ЖЭТФ, 2009, том 135, вып. 5, стр. 1029–1036

ЭКРАНИРОВАНИЕ КУЛОНОВСКОГО ПОЛЯ В НАМАГНИЧЕННОМ ЭЛЕКТРОННОМ ГАЗЕ КВАНТОВОГО ЦИЛИНДРА

П. А. Эминов[*]

Московский государственный университет приборостроения и информатики
107996, Москва, Россия

Поступила в редакцию 5 декабря 2008 г.

Построена квантовая теория экранирования кулоновского поля точечного заряда в намагниченном электронном газе квантового цилиндра. Вычислены асимптотики экранированного потенциала как для вырожденного, так и для больцмановского газа. Показано, что в вырожденном случае результат наряду с известной квазиклассической монотонной частью содержит квантовую осциллирующую часть, которая соответствует осцилляциям Фриделя. Дано аналитическое описание осцилляций Ааронова – Бома экранированного кулоновского взаимодействия электронов на цилиндрической поверхности. Показано, что осцилляции Фриделя могут представлять собой наложение колебаний с разными частотами, которые определяются макроскопическими свойствами нанотрубки.

PACS: 71.10.-w, 75.75.+a

1. ВВЕДЕНИЕ

Изучению квантовых эффектов в наноструктурах в последнее время уделяется большое внимание. Многообразие физических явлений, предсказываемых в этой области, связано как с наноразмерами и топологическими свойствами области, в которой движутся частицы, так и с учетом влияния внешнего поля. В нанообъектах реализуются наиболее благоприятные условия для проявления квантового характера процессов. В связи с этим основным инструментом исследований становятся методы квантовой теории поля и квантовой статистической физики в интенсивном внешнем поле [1–3].

Существенный прогресс достигнут при изучении в наноструктурах свойств плазменных волн. Закон дисперсии плазмонов в нанотрубках в квазиклассическом приближении и в присутствии внешнего магнитного поля изучен в работе [4]. Дисперсия плазменных волн в низкоразмерных системах в коротковолновой области спектра, где нельзя пренебрегать квантовыми эффектами, исследована в работе [5]. В этой же работе рассматривается нанотрубка с магнитным потоком для случая, когда электроны заселяют только одну нулевую подзону энергии поперечного движения. В работе [6] дано квантовое описание диэлектрических свойств намагниченного электронного газа нанотрубки.

В настоящее время актуальным стало исследование явления экранирования кулоновского взаимодействия заряженных частиц в наноструктурах (см., например, [7–9]). В работе [7] задача экранирования кулоновского потенциала ставится с учетом хиральности углеродной нанотрубки, но без учета влияния магнитного поля. Исследования в этой работе проведены численными методами, а результаты представлены в графическом виде. Асимптотики экранированного кулоновского взаимодействия электронов на поверхности цилиндра в свободном случае и для вырожденного газа вычислены в работе [8]. В этой работе показано, что аксиально-симметричная часть взаимодействия испытывает логарифмически слабое монотонное экранирование и наименее слабо убывает с увеличением расстояния между электронами по сравнению с вкладами высших гармоник. Также отмечается, что зависимость экранированного потенциала от напряженности магнитного поля является осциллирующей, однако формулы, описывающие эти осцилляции, не приведены.

В настоящей статье рассматривается квантовая

[*]E-mail: peminov@mail.ru

теория экранирования кулоновского поля точечного заряда в намагниченном электронном газе квантового цилиндра.

В разд. 2 для нанотрубки в магнитном поле выводится квантовая формула для продольной диэлектрической проницаемости, через которую выражается экранированный кулоновский потенциал.

В разд. 3 в аналитическом виде найдена асимптотика экранированного потенциала для случая, когда электроны заселяют нулевую зону энергии поперечного движения. Показано, что экранированное взаимодействие наряду с монотонной частью содержит квантовую осциллирующую часть, которая соответствует осцилляциям Фриделя в трехмерном случае.

В разд. 4 в аналитическом виде получена формула для экранированного кулоновского потенциала в случае больцмановского газа, которая может найти применение при описании свойств полупроводниковых нанотрубок.

