

ТОРМОЗНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ ПРИ СТОЛКНОВЕНИЯХ НИЗКОЭНЕРГИЧНЫХ ЭЛЕКТРОНОВ С ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ ИОНАМИ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

*И. И. Бубукина, С. А. Корягин**

*Институт прикладной физики Российской академии наук
603950, Нижний Новгород, Россия*

Поступила в редакцию 10 ноября 2008 г.

Исследовано тормозное излучение от электрон-ионных столкновений в магнитном поле при низких энергиях, когда ларморовский радиус электрона меньше характерного прицельного параметра ближних столкновений в отсутствие магнитного поля. Показано, что магнитное поле качественно не меняет спектральную мощность тормозного излучения на низких частотах, меньших обратного времени пролета электрона около иона в ближнем столкновении в отсутствие магнитного поля. На более высоких частотах интенсивность излучения уменьшается по степенному закону, достигает минимума и далее увеличивается по степенному закону до частот порядка электронной циклотронной частоты. На частотах порядка циклотронной частоты спектральная мощность достигает характерных значений мощности в отсутствие магнитного поля. На рассмотренных частотах ниже циклотронной частоты тормозное излучение преимущественно линейно поляризовано в плоскости, образованной магнитным полем и направлением распространения излучения.

PACS: 95.30.Gv, 97.10.Ld, 97.20.Rp, 52.20.Fs, 52.25.Os

1. ВВЕДЕНИЕ

Магнитное поле качественно изменяет электрон-ионные столкновения в случае [1–9], когда ларморовский радиус электрона

$$r_B = v_0 / \omega_B \quad (1)$$

становится меньше не только радиуса Дебая электростатического экранирования рассеивающего центра, но и характерного прицельного параметра r_s ближних столкновений в отсутствие магнитного поля,

$$r_s = Ze^2 / mv_0^2. \quad (2)$$

Здесь v_0 — начальная скорость электрона, $\omega_B = eB/mc$ — циклотронная частота, B — магнитное поле, $e > 0$ — элементарный заряд, $Z > 0$ — зарядовое число иона, m — масса электрона. На расстоянии (2) энергия кулоновского взаимодействия становится порядка начальной кинетической энергии электрона.

Рассматриваемое соотношение пространственных масштабов

$$r_B \ll r_s \quad (3)$$

для тепловой скорости $v_T = \sqrt{k_B T / m}$ (k_B — постоянная Больцмана) имеет вид

$$\frac{r_B}{r_s} = \frac{1.3}{Z} \left(\frac{T}{10^4 \text{ К}} \right)^{3/2} \left(\frac{B}{10^7 \text{ Гс}} \right)^{-1} \ll 1$$

и реализуется в фотосферах магнитных белых карликов [10] с температурой $T \sim 10^4$ К и магнитным полем $B > 10^7$ Гс, в экспериментах по созданию антиводорода [11, 12] в магнитном поле $B > 3 \cdot 10^4$ Гс при температуре $T < 15$ К, достигнуто в эксперименте [13] в случае электрон-электронных столкновений ($T = 30$ К, $B = 6 \cdot 10^4$ Гс), а также, возможно, выполняется на магнитарах [14] для протон-протонных столкновений ($B \sim 10^{15}$ Гс).

При выполнении условия (3) торможение электрона вдоль магнитного поля определяют эффективные ближние столкновения, в которых электрон пролетает около иона за время порядка и меньше

*E-mail: koryagin@appl.sci-nnov.ru

периода циклотронного вращения ω_B^{-1} [1, 2]. Прицельные параметры p_h эффективных столкновений ограничены сверху максимальным значением [3]

$$p_{cr} = \left(\frac{12\sqrt{\pi}}{\Gamma^2(1/4)} \right)^{2/3} \ln^{2/3} \left[\left(\frac{r_s}{r_B} \right)^{1/3} \right] L_u, \quad (4)$$

где $\Gamma(x)$ — гамма-функция, а расстояние

$$L_u = (Zmc^2/B^2)^{1/3} = r_s^{1/3} r_B^{2/3} \quad (5)$$

не зависит от начальной скорости электрона и при условии (3) попадает в интервал

$$r_B \ll L_u \ll r_s. \quad (6)$$

В силу соотношения (6) в эффективных столкновениях кулоновское поле ускоряет электрон при подлете к иону до скоростей, много больших начальной. Вблизи иона дрейфовое движение ведущего центра циклотронного вращения нарушается и набранная при подлете к иону кинетическая энергия эффективно перераспределяется между движениями вдоль и поперек магнитного поля. Далее на трассе ухода от иона кулоновское поле тормозит электрон вдоль магнитного поля. Если после первого пролета кинетическая энергия продольного движения оказывается недостаточной, чтобы преодолеть притяжение иона, то электрон много раз возвращается к иону, пока не преодолет его притяжение.

В ближних столкновениях конечный питч-угол (угол между мгновенной скоростью частицы и магнитным полем) нерегулярно (хаотически) зависит от прицельного параметра, величины магнитного поля и энергии частицы [5, 6]. Напротив, в дальних столкновениях ($p_h \gg L_u$) питч-угол электрона сохраняется с высокой точностью порядка $\exp(-0.62p_h^{3/2}/L_u^{3/2})$ [3].

Таким образом, вследствие квазисвязанного хаотического движения электрона эффективные ближние столкновения качественно отличаются от столкновений в случае более слабого магнитного поля или большей энергии частиц. Качественное изменение столкновений в условиях (3) должно влиять на частотный спектр и поляризацию тормозного излучения. В данной статье выполнен расчет тормозного излучения при условии (3) на частотах

$$\omega \ll \omega_B. \quad (7)$$

В разд. 2 показано, что тормозное излучение электрона в магнитном поле представляет собой суперпозицию излучений трех некогерентных источников.

На рассматриваемых частотах (7) доминирует излучение источника в виде диполя, ориентированного вдоль магнитного поля. В разд. 3 аналитически вычислен спектр тормозного излучения от дальних столкновений, а в разд. 4 — от ближних столкновений, указаны интервалы частот, где доминирует излучение дальних и ближних столкновений. В разд. 5 обсуждаются уровни мощности тормозного и циклотронного излучений для различных источников. В заключении сформулированы основные результаты работы.

2. ОПИСАНИЕ ТОРМОЗНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Частотный спектр потока энергии излучения с вектором поляризации \mathbf{e} в единичный телесный угол около направления \mathbf{n} от одного электрон-ионного столкновения определяется формулой [15, ф. (3.17)]

$$W_{\mathbf{e}} = \frac{e^2}{(2\pi)^2 c^3} \left| \mathbf{e}^* \cdot [\mathbf{n} \times [\mathbf{n} \times \mathbf{F}]] \right|^2 = \frac{e^2}{(2\pi)^2 c^3} |\mathbf{e}^* \cdot \mathbf{F}|^2 \quad (8)$$

(«*» означает комплексное сопряжение) и пропорционален спектру \mathbf{F} ускорения $\mathbf{a}(t)$ электрона,

$$\mathbf{F} = \lim_{\gamma \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{a}(t) \exp(i\omega t - |\gamma t|) dt. \quad (9)$$

При переходе к последнему равенству в (8) учтена ортогональность векторов \mathbf{n} и \mathbf{e} . В магнитном поле ускорение электрона остается конечным вдали от иона из-за наличия силы Лоренца. Поэтому, чтобы интеграл в (9) сходил к определенному пределу, в его подынтегральное выражение введен множитель $\exp(-|\gamma t|)$, медленно уменьшающийся при $t \rightarrow \pm\infty$. Центр декартовой системы (x, y, z) привяжем к иону, орт \mathbf{z}° направим вдоль магнитного поля, а орты \mathbf{x}° и \mathbf{y}° — перпендикулярно ему.

