

УНИФИЦИРОВАННЫЙ МЕТОД СТАТИСТИЧЕСКОГО ВОССТАНОВЛЕНИЯ КВАНТОВЫХ СОСТОЯНИЙ, ОСНОВАННЫЙ НА ПРОЦЕДУРЕ ОЧИЩЕНИЯ

Ю. И. Богданов*

Физико-технологический институт Российской академии наук
117218, Москва, Россия

Поступила в редакцию 17 ноября 2008 г.

На основе процедуры дополнения смешанного состояния до чистого сформулирован общий метод статистического восстановления матрицы плотности для произвольных квантовых состояний. Получено универсальное статистическое распределение, описывающее точность восстановления квантовых состояний. Предложенная теория подтверждается результатами численного статистического моделирования.

PACS: 03.65.Wj, 42.50.Dv

1. ВВЕДЕНИЕ

Квантовые информационные технологии основаны на использовании квантовых состояний для осуществления принципиально новых методов передачи сообщений и вычислений [1–3]. Инструментом контроля служит метод статистического восстановления квантовых состояний, основанный на данных квантовых измерений. Теория квантовых измерений базируется на проекционных измерениях фон Неймана [4] и их обобщениях [5]. Физические аспекты квантовых измерений изложены в работах [6–8].

В последние годы различными исследовательскими группами было выполнено значительное количество успешных экспериментальных работ в области измерения оптических квантовых состояний (см., например, [9–15]). Обзор работ в рассматриваемой области содержится в статье [16].

Настоящая работа направлена на обобщение и углубление результатов, полученных в работах [10, 11, 17, 18]. В указанных работах на основе метода максимального правдоподобия были разработаны эффективные алгоритмы и процедуры восстановления вектора состояния квантовой системы. Была развита теория статистических флуктуаций оценки вектора состояния квантовой системы и получен конструктивный критерий χ^2 для оценки возмож-

ного уровня статистических флуктуаций. Однако существенной ограниченностью развивавшегося до сих пор подхода было то, что он применялся, в основном, к чистым квантовым состояниям. Целью настоящей работы является рассмотрение смешанных состояний самого общего вида. Алгоритмически мы исходим из процедуры дополнения смешанного квантового состояния до чистого. В результате оказывается, что для матрицы плотности, очищенной до вектора состояния, могут быть в полной мере применены разработанные ранее процедуры восстановления квантового состояния и учета статистических флуктуаций.

Рассматриваемый подход представляется весьма важным с теоретической точки зрения, поскольку задача оценки смешанных состояний считается трудной [5]. Использование метода очищения смеси и математического аппарата полной матрицы информации Фишера позволяют явно разделить статистические флуктуации на два класса: физически существенные и «несущественные». Последние связаны с произволом в выборе фаз компонент смеси, неоднозначностью разделения смеси на чистые компоненты, а также с флуктуацией нормы состояния. Использование специального оператора проектирования позволяет очистить квантовое состояние от «несущественных» флуктуаций. Это важно с вычислительной точки зрения, поскольку алгоритм и численная процедура реконструкции квантового со-

*E-mail: bogdanov@ftian.ru

стояния теперь становятся хорошо обусловленными. Заметим, что при других (неоптимальных) способах параметризации смешанного состояния наличие примеси «несущественных» флуктуаций создаст в задачах высокой размерности неконтролируемые ошибки, делающие всю вычислительную процедуру некорректной. Контроль статистических флуктуаций, развитый в настоящей работе, впервые позволил сформулировать в общем виде универсальные характеристики точности, которые могут быть достигнуты в процедурах статистического восстановления квантовых состояний при наличии ограниченного объема результатов измерений. Основным полученным результатом такого рода является формулировка универсального многопараметрического распределения вероятностей для описания точности статистического восстановления квантовых состояний.

Работа имеет следующую структуру. В разд. 2 описана процедура дополнения смешанного состояния до чистого посредством увеличения размерности рассматриваемого гильбертова пространства. Сформулирован метод статистического восстановления произвольных квантовых состояний (от чистых, представленных одной компонентой, до смеси максимально возможного числа компонент). В разд. 3 представлена общая теория статистических флуктуаций восстанавливаемого квантового состояния. Получено универсальное статистическое распределение, описывающее точность статистического восстановления квантовых состояний, которая может быть достигнута при заданном объеме статистического материала. В разд. 4 описываются некоторые результаты численного статистического моделирования. В разд. 5 сформулированы основные выводы.

2. ПРОЦЕДУРА ОЧИЩЕНИЯ И АЛГОРИТМ СТАТИСТИЧЕСКОГО ВОССТАНОВЛЕНИЯ КВАНТОВЫХ СОСТОЯНИЙ

Теория восстановления смешанных квантовых состояний может быть построена в полной аналогии с теорией восстановления чистых состояний, если воспользоваться известной процедурой дополнения смешанного состояния до чистого [2].

Пусть ρ — матрица плотности смеси в исходном гильбертовом пространстве $H^{(s)}$ размерности s . Будем говорить, что смешанное состояние имеет ранг r , если матрица плотности имеет r ненулевых собственных значений. Очевидно, что $1 \leq r \leq s$. Случай $r = 1$ отвечает чистому состоянию, а случай

$r = s$ — смеси полного ранга. Пусть p_j — ненулевые собственные значения матрицы плотности, а c_j — соответствующие собственные векторы, $j = 1, \dots, r$.