В разд. 5 получена аналитическая формула, которая в явном виде описывает осцилляции Ааронова–Бома экранированного взаимодействия заряженных частиц на цилиндрической поверхности.

В разд. 6 проводится обсуждение результатов работы. Показано, что осцилляции Фриделя в нанотрубке могут представлять собой суперпозицию колебаний с разными частотами, которые определяются макроскопическими свойствами квантового цилиндра.

2. ПРОДОЛЬНАЯ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ПРОНИЦАЕМОСТЬ И ЭКРАНИРОВАННОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ

Как известно [10, 11], продольная диэлектрическая проницаемость системы используется в статистической физике для описания эффекта экранировки поля внешнего заряда, обусловленного перераспределением зарядов самой системы.

Если некоторый внешний покоящийся заряд с плотностью $\rho = q\delta(\mathbf{r})$ вносится в плазму, то фурье-образ потенциала поля заряда дается выражением [12]

$$V(\omega=0,\mathbf{k}) = \frac{V_0(0,\mathbf{k})}{\varepsilon_l(0,\mathbf{k})}, \tag{1}$$

где $V_0(0,\mathbf{k})$ — фурье-образ потенциала заряда в свободном случае (в отсутствие плазмы), а $\varepsilon_l(0,\mathbf{k})$ — продольная диэлектрическая проницаемость вещества в статическом пределе, когда $\omega = 0$. Формула (1) представляет собой обобщение элементарной формулы для потенциала поля точечного заряда в однородной и изотропной среде с постоянной диэлектрической проницаемостью на случай, когда имеется пространственная дисперсия.

Пусть точечный заряд q в используемой цилиндрической системе координат находится в точке с координатами $r = R$, $\varphi = 0$, $z = 0$. Тогда без учета поляризации среды фурье-образ потенциала поля, создаваемого этим зарядом в произвольной точке на цилиндрической поверхности радиуса R, определяется из формулы

$$V_0(z,\varphi) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dk_3 \sum_{l=-\infty}^{\infty} V_0(k_3,l)\, e^{ik_3z+il\varphi}, \tag{2}$$

где

$$V_0(z,\varphi) = \frac{q}{\sqrt{z^2+4R^2\sin^2(\varphi/2)}}\,. \tag{3}$$

Из формул (2), (3) следует, что

$$V_0(k_3,l) = 4\pi q I_l(|k_3|R)K_l(|k_3|R), \tag{4}$$

где $I_l(x)$ и $K_l(x)$ — модифицированные функции Бесселя мнимого аргумента [13]. Таким образом, экранированный потенциал поля точечного заряда q в произвольной точке на поверхности квантового цилиндра определяется формулой

$$V(z,\varphi) = \frac{q}{\pi} \times \\ \times \sum_{l=-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{I_l(|k_3|R)K_l(|k_3|R)}{\varepsilon_l(0,k_3)}\, e^{ik_3z+il\varphi}\, dk_3. \tag{5}$$

Квантовую формулу для продольной диэлектрической проницаемости намагниченного электронного газа получим на основе формализма матрицы плотности [6, 12]. Одночастичная матрица плотности является решением уравнения

$$i\frac{\partial\rho(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,t)}{\partial t} = \left(\hat{H}_1 - \hat{H}_2^*\right)\rho(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,t), \tag{6}$$

где индексы «1» и «2» относятся к координатам $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$, на которые действует гамильтониан электрона

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + e\varphi(\mathbf{r},t). \tag{7}$$

Здесь $\hat{H}_0$ — гамильтониан электрона на цилиндрической поверхности в продольном магнитном поле, явный вид которого мы не приводим (см., например, [14, 15]), а $\varphi(\mathbf{r},t)$ — потенциал внешнего возмущения, зависимость которого от координат и времени в цилиндрической системе координат представим в виде

$$\varphi(\mathbf{r},t) = A(r)\exp(-i\omega t + il\varphi + ik_3z). \tag{8}$$

Под влиянием возмущения (8) происходит перераспределение плотности намагниченного газа. Оно определяется поправкой к матрице плотности за счет этого возмущения, усредненной по большому каноническому распределению Гиббса.