Усредним по траекториям спектр излучения (9) с учетом аксиальной симметрии задачи. Для этого используем базисные векторы

$$\hat{\mathbf{e}}_z = \mathbf{z}^\circ, \quad \hat{\mathbf{e}}_r = (\mathbf{x}^\circ + i\mathbf{y}^\circ)/\sqrt{2}, \quad (10)$$

$$\hat{\mathbf{e}}_l = (\mathbf{x}^\circ - i\mathbf{y}^\circ)/\sqrt{2}.$$

Векторам (10) соответствуют фурье-гармоники

$$F_z = \hat{\mathbf{e}}_z^* \cdot \mathbf{F} = \lim_{\gamma \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \ddot{z}(t) \exp(i\omega t - |\gamma t|) dt, \quad (11)$$

$$F_{r,l} = \hat{\mathbf{e}}_{r,l}^* \cdot \mathbf{F} = \lim_{\gamma \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ddot{x}(t) \mp i\ddot{y}(t)}{\sqrt{2}} \exp(i\omega t - |\gamma t|) dt. \quad (12)$$

В записях типа « \mp » здесь и ниже верхний знак относится к F_r , а нижний знак — к F_l . Выразим спектр излучения (8) через фурье-гармоники (11) и (12):

$$W_{\mathbf{e}} = \frac{e^2}{(2\pi)^2 c^3} \sum_{\alpha,\beta} (\mathbf{e}^* \cdot \hat{\mathbf{e}}_{\alpha}) F_{\alpha} F_{\beta}^* \hat{\mathbf{e}}_{\beta}^* \cdot \mathbf{e}, \quad (13)$$

где индексы α и β пробегает значения z, r и l .

Пусть электрон может двигаться по траектории $\mathbf{r}(t) = [z(t), \rho(t), \phi(t)]$, где $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, а азимутальный угол ϕ отсчитываем от оси x . Поскольку электрическое и магнитное поля в задаче стационарны и аксиально-симметричны, частица может двигаться и по траектории \mathbf{r}' , которая получается поворотом \mathbf{r} на угол ϕ_0 вокруг оси z и задержкой движения частицы на время $\Delta t = \phi_0/\omega_B$:

$$\mathbf{r}'(t) = [z(t - \Delta t), \rho(t - \Delta t), \phi(t - \Delta t) + \phi_0].$$

При этом скорости электрона на траекториях \mathbf{r} и \mathbf{r}' совпадают до и после столкновения, когда электрон совершает ларморовское вращение: $\dot{\mathbf{r}}'(t) = \dot{\mathbf{r}}(t)$ при $t \rightarrow \pm\infty$. Фурье-гармоники (11) и (12) на траекториях \mathbf{r} и \mathbf{r}' различаются лишь комплексными аргументами:

$$F'_z = F_z \exp(i\omega \Delta t), \quad (14)$$

$$F'_{r,l} = F_{r,l} \exp(i\omega \Delta t \mp i\phi_0).$$

После усреднения по траекториям \mathbf{r}' с различными углами поворота $0 < \phi_0 < 2\pi$ все произведения $F_{\alpha} F_{\beta}^*$ с индексами $\alpha \neq \beta$ в выражении (13) становятся равными нулю, что обусловлено множителями $\exp(\mp i\phi_0)$ в гармониках F'_r и F'_l (14):

$$\langle W_{\mathbf{e}} \rangle_{\phi_0} = \frac{e^2}{(2\pi)^2 c^3} \sum_{\alpha} |\mathbf{e}^* \cdot \hat{\mathbf{e}}_{\alpha}|^2 |F_{\alpha}^2| = \frac{e^2}{(2\pi)^2 c^3} \left[|F_z^2| |e_z^2| + \frac{1}{2} (|F_r^2| + |F_l^2|) (|e_x^2| + |e_y^2|) + \frac{i}{2} (|F_r^2| - |F_l^2|) (e_x e_y^* - e_x^* e_y) \right], \quad (15)$$

где индекс α пробегает значения z, r и l . Отметим, что модули $|F_{\alpha}^2|$ в выражении (15) не зависят от направлений ортов \mathbf{x}° и \mathbf{y}° и одинаковы для всех траекторий \mathbf{r}' и \mathbf{r} .

Интегрирование выражения (15) по прицельным параметрам дает спектральную мощность тормозно-

го излучения электрона с вектором поляризации \mathbf{e} в единичный телесный угол около направления \mathbf{n} :

$$I_{\mathbf{e}} = I_{z0} |e_z^2| + \frac{1}{2} (I_{r0} + I_{l0}) (|e_x^2| + |e_y^2|) + \frac{i}{2} (I_{r0} - I_{l0}) (e_x e_y^* - e_x^* e_y), \quad (16)$$

где

$$I_{\alpha 0} = \frac{n_i e^2 v_{0\parallel}}{(2\pi)^2 c^3} \int_0^{2\pi} d\varphi_h \int_0^{\infty} dp_h p_h |F_{\alpha}^2|, \quad (17)$$

индекс α принимает значения z, r и l , n_i — концентрация ионов, $v_{0\parallel}$ — начальная скорость электрона вдоль магнитного поля, прицельный параметр p_h — начальное расстояние от центра циклотронного вращения электрона до оси z . Угол φ_h определяется положением электрона на ларморовской окружности в момент пересечения плоскости $z = 0$ в случае, когда частица продолжает двигаться по начальной винтовой траектории, невозмущенной ионом [3]. Он равен углу между отрезком, соединяющим ион и центр вращения, — прицельным параметром — и отрезком, соединяющим центр вращения с электроном, — ларморовским радиусом.

Согласно выражениям (15) и (16), излучение электрона представляет собой суперпозицию излучений трех некогерентных источников с дипольными моментами, направленными вдоль $\hat{\mathbf{e}}_z$, $\hat{\mathbf{e}}_r$ и $\hat{\mathbf{e}}_l$ (10). Мощности излучения источников, проинтегрированные по всем направлениям, равны соответственно $8\pi I_{z0}/3$, $8\pi I_{r0}/3$ и $8\pi I_{l0}/3$. Таким образом, задача о тормозном излучении электрона в магнитном поле сведена к вычислению мощностей (17).

Вместе с тем на рассматриваемых частотах (7) магнитное поле подавляет поперечную высокочастотную проводимость электронов. Подавление проводимости не связано с изменением столкновений и обусловлено тем, что поляризованная поперек магнитного поля волна вызывает лишь медленный дрейф электрона в скрещенных электрическом поле волны и внешнем однородном магнитном поле. Следовательно, на частотах (7) в основном поглощается и излучается волна, поляризованная в плоскости, проходящей через вектор магнитного поля и направление распространения \mathbf{n} [16, 17]. Поэтому на частотах (7) следует ожидать существенно больших значений мощности I_{z0} по сравнению с I_{r0} и I_{l0} . Таким образом, в данной работе мы ограничимся расчетом только I_{z0} . Далее последовательно рассмотрим вклад в I_{z0} от дальних и ближних столкновений.

3. ДАЛЬНИЕ СТОЛКНОВЕНИЯ

В дальних столкновениях с прицельными параметрами $p_h > p_{cr}$ (4) электрон пролетает область около иона за характерное время, большее ω_B^{-1} , и, таким образом, движется в условиях магнитодрейфового приближения. Центр циклотронного вращения почти привязан к одной из магнитных силовых линий и движется с мгновенным ускорением

$$\ddot{z} \approx -\frac{Ze^2z}{m(p_h^2 + z^2)^{3/2}}. \quad (18)$$

Поперек магнитного поля электрон лишь медленно дрейфует по азимуту в скрещенных электрическом и магнитном полях. Изменение азимутального угла ϕ мало и становится порядка $\pi/2$ лишь на границе дальних и ближних столкновений.

