регулярными и хаотическими динамическими режимами за счет изменения параметров динамической системы и, в частности, параметров внешнего переменного поля. Необходимо заметить, что данные исследования проведены для упрощенной модели шарообразных магнитных диполей, и в дальнейшем анализе должны быть рассмотрены тела, имеющие различные для разных осей моменты инерции. Тем не менее из представленного анализа следует, что в большей части диапазона параметров системы динамика диполей при этом должна мало отличаться от полученной, особенно в случае определенной симметрии тел. Модель цепочки связанных диполей также является значительным упрощением, но ее анализ представляет собой необходимый и достаточно информативный шаг к исследованию сложных трехмерных систем.

Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ (№ МД-3169.2007.2).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Г. Малинецкий, А. Б. Потапов, *Современные проблемы нелинейной динамики*, Едиториал УРСС, Москва (2002).
2. С. П. Кузнецов, *Динамический хаос*, Физматлит, Москва (2006).
3. А. Ю. Лоскутов, Вестник МГУ, физика, астрон. **3**, 3 (2001).
4. В. С. Анищенко, В. В. Астахов, Т. Е. Вадивасова и др., *Нелинейные эффекты в хаотических и стохастических системах*, Институт компьютерных исследований, Москва–Ижевск (2003).
5. Б. Н. Филипов, Л. Г. Корзунин, ЖЭТФ **121**, 372 (2002).
6. Г. С. Кандаурова, В. Х. Осадченко, А. Г. Пашко, ФТТ **47**, 1806 (2005).

7. А. М. Шутый, Д. И. Семенов, Письма в ЖЭТФ **78**, 952 (2003).
8. А. М. Шутый, Письма в ЖЭТФ **87**, 181 (2008).
9. A. Yu. Galkin, V. A. Ivanov, and C. E. Zaspel, Phys. Rev. B **74**, 144419 (2006).
10. Л. Н. Котов, Л. С. Носов, Ф. Ф. Асадуллин, ЖТФ **78**, 60 (2008).
11. A. O. Ivanov and O. V. Kuznetsova, Phys. Rev. E **64**, 041405 (2000).
12. V. M. Kozhevnikov, I. J. Chuenkova, M. I. Danilov et al., Magnetohydrodynamics **41**, 53 (2005).
13. В. Н. Шабалин, С. Н. Шатохина, *Морфология биологических жидкостей человека*, Хризостом, Москва (2001).
14. Ф. В. Лисовский, О. П. Поляков, Письма в ЖЭТФ **73**, 546 (2001).
15. Ф. В. Лисовский, Е. Г. Мансветова, Изв. РАН, сер. физ. **71**, 1545 (2007).
16. В. М. Бузник, А. К. Цветников, Б. Ю. Шикунов, Перспективные материалы **2**, 69 (2002).
17. С. П. Губин, Ю. А. Кокшаров, Г. Б. Хомутов, Г. Ю. Юрков, Успехи химии **74**, 539 (2005).
18. А. М. Шутый, Д. И. Семенов, ЖЭТФ **131**, 868 (2007).
19. Д. И. Семенов, А. М. Шутый, УФН **177**, 831 (2007).
20. А. М. Шутый, Д. И. Семенов, Кристаллография **51**, 330 (2006).