В итоге для электронного вклада в продольную диэлектрическую проницаемость квантового цилиндра находим следующее выражение:

$$\varepsilon_l(\omega,k_3) = 1 + \frac{2e^2}{\pi} I_l(|k_3|R)K_l(|k_3|R) \times \\ \times \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dp_3 \left\{ n_F\left(n - \frac{l}{2}, p_3 - \frac{k_3}{2}\right) - \right. \\ \left. - n_F\left(n + \frac{l}{2}, p_3 + \frac{k_3}{2}\right)\right\} \times \\ \times \left\{\omega - \frac{p_3k_3}{m} - l\left(\frac{n}{mR^2} + \frac{\omega_c}{2}\right) + i0\right\}^{-1}. \quad (9)$$

Этот результат является обобщением формулы Силина–Климонтовича применительно к намагниченному электронному газу на цилиндрической поверхности [6]. В формуле (9) $\omega_c = |e|H/m$ — циклотронная частота, m — эффективная масса электрона,

$$n_F(n,p_3) = \left\{\exp\frac{E(n,p_3)-\mu}{T} + 1\right\}^{-1} \quad (10)$$

— функция распределения электронов в магнитном поле, μ — химический потенциал, а спектр гамильтониана H_0 определяется формулой

$$E(n,p_3) = \varepsilon_0\left(n + \frac{\Phi}{\Phi_0}\right)^2 + \frac{p_3^2}{2m}, \quad (11)$$

где $\varepsilon_0 = 1/2mR^2$ — энергия размерного конфайнмента, p_3 — продольный импульс электрона, $n = 0, \pm 1, \ldots$ — квантовое число, определяющее энергию поперечного движения, Φ/Φ_0 — число квантов магнитного потока через сечение нанотрубки.

Формулы (5) и (9) описывают эффекты экранирования кулоновского поля внешнего заряда, вызванные перераспределением электронов самого квантового цилиндра. Следует отметить, что при определенных условиях можно отождествить взаимодействие между зарядами самой системы и взаимодействие между внешними зарядами (подробнее см. [11]), т.е. пользоваться полученными формулами и для описания взаимодействия электронов самой нанотрубки.

Основной вклад в асимптотику (5) в наиболее интересной области относительно больших расстояний от заряда, когда выполнено условие $z \gg R$, дает аксиально-симметричная часть потенциала. Это обусловлено поведением функции Макдональда $K_l(x)$ при $x \to 0$: функция $K_l(x)$ имеет при $l \neq 0$ в точке $x = 0$ полюс порядка l и логарифмическую особенность при $l = 0$, когда $K_0(x) \sim \ln(1/x)$ (см. также [8]). Таким образом, далее нас будет интересовать нулевая ($l = 0$) гармоника разложения (5) экранированного потенциала, которая определяется формулой

$$V(z) = \frac{q}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{I_0(|k_3|R)K_0(|k_3|R)}{\varepsilon(0,k_3)} e^{ik_3z}\,dk_3, \quad (12)$$

где

$$\varepsilon(0,k_3) = 1 + \frac{2me^2 I_0(|k_3|R)K_0(|k_3|R)}{k_3} \times \\ \times \sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{n_F\left(n, p_3 + \frac{k_3}{2}\right) - \right. \\ \left. - n_F\left(n, p_3 - \frac{k_3}{2}\right)\right\}\frac{dp_3}{p_3}. \quad (13)$$

Интеграл по переменной p_3 в (13) согласно формуле Сохоцкого понимается в смысле главного значения.

3. ОСЦИЛЛЯЦИИ ФРИДЕЛЯ ЭКРАНИРОВАННОГО ПОТЕНЦИАЛА

В случае вырожденного электронного газа из формулы (13) получаем

$$\varepsilon(0,k_3) = 1 + \frac{4me^2}{k_3} I_0(|k_3|R)K_0(|k_3|R) \times \\ \times \sum_{n=-N}^{N} \ln\left|\frac{k_3 + 2p_{3F}(n)}{k_3 - 2p_{3F}(n)}\right|. \quad (14)$$

Здесь

$$p_{3F}(n) = \sqrt{2m\left[E_F - \varepsilon_0\left(n + \frac{\Phi}{\Phi_0}\right)^2\right]}, \quad (15)$$

E_F — энергия Ферми, а суммирование проводится по всем значениям целого числа n, для которых подкоренное выражение в (15) неотрицательно.