Подставляем ускорение (18) в выражение (11) для фурье-гармоники F_z . Заменяем интегрирование по времени интегрированием по $dz = \dot{z} dt$, где \dot{z} определяем из приближенного закона сохранения энергии (пренебрегающего малым смещением $\Delta\rho$ электрона поперек магнитного поля, $\Delta\rho \ll p_h$):

$$|\dot{z}| \approx \left[v_{0\parallel}^2 + \frac{2Ze^2}{m(p_h^2 + z^2)^{1/2}} \right]^{1/2}. \quad (19)$$

Получаем вклад в спектральную мощность I_{z0} (17) от дальних столкновений:

$$I_{z0}^{(d)} = \frac{2n_i Z^2 e^6}{\pi m^2 c^3 v_{0\parallel}} \int_{\eta_{cr}}^{\infty} d\eta \eta \times \left(\int_0^{\infty} d\zeta \zeta \frac{\sin \left[\int_0^{\zeta} d\zeta' \left(1 + 2\Omega / \sqrt{\eta^2 + \zeta'^2} \right)^{-1/2} \right]}{\left(1 + 2\Omega / \sqrt{\eta^2 + \zeta^2} \right)^{1/2} (\eta^2 + \zeta^2)^{3/2}} \right)^2, \quad (20)$$

где безразмерные переменные интегрирования $\eta = p_h \omega / v_{0\parallel}$, $\zeta = z \omega / v_{0\parallel}$. Нижний предел интегрирования в (20)

$$\eta_{cr} = p_{cr} \omega / v_{0\parallel}$$

можно положить равным нулю для рассматриваемых условий (3) и частот (7). Действительно, величина η_{cr} соответствует границе дальних и ближних столкновений, где электрон пролетает область около иона за время порядка ω_B^{-1} . Однако основное значение интеграла по η в выражении (20) набирается в

многочисленных более далеких столкновениях¹⁾, где электрон пролетает область около иона за время порядка $\omega^{-1} \gg \omega_B^{-1}$. В результате значение интегралов в (20) зависит только от нормированной частоты

$$\Omega = Ze^2 \omega / m v_{0\parallel}^3 \equiv \omega / \omega_s(v_{0\parallel}) \quad (21)$$

— отношения ω к обратному времени пролета электрона около иона на расстоянии r_s (2),

$$\omega_s(v_{0\parallel}) = m v_{0\parallel}^3 / Ze^2. \quad (22)$$

В рассматриваемых условиях (3) частота ω_s попадает в исследуемый диапазон (7). Поэтому найдем предельные значения интенсивности (20) на низких частотах

$$\omega \ll \omega_s(v_{0\parallel}) \ll \omega_B \quad (23)$$

и на высоких частотах

$$\omega_s(v_{0\parallel}) \ll \omega \ll \omega_B. \quad (24)$$

На низких частотах (23) спектр $I_{z0}^{(d)}$ плоский — не зависит от ω :

$$I_{z0}^{(d)} = \frac{2n_i Z^2 e^6}{\pi m^2 c^3 v_{0\parallel}} \int_0^{\infty} d\eta \eta \left(\int_0^{\infty} \frac{\zeta \sin \zeta d\zeta}{(\eta^2 + \zeta^2)^{3/2}} \right)^2 = \frac{n_i Z^2 e^6}{\pi m^2 c^3 v_{0\parallel}}. \quad (25)$$

Для получения (25) мы положили в выражении (20) параметр $\Omega \ll 1$ равным нулю. Аппроксимация $\Omega = 0$ соответствует тому, что на частотах (23) излучение определяют очень далекие столкновения с прицельными параметрами $p_h \sim v_{0\parallel} / \omega \gg r_s$, при которых ион слабо возмущает скорость электрона и координата z линейно зависит от времени: $z \approx v_{0\parallel} t$. В (25) интеграл по ζ равен функции Макдональда $K_0(\eta)$ согласно [18, ф. 2.5.9.11] и соответствует второму слагаемому в [15, ф. (3.58)], где рассматривается излучение от дальних столкновений без магнитного поля. Получающийся интеграл $\int_0^{\infty} d\eta \eta K_0^2(\eta)$ равен $1/2$ согласно [19, ф. 2.16.33.2].

¹⁾ Изменение предела интегрирования η_{cr} можно условно интерпретировать и как «добавление» в расчет ближних столкновений, будто в них электрон однократно пролетает около иона без изменения направления скорости и многочисленных возвратов к рассеивающему центру. Однако интенсивность излучения от ближних столкновений становится порядка и больше интенсивности излучения от дальних столкновений на соответствующих частотах именно за счет многочисленных возвратов электрона к иону, см. пп. 4.4. Таким образом, изменение предела интегрирования η_{cr} не меняет точности расчета интенсивности излучения как от дальних, так и от ближних столкновений.

Отметим, что в отсутствие магнитного поля излучение на частотах (23) в основном обусловлено изменением направления скорости частицы, которое вызвано компонентой кулоновской силы, перпендикулярной начальной скорости электрона. Соответствующее излучение описывается первым слагаемым в [15, ф. (3.58)]. В сильном магнитном поле действие поперечной компоненты кулоновской силы компенсируется силой Лоренца, связанной с азимутальным дрейфом в скрещенных электрическом и магнитном полях. В результате излучение создается лишь последовательным ускорением и торможением электрона в кулоновском поле вдоль оси z . Как следствие, в выражении (25) отсутствует кулоновский логарифм.

На высоких частотах (24) параметр $\Omega \gg 1$, поэтому радикалы $(1 + 2\Omega/\sqrt{\eta^2 + \zeta^2})^{1/2}$ в формуле (20) заменим приближенным выражением $(2\Omega/\sqrt{\eta^2 + \zeta^2})^{1/2}$. Такая замена соответствует тому, что излучение на частотах (24) определяют столкновения с прицельными параметрами $p_h \ll r_s$. В этих столкновениях кулоновское поле сильно ускоряет электрон, так что его скорость вблизи иона почти не зависит от своего начального значения. Выражение (20) для спектральной мощности принимает вид

$$I_{z0}^{(d)} = \frac{2n_i Z^2 e^6}{\pi m^2 c^3 v_{0\parallel}} (2\Omega)^{-2/3} \times \\ \times \int_0^\infty d\bar{\eta} \bar{\eta} \left(\int_0^\infty \frac{\bar{\zeta} \sin[\int_0^{\bar{\zeta}} (\bar{\eta}^2 + \bar{\zeta}'^2)^{1/4} d\bar{\zeta}'] d\bar{\zeta}}{(\bar{\eta}^2 + \bar{\zeta}^2)^{5/4}} \right)^2 = \\ = 0.41 \frac{n_i Z^2 e^6 v_{0\parallel}}{\pi m^2 c^3 (\omega Z e^2 / m)^{2/3}}, \quad (26)$$

где безразмерные переменные интегрирования

$$\bar{\eta} = (2\Omega)^{-1/3} \eta = p_h \omega^{2/3} / (2Z e^2 / m)^{1/3}, \\ \bar{\zeta} = (2\Omega)^{-1/3} \zeta = z \omega^{2/3} / (2Z e^2 / m)^{1/3}. \quad (27)$$

Отметим, что в отсутствие магнитного поля спектр излучения вышел бы на постоянное значение на высоких частотах (24); см. [20, ф. (70.22)]. Этот спектр определяют гиперболические траектории, по которым электрон подходит к иону на существенно меньшие расстояния, чем прицельный параметр. В рассматриваемых условиях (3) магнитное поле препятствует смещению электрона поперек оси z и электрон не приближается к иону меньше, чем на прицельный параметр. В результате спектральная мощность (26) уменьшается с увеличением частоты.

4. БЛИЖНИЕ СТОЛКНОВЕНИЯ

4.1. Разбиение траектории

В ближних столкновениях с прицельными параметрами $p_h < p_{cr}$ (4) электрон много раз возвращается к иону и его движение хаотично [2, 4–7]. Плоскость $z = 0$ «разрезает» траекторию частицы на начальный и конечный участки подлета и отлета от иона и отрезки связанного движения от плоскости $z = 0$ до точек поворота (где $\dot{z} = 0$) и обратно к плоскости $z = 0$. Отрезки связанного движения назовем «петлями»²⁾.