В итоге для нулевой гармоники экранированного кулоновского потенциала в продольном магнитном поле находим выражение

$$V(z) = \frac{2q}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^\infty e^{ik_3 z} I_0(k_3 R) K_0(k_3 R) \left\{ 1 + \frac{4me^2}{k_3} \times \right.$$
$$\left. \times\ I_0(k_3 R) K_0(k_3 R) \sum_n \ln \left| \frac{k_3 + 2p_{3F}}{k_3 - 2p_{3F}} \right| \right\}^{-1} dk_3. \qquad (16)$$

При выполнении условий

$$2\Phi/\Phi_0 < 1, \qquad (17)$$

$$N_L < \frac{1 - \Phi/\Phi_0}{R} \frac{2}{\pi} \qquad (18)$$

электроны могут находиться только в основном состоянии ($n = 0$), для которого импульс Ферми продольного движения

$$p_{3F} = \pi N_L / 2, \qquad (19)$$

где $N_L = N/L$ — линейная плотность электронов.

Таким образом, в случае относительно малой концентрации электронов в фигурных скобках формулы (16) из всей суммы следует оставить одно слагаемое для $n = 0$. Вычисление асимптотик экранированного потенциала сначала проведем для этого случая, а особенности, связанные с учетом вклада остальных зон энергии поперечного движения, обсудим в разд. 6.

Главный член асимптотики можно получить следующим образом. Представим выражение (16) в виде

$$V(z) = \frac{2q}{\pi R} [G_0 + G_1], \qquad (20)$$

где

$$G_1 = G - G_0, \qquad (21)$$

$$G_0 = \operatorname{Re} \int_0^\infty \exp \frac{itz}{R} \frac{\left(-\overline{\ln} \dfrac{t}{2} \right) dt}{1 - 4\pi e^2 k_0 \overline{\ln} \dfrac{t}{2}}, \qquad (22)$$

$$G = \operatorname{Re} \int_0^\infty \exp \frac{itz}{R} \times$$
$$\times \frac{I_0(t) K_0(t)\, dt}{1 + \dfrac{4me^2 R}{\pi t} I_0(t) K_0(t) \ln \left| \dfrac{t + 2p_F R}{t - 2p_F R} \right|}. \qquad (23)$$

В формуле (22) приняты обозначения

$$k_0 = \frac{m}{\pi^2 p_{3F}}, \quad \overline{\ln} \frac{t}{2} = \ln \frac{t}{2} - C,$$

C — постоянная Эйлера. Для вычисления выражения (22) перейдем в комплексную плоскость переменной t и повернем путь интегрирования до его совпадения с верхней мнимой полуосью. В результате получаем

$$G_0 = \frac{\pi}{2} \int_0^\infty \exp \left(-y \frac{z}{R} \right) \times$$
$$\times \left\{ \left(1 - 4\pi e^2 k_0 \overline{\ln} \frac{y}{2} \right)^2 + \left(4\pi e^2 k_0 \frac{\pi}{2} \right)^2 \right\}^{-1} dy. \qquad (24)$$

В предельном случае при $z \gg R$, когда основной вклад в интеграл дает область $y \ll 1$, главный член асимптотического разложения (24) имеет вид

$$G_0 \approx \pi \frac{R}{2z} \frac{1}{(4\pi e^2 k_0)^2} \frac{1}{\ln^2(z/2R)}. \qquad (25)$$

Подынтегральная функция во втором слагаемом в формуле (20) при $t/2p_F R \to 0$ стремится к нулю. Поэтому асимптотическое поведение величины G_1 при больших z определяется не квазиклассической областью переменной t, а логарифмической особенностью подынтегральной функции при $t = 2p_F R$.

Для вычисления интеграла разложим подынтегральную функцию в ряд Тейлора с центром в точке $t_0 = 2p_F R$. Интересуясь главным членом асимптотического разложения, ограничимся удержанием основного члена полученного ряда. Совершив далее, как и при вычислении G_0, переход в комплексную плоскость, в итоге находим

$$G_1 = -2\pi\alpha p_F R K_0(2p_F R) I_0(2p_F R) F, \qquad (26)$$

где

$$F = \cos(2zp_F) \int_0^\infty \frac{\exp(-4yzp_F)\, dy}{\left(1 + \alpha \overline{\ln} \dfrac{1}{y} \right)^2 + \left(\dfrac{\pi\alpha}{2} \right)^2}, \qquad (27)$$

$$\alpha = \frac{2me^2}{\pi p_F} K_0(2p_F R) I_0(2p_F R). \qquad (28)$$

В предельном случае, когда $zp_F \gg 1$, главный член асимптотики интеграла (26) имеет вид

$$G_1 \approx -2\pi \cos(2zp_F) \frac{1}{z \ln^2(4zp_F)} \frac{\pi p_F R}{8me^2}. \qquad (29)$$

Таким образом, при выполнении условий

$$z \gg 2R, \quad zp_F \gg 1 \qquad (30)$$

асимптотика экранированного кулоновского потенциала в цилиндрической нанотрубке задается формулой

$$V(z) \approx \left(\frac{\pi p_F}{4me^2} \right)^2 \frac{q}{z} \times$$
$$\times \left[\frac{1}{\overline{\ln}^2(z/2R)} - \frac{8me^2}{\pi p_F} \frac{\cos(2zp_F)}{\ln^2(4zp_F)} \right]. \qquad (31)$$

Заметим, что монотонная часть (31) согласуется с результатом работы [8].

Наиболее интересными представляются осцилляции Фриделя экранированного кулоновского потенциала, асимптотика которых вычислена здесь в аналитическом виде. К обсуждению результатов этого раздела мы вернемся в Заключении более подробно.

4. ЭКРАНИРОВАНИЕ КУЛОНОВСКОГО ПОТЕНЦИАЛА БОЛЬЦМАНОВСКИМ ЭЛЕКТРОННЫМ ГАЗОМ

Вычислим экранированный кулоновский потенциал в предельном случае больцмановского электронного газа, т. е. при условии

$$|\mu| \gg T, \quad \mu < 0, \tag{32}$$

где μ — химический потенциал, T — температура газа. В квазиклассическом приближении, т. е. при $k_3 \ll p_F$, имеем

$$n_F\left(n, p_3+\frac{k_3}{2}\right) - n_F\left(n, p_3-\frac{k_3}{2}\right) \approx k_3 \frac{\partial n_F}{\partial p_3}. \tag{33}$$

Применяя далее формулу суммирования Пуассона, статическую диэлектрическую проницаемость намагниченного электронного газа нанотрубки, задаваемую формулой (13), представим в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon(0, k_3) = 1 + 4me^2R \Bigg[\int\limits_{-\mu/T}^{\infty} \frac{e^x}{(e^x+1)^2}\, dx \; + \\ + 2\sum_{k=1}^{\infty} \cos\left(2\pi k \frac{\Phi}{\Phi_0}\right) \int\limits_{-\mu/T}^{\infty} \frac{e^x}{(e^x+1)^2}\, dx \; \times \\ \times J_0\left[2\pi k R\sqrt{2m(\mu+xT)}\right] \Bigg] \times \\ \times I_0(|k_3|R)K_0(|k_3|R), \end{aligned} \tag{34}$$

где $J_0(z)$ — функция Бесселя нулевого порядка. Применив формулу (34) к случаю больцмановского электронного газа, когда выполнено условие (32), получим

$$\varepsilon(0, k_3) = 1 + \frac{4e^2}{T} N_L I_0(|k_3|R)K_0(|k_3|R). \tag{35}$$

С учетом (35) вычисление асимптотики потенциала (12) сводится к расчету, проведенному в разд. 3 для величины G_0 (формула (22)).