Фурье-гармонику F_z (11) разобьем на сумму интегралов по указанным участкам траектории. При этом подынтегральные функции \dot{z} на начальном и конечном участках представим соответственно в виде

$$\dot{z} = \frac{d(\dot{z} - v_{0\parallel})}{dt}, \quad \dot{z} = \frac{d(\dot{z} - v_{f\parallel})}{dt},$$

где константы $v_{0\parallel}$ и $v_{f\parallel}$ — проекции начальной и конечной скоростей электрона на направление магнитного поля. Интегралы по начальному и конечному участкам возьмем по частям один раз, а по петлям — два раза:

$$F_z = -v_{0\parallel} \exp(i\omega t_0) - i\omega \int_{-\infty}^{t_0} (\dot{z} - v_{0\parallel}) \exp(i\omega t) dt - \\ - \sum_{q=1}^N \omega^2 \int_{t_{q-1}}^{t_q} z \exp(i\omega t) dt - \\ - i\omega \int_{t_N}^{\infty} (\dot{z} - v_{f\parallel}) \exp(i\omega t) dt + v_{f\parallel} \exp(i\omega t_N), \quad (28)$$

где t_q — моменты пересечения плоскости $z = 0$ ($q = 0, 1, 2, \dots, N$), а N — полное число «петель». Отметим, что в (28) подынтегральные функции $\dot{z} - v_{0\parallel}$ и $\dot{z} - v_{f\parallel}$ стремятся к нулю при $|t| \rightarrow \infty$, так что интегралы по начальному и конечному участкам сходятся.

Далее пусть электрон налетает на ион из полупространства $z < 0$ и $v_{0\parallel} > 0$. Тогда на нечетных петлях (первой, третьей и т. д.) координата z положительна, а на четных — отрицательна. При четном N скорость \dot{z} на конечном участке положительна, а при нечетном — отрицательна. Поэтому выделим в явном виде знаки перед интегралами в (28):

²⁾ Характерный пример траектории с многочисленными петлями приведен в работе [7, рис. 2 и 3].

$$F_z = g_i \exp(i\omega t_0) + \sum_{q=1}^N (-1)^q h_q \exp(i\omega t_q) + (-1)^{N+1} g_f \exp(i\omega t_N), \quad (29)$$

где

$$g_i = -|v_{0\parallel}| - i\omega \int_0^\infty |\dot{z}(t_0 - \tau) - v_{0\parallel}| e^{-i\omega\tau} d\tau, \quad (30)$$

$$g_f = -|v_{f\parallel}| + i\omega \int_0^\infty |\dot{z}(t_N + \tau) - v_{f\parallel}| e^{i\omega\tau} d\tau, \quad (31)$$

$$h_q = \omega^2 \int_0^{t_q - t_{q-1}} |z(t_q - \tau)| e^{-i\omega\tau} d\tau, \quad (32)$$

$q = 1, 2, \dots, N.$

Вклад в мощность I_{z0} (17) от ближних столкновений принимает вид

$$I_{z0}^{(c)} = \frac{n_i \epsilon^2 v_{0\parallel}}{(2\pi)^2 c^3} \left[\mathcal{J}\{|g_i^2|\} + \mathcal{J}\{|g_f^2|\} + \sum_{q=1}^\infty \mathcal{J}_{N \geq q}\{|h_q^2|\} + 2 \operatorname{Re} \sum_{r=0}^\infty (-1)^{r+1} \mathcal{J}_{N=r}\{g_i g_f^* \exp[i\omega(t_0 - t_N)]\} + 2 \operatorname{Re} \sum_{r=0}^\infty (-1)^{r+1} \mathcal{J}_{N>r}\{g_i h_{1+r}^* \exp[i\omega(t_0 - t_{1+r})]\} + 2 \operatorname{Re} \sum_{r=0}^\infty (-1)^{r+1} \mathcal{J}_{N>r}\{g_f h_{N-r}^* \exp[i\omega(t_N - t_{N-r})]\} + 2 \operatorname{Re} \sum_{r=0}^\infty (-1)^{r+1} \times \times \sum_{q=1}^\infty \mathcal{J}_{N>q+r}\{h_q h_{q+1+r}^* \exp[i\omega(t_q - t_{q+1+r})]\} \right]. \quad (33)$$

В (33) мы поменяли местами интегрирование по прицельным параметрам и суммирование по участкам траектории и перегруппировали слагаемые так, что индекс суммирования $r \geq 0$ обозначает количество петель, соединяющих два участка траектории, к которым относится произведение в фигурных скобках. В результате \mathcal{J} обозначает интеграл от величины в фигурных скобках по той области прицельных параметров p_h и φ_h , где имеет смысл интегрируемое выражение. Эта область задана условием для N , указанным в нижнем индексе \mathcal{J} , и отражает наличие соответствующих участков, соединенных r петлями. Запись \mathcal{J} без индекса обозначает интеграл по всем прицельным параметрам ближних

столкновений $p_h \leq p_{cr}$ и $0 \leq \varphi_h < 2\pi$. При раскрытии $|F_z^2|$ (29) интерференционные слагаемые типа $h_q h_{q+1+r}^* \exp[i\omega(t_q - t_{q+1+r})]$ появляются в паре с комплексно-сопряженной величиной, что обуславливает коэффициент двойку перед суммами и взятие действительной части от них.

4.2. Сложение спектров от разных участков траекторий

Знакопеременность слагаемых в интерференционных суммах по r в выражении (33) позволяет оценить суммы как их первые слагаемые, умноженные на коэффициенты порядка единицы. Действительно, если слагаемые резко уменьшаются с увеличением r на единицу, то достаточно взять только первое слагаемое. Если же соответствующие величины мало изменяются при увеличении r , то воспользуемся тождеством

$$\left(\sum_{r'=0}^\infty (-1)^{r'} c_{r'} \right) - \frac{c_0}{2} = \sum_{r'=0}^\infty (-1)^{r'} \frac{c_{r'} - c_{r'+1}}{2}$$

для произвольной оцениваемой суммы $\sum_{r'=0}^\infty (-1)^{r'} c_{r'}$. Слагаемые в сумме справа много меньше по абсолютной величине слагаемых суммы слева, поэтому $\sum_{r'=0}^\infty (-1)^{r'} c_{r'} \approx c_0/2$. Таким образом, выражение (33) для искомой мощности принимает вид

$$I_{z0}^{(c)} = \frac{n_i \epsilon^2 v_{0\parallel}}{(2\pi)^2 c^3} \times \left[\mathcal{J}\{|g_i^2|\} + \mathcal{J}\{|g_f^2|\} + \sum_{q=1}^\infty \mathcal{J}_{N \geq q}\{|h_q^2|\} - 2c_{i-f} \operatorname{Re} \mathcal{J}_{N=0}\{g_i g_f^*\} - 2c_{i-l} \operatorname{Re} \mathcal{J}_{N>0}\{g_i h_1^* \exp[i\omega(t_0 - t_1)]\} - 2c_{f-l} \operatorname{Re} \mathcal{J}_{N>0}\{g_f h_N^*\} - 2c_{l-l} \times \times \operatorname{Re} \sum_{q=1}^\infty \mathcal{J}_{N>q}\{h_q h_{q+1}^* \exp[i\omega(t_q - t_{q+1})]\} \right], \quad (34)$$

где c_{i-f} , c_{i-l} , c_{f-l} , c_{l-l} — численные коэффициенты порядка единицы. Покажем, что на рассматриваемых частотах (7) интерференционные слагаемые с коэффициентами c_{i-f} , c_{i-l} , c_{f-l} , c_{l-l} малы по сравнению с остальными слагаемыми в (34).