Главный член асимптотики экранированного потенциала определяется формулой

$$V(z) \approx \frac{q}{z}\left(\frac{4e^2N_L}{T}\right)^{-2} \ln^{-2}\frac{z}{2R}. \tag{36}$$

Заметим, что результат (36), как это и должно быть в классическом пределе, не содержит осцилляционных эффектов.

5. ОСЦИЛЛЯЦИИ ААРОНОВА – БОМА ЭКРАНИРОВАННОГО КУЛОНОВСКОГО ПОТЕНЦИАЛА

Эффект Ааронова – Бома — квантовое явление, в основе которого лежит неодносвязность области пространства, в которой движется частица [16].

Для физики нанотрубок имеет значение прежде всего получение явных аналитических формул, описывающих проявление макроскопического эффекта Ааронова – Бома в конкретном физическом явлении. Здесь мы исследуем влияние продольного магнитного поля на экранирование кулоновского поля вырожденным электронным газом квантового цилиндра. Ограничимся рассмотрением той части экранированного потенциала, которая не содержит осцилляций Фриделя, и дадим обобщение результатов работы [8] на случай наличия внешнего поля.

В квазиклассическом приближении для случая сильного вырождения электронного газа ($T \ll E_F$) из формулы (34) для величины $\varepsilon(0, k_3)$ получаем компактное представление в виде

$$\varepsilon(0, k_3) = 1 + 4me^2RF_0I_0(|k_3|R)K_0(|k_3|R), \tag{37}$$

где принято обозначение

$$\begin{aligned} F_0 = \Bigg[1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \cos\left(2\pi k\frac{\Phi}{\Phi_0}\right) \times \\ \times J_0\left(2\pi k R\sqrt{2mE_F}\right)\Bigg]. \end{aligned} \tag{38}$$

Как следует из формул (37) и (38), статическая продольная диэлектрическая проницаемость действительно испытывает осцилляции при изменении магнитного потока через сечение нанотрубки.

В итоге для асимптотики ($z \gg 2R$) аксиально-симметричной части экранированного кулоновского потенциала в рассматриваемом приближении получаем следующее представление:

$$V(z) \approx \frac{q}{z}\left(4me^2RF_0\right)^{-2} \ln^{-2}\frac{z}{2R}. \tag{39}$$

Таким образом, формула (39) описывает осцилляции Ааронова–Бома экранированного кулоновского поля в квантовом цилиндре.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Прежде чем приступить к обсуждению результатов, отметим, что в основе проведенных исследований лежит формула (13) для статической продольной диэлектрической проницаемости идеального намагниченного газа квантового цилиндра. Как известно [17], выход за рамки модели идеального газа, а также учет флуктуаций в плазме приводят к сглаживанию особенностей продольной диэлектрической проницаемости. Учет этих эффектов в нанотрубках представляет самостоятельный интерес и здесь не рассматривается.

Итак, как показано в настоящей работе, экранированное кулоновское поле в намагниченной нанотрубке содержит как монотонную квазиклассическую часть, так и квантовую осциллирующую часть.

Заметим, что формула (39) для монотонной части экранированного кулоновского потенциала содержит вклад всех зон энергии поперечного движения. В этом можно непосредственно убедиться, если с помощью формулы (5.7.23.2) из книги [18] просуммировать ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \cos\left(2\pi k \frac{\Phi}{\Phi_0}\right) J_0(2\pi k R p_F)$$

в формуле (38). Для примера рассмотрим свободный случай, когда $\Phi = 0$. Используя формулу [18]

$$\sum_{k=1}^{\infty} J_0(kx) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{x} + 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4\pi k^2}}\,, \qquad (40)$$

где n — натуральное число, определяемое из условия

$$2\pi n < x < 2\pi(n+1), \quad x = 2\pi R\sqrt{2mE_F}\,, \qquad (41)$$

для статической продольной диэлектрической проницаемости в квазиклассическом приближении получаем выражение

$$\varepsilon(0,k_3) = 1 + \frac{4me^2}{\pi} I_0(|k_3|R) K_0(|k_3|R) \times \times \left[\frac{1}{p_F} + 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2m(E_F - \varepsilon_0 k^2)}}\right], \qquad (42)$$

которое также следует из формулы (14).