Так, вблизи иона кинетическая энергия принимает характерное значение

$$E_u = Ze^2 / L_u = m\omega_B^2 L_u^2, \quad (35)$$

где L_u — характерный прицельный параметр ближних столкновений (5). Естественно ожидать, что обычно электрон пролетает по петле за время $T \sim L_u / \sqrt{E_u/m} = \omega_B^{-1}$ (см. (35)), а точки поворота удалены от иона на расстояние порядка L_u . Тогда фурье-гармоника $|h_q|$ (32) составляет величину порядка $\omega^2 L_u T = \omega^2 L_u \omega_B^{-1}$, и большинство траекторий с $N \geq q$ дают вклад в слагаемое $\mathcal{J}_{N \geq q}\{|h_q^2|\}$ в (34) порядка

$$J_{short} = (\omega^2 L_u \omega_B^{-1})^2 S,$$

где $S < \pi p_{cr}^2$ — «площадь» прицельных параметров траекторий с $N \geq q$.

Вместе с тем существуют относительно маловероятные траектории с вытянутой вдоль магнитного поля q -й петлей, по которой электрон движется до точки поворота $z_t \gg L_u$ и обратно за время $T \sim \omega^{-1} \gg \omega_B^{-1}$. На них фурье-гармоника $|h_q|$ (32) достигает максимальных значений порядка $\omega^2 z_t T = \omega z_t$. Расстояние z_t фиксирует кинетическую энергию поперечного движения в точке поворота, $E_{\perp} = E_0 - Ze^2/z_t$, где $E_0 = mv_0^2/2$. В свою очередь, E_{\perp} слабо меняется вдали от иона на расстояниях $|z| \gg L_u$, где кулоновское поле тормозит электрон лишь вдоль магнитного поля. Для оценки полагаем, что после очередного пролета около иона скорость электрона может быть направлена в широком конусе с углом при вершине порядка π и, следовательно, E_{\perp} в среднем равномерно по прицельным параметрам принимает значения от 0 до E_u . При таком равномерном распределении «площадь» S_{long} прицельных параметров траекторий с длиной q -й петлей, будучи нормированной на площадь S всех траекторий с $N \geq q$, равна отношению соответствующих интервалов энергий

$$\frac{E_{\perp} - E_0}{E_u} = \frac{Ze^2}{z_t} \frac{1}{E_u} = \frac{L_u}{z_t}$$

(см. (35)). Получаем вклад траекторий с длиной q -й петлей в слагаемое $\mathcal{J}_{N \geq q}\{|h_q^2|\}$ в (34):

$$J_{long} = (\omega z_t)^2 S_{long} = \left(\frac{\omega_B}{\omega}\right)^2 \frac{z_t}{L_u} J_{short} \gg J_{short},$$

где $(\omega_B/\omega)^2 \gg 1$ и $z_t/L_u \gg 1$.

Таким образом, излучение связанного участка траектории на рассматриваемых частотах (7) определяют немногочисленные длинные петли.

В таком случае в выражении (34) можно пренебречь интерференционной суммой $-2c_{i-l} \times \text{Re} \sum_{q=1}^{\infty} \mathcal{J}_{N>q}\{h_q h_{q+1}^* \exp[i\omega(t_q - t_{q+1})]\}$ по

сравнению с $\sum_{q=1}^{\infty} \mathcal{J}_{N \geq q}\{|h_q^2|\}$. Интерференционная сумма могла бы достичь значений порядка $\sum_{q=1}^{\infty} \mathcal{J}_{N \geq q}\{|h_q^2|\}$, только если бы длинные петли в основном появлялись связанными парами (были бы соседними участками). Однако для большинства траекторий естественно ожидать, что длинная петля сцеплена с более вероятными короткими петлями.

Вместе с тем в формуле (34) можно пренебречь «интерференционными» слагаемыми $-2c_{i-l} \text{Re} \mathcal{J}_{N>0}\{g_i h_1^* \exp[i\omega(t_0 - t_1)]\}$ и $-2c_{f-l} \times \text{Re} \mathcal{J}_{N>0}\{g_f h_N^*\}$ по сравнению с $\mathcal{J}\{|g_i^2|\} + \mathcal{J}\{|g_f^2|\}$. Действительно, движение по начальному и конечному участкам условно представляет собой движение по половинам бесконечно вытянутых вдоль z петель. Соответственно, гармоники $|g_i|$ и $|g_f|$ не меньше по порядку величины гармоники $|h_q|$ на единичной длинной петле. Тогда указанные интерференционные слагаемые могли бы достичь значений порядка $\mathcal{J}\{|g_i^2|\} + \mathcal{J}\{|g_f^2|\}$, только если бы начальный и конечный участки обычно переходили в длинные петли. Однако естественно ожидать, что начальный и конечный участки обычно переходят в более вероятные короткие петли.

Наконец, в выражении (34) можно пренебречь интерференционным слагаемым $-2c_{i-f} \times \text{Re} \mathcal{J}_{N=0}\{g_i g_f^*\}$ по сравнению с $\mathcal{J}\{|g_i^2|\} + \mathcal{J}\{|g_f^2|\}$, поскольку при определении первого из них приходится интегрировать по малой области прицельных параметров редких ближних столкновений с $N = 0$, у которых отсутствуют петли.

Таким образом, мы показали, что «интерференция» амплитуд спектров излучения от различных участков траектории нивелируется при интегрировании по прицельным параметрам. Этот эффект качественно обусловлен тем, что основное излучение на рассматриваемых частотах (7) дают начальный и конечный участки траектории и редкие длинные петли. Эти ключевые участки соединены большим числом коротких петель. Поэтому если взять пару каких-либо ключевых участков, то в среднем по прицельным параметрам естественно ожидать примерно равное число траекторий, на которых выделенные два ключевых участка расположены по одну и по разные стороны от плоскости $z = 0$. Траектории с противоположными конфигурациями участков в паре дают интерференционные слагаемые противоположных знаков, которые взаимно компенсируются при интегрировании по прицельным параметрам.

Итак, спектральная мощность излучения от ближних столкновений (33), (34) определяется суммой «некогерентных» слагаемых:

$$I_{z0}^{(c)} = \frac{n_i e^2 v_{0\parallel}}{(2\pi)^2 c^3} \times \left[\mathcal{J}\{|g_i^2|\} + \mathcal{J}\{|g_f^2|\} + \sum_{q=1}^{\infty} \mathcal{J}_{N \geq q}\{|h_q^2|\} \right]. \quad (36)$$

Оценим эти слагаемые и оставим лишь те, которые могут быть порядка или больше мощности излучения от дальних столкновений (25) и (26).

4.3. Излучение на начальном и конечном участках траекторий

В фурье-гармонике g_i (30) основное значение интеграла набирается в области $|z| \lesssim r_s$ (2). Здесь скорость \dot{z} может быть аппроксимирована выражением

$$|\dot{z}| \approx \sqrt{\frac{2Ze^2}{m|z|}} \gg v_{0\parallel}.$$

Переходим в выражении (30) от интегрирования по времени к интегрированию по $dz = \dot{z} d\tau$, применяем формулы [18, ф. 2.5.5.3], получаем оценку

$$g_i \approx -|v_{0\parallel}| - i\omega \int_0^{\infty} dz \exp \left[-i \int_0^z \frac{\omega dz'}{\sqrt{2Ze^2/mz'}} \right] = -|v_{0\parallel}| - \frac{(\omega Ze^2/m)^{1/3} (\sqrt{3} + i)}{6^{1/3}/\Gamma(2/3)}. \quad (37)$$

Аналогичную оценку получаем для фурье-гармоники (31):

$$g_f \approx -|v_{f\parallel}| - \frac{(\omega Ze^2/m)^{1/3} (\sqrt{3} - i)}{6^{1/3}/\Gamma(2/3)}. \quad (38)$$