Таким образом, в свободном случае ($H = 0$) учет вклада всех зон энергии поперечного движения в монотонную часть экранированного потенциала, как это и отмечалось в работе [8], сводится к замене величины p_F^{-1} в формуле (31) для вклада нулевой зоны на величину

$$\frac{1}{p_F} + 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2m(E_F - \varepsilon k^2)}}, \qquad (43)$$

где n определяется из условия (41).

Далее обратимся к рассмотрению вклада возбужденных зон в осцилляции Фриделя. Как это следует из формулы (14) и проведенного в разд. 3 анализа, по мере заселения электронами новых зон осцилляции Фриделя происходят уже не только на одной частоте

$$\omega_0 = \pi N_L, \qquad (44)$$

но и на частотах

$$\omega_n = 2p_n, \qquad (45)$$

где p_n — импульс Ферми n-й зоны, определяемый формулой (15). Этот эффект при большом числе заполненных зон (квазиклассическое приближение) должен быть сильно сглажен в связи с наложением осцилляций с разными, но относительно близкими частотами. Тем не менее он может быть существенным для случая нескольких заполненных зон, представляющего практический интерес (см., например, [19]).

Приведем качественную оценку возможности наблюдения эффекта для случая, когда электроны заполняют две нижние подзоны. Если выполнено условие (17), то это зоны, для которых $n = 0$ и $n = -1$. Оптимальное условие для проявления эффекта состоит в том, чтобы разность частот $\Delta\omega = |\omega_0 - \omega_{-1}|$, при которых наблюдаются осцилляции Фриделя для каждой зоны в отдельности, была велика по сравнению с эффективной шириной области интегрирования вокруг точки $k_3 = 2p_n$, дающей основной вклад в осцилляции. Ширина этой области равна $4\Delta y p_F$, где согласно (27) в существенной области $\Delta y \le (4zp_F)^{-1}$.

Итак, должно выполняться условие

$$|p_0 - p_{-1}| \gg \frac{1}{z}\,. \qquad (46)$$

Отметим, что условие (46) находится в согласии с ограничениями (30), при которых в разд. 3 вычислена асимптотика осциллирующей части экранированного потенциала.

Таким образом, осцилляции Фриделя в нанотрубках могут представлять собой суперпозицию колебаний с разными частотами, которые определяются импульсом Ферми соответствующей зоны энергии поперечного движения электронов.

После того как статья была направлена в печать, автору стала известна работа [20], где для вырожденного случая изучаются осцилляции Фриделя экранированного электрон-электронного взаимодействия в нанотрубках. Следует отметить, что в настоящей работе исследована другая по своему физическому смыслу задача, как это и указано в разд. 2 при ее постановке, — экранирование кулоновского поля, создаваемого внешним зарядом q, который неподвижен и не испытывает обратного влияния со стороны электронного газа нанотрубки. В основе проведенных в разд. 3 исследований лежат формулы (12), (13), полученные в разд. 2 с помощью выражения для продольной диэлектрической проницаемости. Точно такие же формулы для описания экранированного кулоновского взаимодействия электронов в вырожденном электронном газе нанотрубки получены в работах [8, 20] на основе метода Гелл-Манна и Бракнера [21]. Например, формулы (6), (7) из [8, 20] и (12), (13) в разд. 2 нашей работы переходят друг в друга при замене $q \leftrightarrow e^2$, хотя их физическое содержание и область применимости различаются.