На низких частотах (23) в гармониках (37) и (38) доминируют первые слагаемые: $|g_i^2| \approx v_{0\parallel}^2$ и $|g_f^2| \approx v_{f\parallel}^2$. При определении $\mathcal{J}\{|g_i^2|\}$ интегрирование по прицельным параметрам сводится к умножению $|g_i^2|$ на πp_{cr}^2 , где величина p_{cr} определена в (4). При определении $\mathcal{J}\{|g_f^2|\}$ аналогичное интегрирование заменим интегрированием по $v_{f\parallel}^2$ с помощью дифференциального сечения [3]: $2\pi p_h dp_h = \pi p_{cr}^2 d(v_{f\parallel}^2)/v_0^2$. Получаем искомую оценку мощности излучения в (36) от начального и конечного участков траекторий на низких частотах (23)³⁾:

³⁾ Именно выражение (39) мы получили бы для искомой мощности (17), если бы изначально ограничились приближением мгновенных столкновений.

$$I_{z0}^{(i+f)} = \frac{n_i e^2 v_{0\parallel}}{(2\pi)^2 c^3} [\mathcal{J}\{|g_i^2|\} + \mathcal{J}\{|g_f^2|\}] = \frac{n_i e^2 p_{cr}^2 v_{0\parallel}}{4\pi c^3} \left(v_{0\parallel}^2 + \frac{v_0^2}{2} \right) \sim \frac{n_i e^2 L_u^2 v_0^3}{\pi c^3}. \quad (39)$$

Величина (39) меньше мощности излучения от дальних столкновений (25) примерно в $r_s^2/L_u^2 = (r_s/r_B)^{4/3} \gg 1$ раз, см. (5).

На высоких частотах (24) в выражениях (37) и (38) доминируют вторые слагаемые и мощность излучения на начальном и конечном участках траектории оцениваем как

$$I_{z0}^{(i+f)} = \frac{n_i e^2 p_{cr}^2 (\omega Ze^2/m)^{2/3} v_{0\parallel}}{(9/2)^{1/3} \pi c^3 / \Gamma^2(2/3)} = \frac{2.1 n_i Z^2 e^6 v_{0\parallel}}{\pi m^2 c^2 (\omega Ze^2/m)^{2/3}} \left(\frac{\omega}{\omega_B} \right)^{4/3} \times \ln^{4/3} \left[\left(\frac{r_s}{r_B} \right)^{1/3} \right]. \quad (40)$$

Она достигает мощности излучения (26) от дальних столкновений лишь на частотах порядка ω_B — вне рассматриваемого диапазона (7).

Таким образом, излучение на начальном и конечном участках несущественно для расчета искомой мощности излучения (17). Остается рассмотреть излучение от петель.

4.4. Излучение на связанном участке траекторий

Основной вклад в фурье-гармонику h_q (32) на длинной петле набирается вдали от иона, где $|z| \gg L_u$. Здесь z является четной функцией времени τ' , отсчитываемого от момента прохождения точки поворота $t_{tq} \approx (t_q + t_{q-1})/2$. Интеграл (32) сводим к удвоенному интегралу по половине петли, который берем один раз по частям:

$$h_q \approx 2\omega \exp[i\omega(t_q - t_{q-1})/2] \times \int_0^{(t_q - t_{q-1})/2} d\tau' |\dot{z}(t_{tq} - \tau')| \sin \omega \tau'. \quad (41)$$

В области $|z| \gg L_u$ движение электрона эквивалентно кеплеровскому движению по сильно вытянутому вдоль оси z эллипсу. Делаем замену переменных [20, § 70]

$$|z| = z_{tq} (1 + \cos w) / 2, \quad (42)$$

где $z_{tq} \approx Ze^2/(\mathcal{E}_{\perp q} - E_0)$ — удаление q -й точки поворота от иона, $\mathcal{E}_{\perp q} > E_0$ — кинетическая энергия поперечного движения в точке поворота, $E_0 = mv_0^2/2$. Скорость

$$|\dot{z}| = \sqrt{\frac{2Ze^2}{mz_{tq}}} \operatorname{tg} \frac{w}{2} \quad (43)$$

получаем подстановкой (42) в закон сохранения энергии для «одномерного» кулоновского потенциала: $m|\dot{z}|^2/2 - Ze^2/|z| = -Ze^2/z_{tq}$. Находим время τ' в (41):

$$\tau' = \int_{|z|}^{z_{tq}} \frac{d|z'|}{|z'|} = \frac{(z_{tq}/2)^{3/2}}{\sqrt{Ze^2/m}} (w + \sin w). \quad (44)$$

Подставляем замены (42)–(44) в (41). Получаем, что гармоника

$$|h_q| \equiv \mathfrak{h}(\mathcal{E}_{\perp q}) = 2 \left(\frac{\omega Ze^2}{m} \right)^{1/3} \times \bar{\zeta}_t \int_0^\pi \sin \left[\bar{\zeta}_t^{3/2} (w + \sin w) \right] \sin w dw \quad (45)$$

определяется энергией $\mathcal{E}_{\perp q}(p_h, \varphi_h)$, которая, в свою очередь, однозначно фиксируется нормированным удалением точки поворота

$$\bar{\zeta}_t = \frac{z_{tq}\omega^{2/3}}{2(Ze^2/m)^{1/3}} = \frac{(\omega Ze^2/m)^{2/3}}{2(\mathcal{E}_{\perp q} - E_0)/m}. \quad (46)$$

В этом случае для вычисления величины $\sum_{q=1}^\infty \mathcal{J}_{N \geq q} \{|h_q^2|\}$ в (36) перейдем от интегрирования по прицельным параметрам к интегрированию по $\mathcal{E}_{\perp q}$. Для этого меняем местами суммирование по номерам петель q и интегрирование по p_h, φ_h :

$$\sum_{q=1}^\infty \mathcal{J}_{N \geq q} \{|h_q^2|\} = \int_0^{2\pi} d\varphi_h \int_0^\infty dp_h p_h \times \sum_{q=1}^{N(p_h, \varphi_h)} |\mathfrak{h}(\mathcal{E}_{\perp q}(p_h, \varphi_h))|^2. \quad (47)$$

Подставляем в (47) тождество

$$\sum_{q=1}^{N(p_h, \varphi_h)} |\mathfrak{h}(\mathcal{E}_{\perp q}(p_h, \varphi_h))|^2 = \int_0^\infty dE_\perp |\mathfrak{h}(E_\perp)|^2 \times \sum_{q=1}^{N(p_h, \varphi_h)} \delta[E_\perp - \mathcal{E}_{\perp q}(p_h, \varphi_h)],$$

где δ — дельта-функция, и меняем местами интегрирование по E_\perp и p_h, φ_h :

$$\sum_{q=1}^\infty \mathcal{J}_{N \geq q} \{|h_q^2|\} = \int_0^\infty dE_\perp |\mathfrak{h}(E_\perp)|^2 \frac{d\sigma}{dE_\perp}. \quad (48)$$

Величину

$$\frac{d\sigma}{dE_\perp} = \int_0^{2\pi} d\varphi_h \int_0^\infty dp_h p_h \times \sum_{q=1}^{N(p_h, \varphi_h)} \delta[E_\perp - \mathcal{E}_{\perp q}(p_h, \varphi_h)] \quad (49)$$

условно назовем сечением рассеяния. Действительно, пусть функция $\delta(K)$ отлична от нуля только в малом интервале своего аргумента $0 < K < \Delta E_\perp$ и равна в нем $1/\Delta E_\perp$. Тогда величина (49) приобретает смысл деленной на ΔE_\perp «площади» прицельных параметров, из которой электрон попадает в какую-нибудь точку поворота с кинетической энергией поперечного движения в интервале от E_\perp до $E_\perp + \Delta E_\perp$.