Отметим, что при выключении внешнего источника ($q \to 0$) в задаче, рассмотренной в разд. 3, экранированный кулоновский потенциал также обращается в нуль, причем как его монотонная часть, так и слагаемое, ответственное за осцилляции Фриделя. В то же время, как это подчеркивается в работе [20], фриделевские осцилляции электрон-электронного взаимодействия в нанотрубке не зависят от зарядов взаимодействующих электронов, с чем трудно согласиться. Как нам представляется, этот вывод работы [20] связан с тем, что статическая диэлектрическая проницаемость идеального электронного газа нанотрубки логарифмически стремится к бесконечности при $k_3 \to 2p_F$, и уже нельзя пренебрегать обратным влиянием системы на взаимодействующие электроны (в отличие от трехмерного случая). В этой области корректное рассмотрение экранированного электрон-электронного взаимодействия в нанотрубке не описывается формулами (6), (7) работ [8, 20], а должно проводится в рамках более строгих методов квантовой статистической физики (см. также [11]).

Классическая область малых значений переданного импульса ($k_3 \to 0$), как и в трехмерном случае, определяет монотонную часть экранированного взаимодействия и в первом приближении, как это и отмечается в разд. 2, приведенные выше формулы дают правильный результат. Таким образом, в отличие от осцилляций Фриделя экранированного кулоновского поля внешнего заряда, решение задачи об осцилляциях Фриделя экранированного электрон-электронного взаимодействия в вырожденном случае требует своего корректного описания и представляет интерес хотя бы с методической точки зрения.

Что же касается асимптотик, вычисленных в работе [20] и в разд. 3 настоящей работы, то они формально совпадают с точностью до замены $q \leftrightarrow e^2$ и численного множителя (4π) в слагаемом, соответствующем осцилляциям Фриделя.

Автор выражает благодарность А. В. Борисову и В. В. Соколову за обсуждение результатов работы, а также рецензенту за сделанные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Ритус, Труды ФИАН **111**, 5 (1979); А. И. Никишов, Труды ФИАН **111**, 152 (1979).
2. А. А. Соколов, И. М. Тернов, *Релятивистский электрон*, Наука, Москва (1983).
3. А. А. Абрикосов, Л. П. Горьков, И. Е. Дзялошинский, *Метод функций Грина в статистической физике*, Физматгиз, Москва (1962); А. Е. Шабад, Труды ФИАН **192**, 5 (1988).
4. А. И. Ведерников, А. О. Говоров, А. В. Чаплик, ЖЭТФ **120**, 979 (2001).
5. Р. З. Витлина, Л. И. Магарилл, А. В. Чаплик, ЖЭТФ **133**, 906 (2008).
6. П. А. Эминов, Ю. В. Перепелкина, Ю. И. Сезонов, ФТТ **50**, 2220 (2008).
7. M. F. Lin and D. S. Chuu, Phys. Rev. **56**, 4996 (1997).
8. Р. З. Витлина, Л. И. Магарилл, А. В. Чаплик, Письма в ЖЭТФ **86**, 132 (2007).
9. В. М. Ковалев, А. В. Чаплик, ЖЭТФ **134**, 980 (2008).
10. В. Л. Гинзбург, *Теоретическая физика и астрофизика*, Наука, Москва (1987).
11. *Проблема высокотемпературной сверхпроводимости*, под ред. В. Л. Гинзбурга, Д. А. Киржница, Наука, Москва (1977).

12. Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Физическая кинетика*, Наука, Москва (1979).

13. А. Н. Тихонов, А. А. Самарский, *Уравнения математической физики*, Наука, Москва (1972).

14. В. А. Гейлер, В. А. Маргулис, А. В. Шорохов, ЖЭТФ **115**, 1450 (1999).

15. П. А. Эминов, Ю. И. Сезонов, ЖЭТФ **134**, 772 (2008).

16. В. Д. Скаржинский, Труды ФИАН **167**, 139 (1986).

17. G. Y. Hu and R. F. O'Connel, J. Phys.: Condens. Matter **2**, 9381 (1990).

18. А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев, *Интегралы и ряды. Специальные функции*, Наука, Москва (1983).

19. Н. А. Поклонский, Е. Ф. Кисляков, Г. Г. Федорук, С. А. Вырко, ФТТ **42**, 1911 (2000).

20. А. В. Чаплик, Л. И. Магарилл, Р. З. Витлина, ФНТ **34**, 1094 (2008).

21. M. Gell-Mann and K. Brueckner, Phys. Rev. **106**, 364 (1957).