Сечение (49) отлично от нуля лишь для $E_\perp > E_0$, поскольку в точке поворота энергия $\mathcal{E}_{\perp q}(p_h, \varphi_h) > E_0 = mv_0^2/2$. Расширим определение (49) на область $E_\perp \leq E_0$. Для этого доопределим $\mathcal{E}_{\perp q}(p_h, \varphi_h)$ как кинетическую энергию поперечного движения в точке максимального удаления электрона от иона после q -го пересечения плоскости $z = 0$ (т. е. в точке поворота или при $|z| = \infty$). Соответственно включим в сумму (49) последний пролет около иона:

$$\frac{d\sigma}{dE_\perp} = \int_0^{2\pi} d\varphi_h \int_0^\infty dp_h p_h \times \sum_{q=1}^{N(p_h, \varphi_h)+1} \delta[E_\perp - \mathcal{E}_{\perp q}(p_h, \varphi_h)]. \quad (50)$$

В области $E_\perp > E_0$ величина (50) сохраняет значения и смысл (49), а в области $E_\perp \leq E_0$ совпадает с обычным сечением рассеяния в конечном состоянии с энергией поперечного движения E_\perp в расчете на единичный интервал энергий.

Энергия $\mathcal{E}_{\perp q}(p_h, \varphi_h)$ принимает значения в широком интервале $0 \leq E_\perp \lesssim E_u$ (35) по сравнению с $E_0 = mv_0^2/2$. В свою очередь, зависимость сечения (50) от E_\perp определяется свойствами функции $\mathcal{E}_{\perp q}(p_h, \varphi_h)$, и поэтому существенно изменяется лишь при $E_\perp \sim E_u$. Если известно обычное сечение

для конечных состояний с $E_{\perp} \leq E_0$, его экстраполяция на область $E_{\perp} > E_0$ должна корректно описывать сечение (50) в интервале $E_0 < E_{\perp} \ll E_u$, который как раз соответствует длинным петлям. Для дифференциального сечения, предложенного в работе [3],

$$d\sigma/dE_{\perp} = \sigma_0/E_0, \quad (51)$$

где $\sigma_0 = \pi p_{cr}^2$ — полное сечение ближних столкновений, а p_{cr} определен (4)⁴. В квантовомеханической интерпретации сечение (51) соответствует равновероятному попаданию электрона после столкновения на произвольный уровень Ландау с энергией $E_{\perp} \leq E_0$. Экстраполяция соотношения (51) на область $E_{\perp} > E_0$ соответствует предположению равновероятного попадания электрона и на более высокие («захваченные» ионом) уровни Ландау после произвольно выбранного пролета около иона.

Подставляя в выражение (48) фурье-гармонику (45) и сечение (51), находим искомую мощность излучения при движении по связанному участку траекторий:

$$\begin{aligned} I_{z0}^{(l)} &= \frac{n_i e^2 \sigma_0 v_{0\parallel}}{(2\pi)^2 c^3 E_0} \int_{E_0}^{\infty} dE_{\perp} |h(E_{\perp})|^2 = \\ &= \frac{n_i e^2 p_{cr}^2 v_{0\parallel}}{\pi c^3 v_0^2} \left(\frac{\omega Z e^2}{m} \right)^{4/3} \int_0^{\infty} d\bar{\zeta}_t \times \\ &\times \left(\int_0^{\pi} \sin[\bar{\zeta}_t^{3/2} (w + \sin w)] \sin w dw \right)^2 = \\ &= \frac{4.78 n_i Z^2 e^6}{\pi m^2 c^3 v_0} \frac{v_{0\parallel}}{v_0} \left(\frac{\omega}{\omega_B} \right)^{4/3} \ln^{4/3} \left[\left(\frac{r_s}{r_B} \right)^{1/3} \right], \quad (52) \end{aligned}$$

где интегрирование по E_{\perp} преобразовано в интегрирование по $\bar{\zeta}_t$ согласно (46). Спектральная мощность (52) превышает мощность излучения от дальних столкновений (26) на частотах, больших чем

$$\begin{aligned} \omega_i &= 0.29 \omega_s(v_0) \frac{(r_s/r_B)^{2/3}}{\ln^{2/3}[(r_s/r_B)^{1/3}]} \equiv \\ &\equiv \frac{0.29 \omega_B}{(r_s/r_B)^{1/3} \ln^{2/3}[(r_s/r_B)^{1/3}]}, \quad (53) \end{aligned}$$

где величина $\omega_s(v_0) = m v_0^3 / Z e^2$ определена в (22). Частота (53) попадает в интервал рассматриваемых частот (7) и приходится на высокие частоты (24).

⁴ Сечение (51), пересчитанное на косинус питч-угла конечной скорости, $\cos \theta_f = v_{f\parallel} / v_0$, приобретает вид $d\sigma/d(\cos \theta_f) = \pi p_{cr}^2 |\cos \theta_f| \propto |\cos \theta_f|$, что качественно соответствует результатам численных расчетов [5, рис. 4].

5. ОБСУЖДЕНИЕ ТОРМОЗНОГО И ЦИКЛОТРОННОГО ИЗЛУЧЕНИЙ

В рассматриваемых условиях (3) сила Лоренца превышает силу кулоновского взаимодействия на всей трассе дальних столкновений ($p_h \gg L_u$), а в ближних столкновениях — вдали от иона на характерных расстояниях $r > L_u$ (5). Соответственно мощность спонтанного циклотронного излучения электронов превышает интегральную по частотам мощность тормозного излучения в рассмотренном диапазоне (7).

Следовательно, если оптическая толщина плазменного источника много меньше единицы на всех частотах, то реабсорбция несущественна и частотный спектр наблюдаемого излучения пропорционален спектру спонтанного излучения частиц. Мощность излучения от такого источника в циклотронной линии существенно больше мощности тормозного излучения на рассмотренных частотах (7). Соответственно, если циклотронная линия попадает в полосу частот пропускания приемника, то регистрируемый сигнал определяется циклотронным излучением, а вклад тормозного излучения несуществен.

Напротив, если оптическая толщина источника в циклотронной линии много больше единицы, то спектральная интенсивность излучения в этой линии ограничена реабсорбцией и приближенно равна интенсивности излучения черного тела с температурой, равной температуре электронов. При этом оптическая толщина в континууме может оставаться много меньше единицы, так что спектр наблюдаемого излучения пропорционален рассчитанной спектральной мощности тормозного излучения (25), (26) и (52). Пусть $\Delta\nu_c$ — ширина циклотронной линии, а $\Delta\nu_{rec} \gg \Delta\nu_c$ — более широкая полоса частот пропускания приемника. Если оптическая толщина источника в континууме превышает малую величину $\Delta\nu_c / \Delta\nu_{rec} \ll 1$, то сигнал на выходе приемника определяется широкополосным тормозным излучением, даже если циклотронная линия попадает в полосу частот пропускания приемника.

Таким образом, изменение оптической толщины источника за счет изменения его линейных размеров или концентрации плазмы, в принципе, позволяет реализовать произвольное соотношение между наблюдаемыми уровнями циклотронного и тормозного излучений.

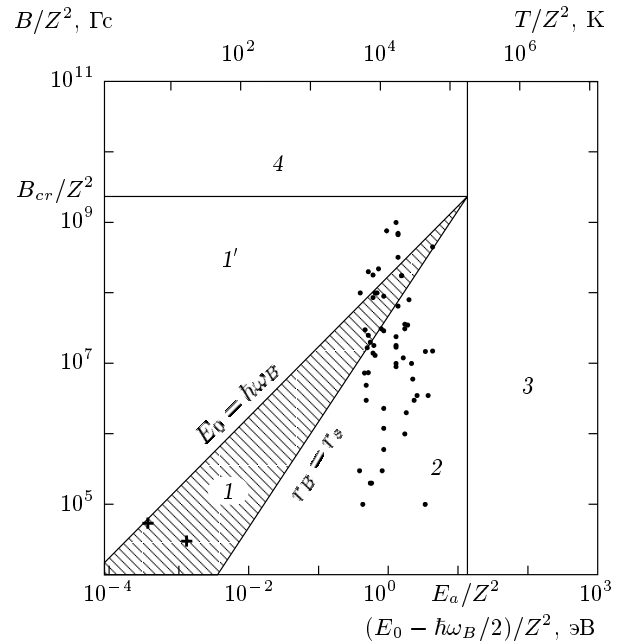
Для «лабораторных» магнитных полей $B \sim \sim 1 \text{ Тл} = 10^4 \text{ Гс}$ рассматриваемое соотношение (3) достигается при температуре $T \ll 80 \text{ К}$. При такой температуре становится существенным фоновое теп-

ловое излучение от элементов экспериментальной установки. Это обстоятельство сильно ограничивает возможность измерения спектра тормозного излучения плазмы. Так, если температуры свободных электронов плазмы и окружающих элементов установки равны, то спектр наблюдаемого излучения может перестать зависеть от наличия или отсутствия плазмы и будет соответствовать спектру излучения черного тела.

В случае одиночных магнитных белых карликов излучающий объем плазмы в виде фотосферы является оптически толстым на всех частотах. При этом температура плазмы увеличивается в глубь фотосферы. Яркостная температура выходящего из фотосферы излучения на некоторой частоте примерно равна температуре среды на той глубине, где оптическая толщина для излучения данной частоты порядка единицы. Выходящее из фотосферы циклотронное излучение формируется на меньшей глубине в плазме с меньшей температурой, чем излучение в континууме. Поэтому циклотронное излучение могло бы наблюдаться только в поглощении на фоне более яркого континуума. Однако дипольное магнитное поле звезды неоднородно: его величина уменьшается в два раза при переходе от полюса звезды к экватору. В результате наблюдаемое излучение от всей звезды на некоторой частоте (вне линий атома водорода) формируется процессами в континууме практически на всей поверхности звезды за исключением узкого интервала широт, где локальная циклотронная частота отличается от частоты наблюдения меньше чем на доплеровскую ширину линии. Таким образом, в случае одиночных магнитных белых карликов наблюдаемое излучение (вне линий атома водорода) преимущественно определяется процессами в континууме (фоторекомбинацией и тормозным излучением), а вклад циклотронного излучения мал.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассчитано тормозное излучение электрона при столкновении с ионами в магнитном поле в условиях, когда ларморовский радиус электрона (1) меньше характерного прицельного параметра (2) ближних столкновений в отсутствие магнитного поля. На рассмотренных частотах (7) ниже электронной циклотронной частоты ω_B диаграмма направленности излучения приближенно соответствует диаграмме излучения диполя, ориентированного вдоль магнитного поля (излучение преимущественно линейно поляризовано в плоскости магнитного поля и направ-



Предельные варианты электрон-ионных столкновений в магнитном поле. Точками обозначены магнитные поля B и тепловые энергии $E_0 - \hbar\omega_B/2 = k_B T$ в фотосферах одиночных магнитных белых карликов [10], крестиками — аналогичные параметры в экспериментах [11, 12] по созданию антиводорода; $E_a = Z^2 e^4 m/2\hbar^2 = 13.6Z^2$ эВ — энергия основного состояния водородоподобного иона в отсутствие магнитного поля, $B_{cr} = Z^2 e^3 m^2 c/\hbar^3 = 2.35 \cdot 10^9 Z^2$ Гс — магнитное поле, в котором энергия основного уровня Ландау $\hbar\omega_B/2$ равна E_a . Рассматриваемое соотношение (3) выполняется в областях 1 и 1' [8, 9]. При этом используемое классическое описание движения электрона применимо лишь в области 1

ления распространения излучения). Спектральная мощность излучения I_{z0} в направлении поперек магнитного поля описывается суммой мощностей излучения (20) и (52) от дальних и ближних столкновений. На низких частотах (23) спектр плоский (25) и по порядку величины совпадает со спектром излучения пучка электронов в отсутствие магнитного поля. На частотах $\omega_s(v_{0\parallel}) \ll \omega \ll \omega_i$ спектральная мощность уменьшается как $\omega^{-2/3}$ (26) и достигает минимума при $\omega \sim \omega_i$ (53). На частотах $\omega_i \ll \omega \ll \omega_B$ спектр излучения обусловлен квазисвязанным движением электрона в ближних столкновениях. Мощность излучения растет как $\omega^{4/3}$ (52) и на частотах порядка ω_B (вне линии) возвращается к характерной мощности излучения в отсутствие магнитного поля.

В расчетах движение электрона полагалось классическим, что справедливо для частиц с энергией $E_0 = mv_0^2/2 > \hbar\omega_B$. На рисунке показана классическая область энергий и магнитных полей 1, где выполняется рассматриваемое соотношение пространственных масштабов (3) и применимы полученные результаты. Вместе с тем в этой области энергия электрона E_0 больше энергии излучаемых квантов света с частотами (7), так что излучение не сопровождается фоторекомбинацией. В классической области 2 более слабых магнитных полей тормозное излучение тепловых частиц может быть рассчитано с помощью закона Кирхгофа по коэффициентам поглощения [21], а в квантовой области 3 энергичных электронов — по результатам работы [17]. В квантовых областях 1' и 4 более сильных магнитных полей требуется дальнейшее исследование тормозного излучения.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 08-02-00163), Совета по грантам Президента Российской Федерации для поддержки молодых российских ученых и ведущих научных школ Российской Федерации (гранты №№ НШ-4485.2008.2, МК-4925.2007.2), а также программы «Происхождение и эволюция звезд и галактик» Президиума РАН.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Железняков, *Излучение в астрофизической плазме*, Янус-К, Москва (1997), § 13.1.
2. В. В. Железняков, С. А. Корягин, А. В. Сербер, *Письма в Астрон. ж.* **25**, 513 (1999).
3. С. А. Корягин, *ЖЭТФ* **117**, 853 (2000).
4. G. Schmidt, E. E. Kunhardt, and J. L. Godino, *Phys. Rev. E* **62**, 7512 (2000).
5. B. Hu, W. Horton, C. Chiu, and T. Petrosky, *Phys. Plasmas* **9**, 1116 (2002).
6. B. Hu, W. Horton, and T. Petrosky, *Phys. Rev. E* **65**, 056212 (2002).
7. C. E. Correa, J. R. Correa, and C. A. Ordóñez, *Phys. Rev. E* **72**, 046406 (2005).
8. С. А. Корягин, *Изв. вузов, радиофизика* **51**, 512 (2008).
9. С. А. Корягин, *Изв. вузов, радиофизика* **51**, 682 (2008).
10. D. T. Wickramasinghe and L. Ferrario, *Publ. Astron. Soc. Pacific* **112**, 873 (2000).
11. M. Amoretti, C. Amsler, G. Bonomi et al., *Nature* **419**, 456 (2002).
12. G. Gabrielse, N. S. Bowden, P. Oxley et al., *Phys. Rev. Lett.* **89**, 213401 (2002).
13. B. R. Beck, J. Fajans, and J. H. Malmberg, *Phys. Rev. Lett.* **68**, 317 (1992).
14. C. Thompson and R. C. Duncan, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **275**, 255 (1995).
15. Дж. Бекефи, *Радиационные процессы в плазме*, Мир, Москва (1971).
16. Ю. Н. Гнедин, Г. Г. Павлов, *ЖЭТФ* **65**, 1806 (1973).
17. Г. Г. Павлов, А. Н. Панов, *ЖЭТФ* **71**, 572 (1976).
18. А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев, *Интегралы и ряды. Элементарные функции*, Наука, Москва (1981).
19. А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев, *Интегралы и ряды. Специальные функции*, Наука, Москва (1983).
20. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория поля*, Физматлит, Москва (2003).
21. В. П. Силин, *Введение в кинетическую теорию газов*, Наука, Москва (1971), гл. 10.