Процедура «очищения» смешанного состояния ранга r связана с переходом от исходного гильбертова пространства $H^{(s)}$ размерности s к гильбертову пространству $H^{(rs)}$ размерности rs . Вместо исходной матрицы плотности ρ можно рассматривать «очищенный» вектор состояния длины rs :

$$|c\rangle = \begin{pmatrix} \sqrt{p_1} c_1 \\ \vdots \\ \sqrt{p_r} c_r \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Указанное состояние, очевидно, можно представить в виде разложения Шмидта [1, 2] квантового состояния изучаемой системы, запутанного с окружением:

$$|c\rangle = \sum_{j=1}^r \sqrt{p_j} |e^j\rangle |c_j\rangle, \quad (2)$$

где $|e^j\rangle$ — ортонормированные базисные состояния окружения (столбцы длины r). Для смеси ранга r выберем базис в виде

$$|e^1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |e^2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \quad (3)$$

$$|e^r\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Набор векторов (3) может быть назван стандартным базисом окружения.

Известно, что эксперименты по статистическому восстановлению квантовых состояний сводятся к изучению совокупности взаимно дополнительных квантовых процессов [10, 11, 17–19]. Каждому такому процессу соответствует одна строка протокола измерения. Пусть протокол состоит из m строк. Амплитуда отдельного квантового процесса может быть представлена в виде

$$M_j = X_j c, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (4)$$

Если состояние чистое, т. е. является смесью ранга $r = 1$, то c — комплексный вектор состояния в исходном гильбертовом пространстве $H^{(s)}$. В этом случае



Рис. 1. Общая схема эксперимента по измерению квантового состояния

X_j — строка комплексной аппаратной матрицы длины s .

Обобщим величины, входящие в выражение (4), на случай произвольных смешанных состояний. В этом случае c — «очищенный» вектор состояния (2) длины rs в гильбертовом пространстве $H^{(rs)}$. Пусть X_j есть j -я строка аппаратной матрицы длины s . Путем добавления нулевых элементов создадим r строк длины rs на основе строки X_j и базисных векторов окружения (3):

$$X_j^l = |e^l\rangle^+ \otimes X_j, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad l = 1, 2, \dots, r. \quad (5)$$

Каждая строка X_j^l действует только на «свою» l -ю компоненту смеси. При этом X_j^1 содержит строку X_j в качестве своих первых s элементов (остальные нули), X_j^2 содержит строку X_j в элементах с $s + 1$ до $2s$ (остальные нули) и т. д.

Амплитуда квантового процесса M_j в формуле (4) есть комплексное число. На ее основе строится наблюдаемая величина — интенсивность генерации событий (ожидаемое число событий в схеме регистрации в единицу времени):

$$\lambda_j = M_j^+ M_j = \langle c | \Lambda_j | c \rangle. \quad (6)$$

Здесь Λ_j — оператор интенсивности процесса.

Для чистого состояния Λ_j — эрмитова матрица размерности $s \times s$:

$$\Lambda_j = X_j^+ X_j. \quad (7)$$

Оператор интенсивности (7) непосредственно обобщается на состояние смеси путем суммирования по ее компонентам:

$$\Lambda_j = \sum_{l=1}^r X_j^{l+} X_j^l. \quad (8)$$

Для смешанных состояний ранга r оператор Λ_j представляется эрмитовой матрицей размерности $rs \times rs$.

Общая схема эксперимента по измерению квантового состояния представлена на рис. 1. Блок приготовления задает источник, генерирующий предстителей квантового статистического ансамбля. Блок селектирования обеспечивает выделение заданной проекции квантового состояния в соответствии с условием (4). Рассматриваемая функция реализуется посредством блока установки, который задает физические параметры измерения, а также время, в течение которого проводится измерение (время экспозиции). Наконец, блок регистрации обеспечивает необратимую регистрацию событий, возникающих в системе, причем число событий в единицу времени (частота событий) определяется формулой (6). Примеры конкретных протоколов измерения представлены в разд. 4.

Если время экспозиции j -й строки протокола равно t_j , то регистрируемое в эксперименте число событий k_j есть случайная величина, имеющая распределение Пуассона со средним $\lambda_j t_j$:

$$P(k_j) = \frac{(\lambda_j t_j)^{k_j}}{k_j!} \exp(-\lambda_j t_j). \quad (9)$$

Экспериментатор, осуществляя квантовый протокол измерений из m строк, последовательно регистрирует m значений частот событий k_j , $j = 1, \dots, m$. Здесь каждому j соответствует конкретный набор параметров измерения, задающий селектирование определенной проекции квантового состояния. Задача статистического восстановления квантового состояния состоит в том, чтобы по имеющимся экспериментальным данным восстановить в некотором смысле наилучшим образом квантовое состояние. Одним из наиболее важных способов такого рода является метод максимального правдоподобия Фишера [20, 21].

Наша задача состоит в том, чтобы найти такой «очищенный» вектор состояния c вида (2), который обеспечивал бы максимум для функции правдоподобия, которая в нашем случае задается произведением пуассоновских вероятностей по всем строкам протокола:

$$L = \prod_{j=1}^m \frac{(\lambda_j t_j)^{k_j}}{k_j!} \exp(-\lambda_j t_j). \quad (10)$$

Необходимое условие экстремума функции (10) приводит к уравнению правдоподобия [10, 11, 17, 18]:

$$Ic = Jc. \quad (11)$$

Здесь I и J — так называемые теоретическая и эмпирическая эрмитовы матрицы информации Фишера (размерности $rs \times rs$):

$$I = \sum_{j=1}^m t_j \Lambda_j, \quad J = \sum_{j=1}^m \frac{k_j}{\lambda_j} \Lambda_j. \quad (12)$$

Исследования, проведенные ранее в работах [10, 11, 17, 18], описывают частный случай, который формально соответствует модели первого ранга ($r = 1$).

Условие нормировки, автоматически содержащееся в уравнении правдоподобия (11), имеет вид

$$\sum_{j=1}^m \lambda_j t_j = \sum_{j=1}^m k_j = n, \quad (13)$$

где n — общее число зарегистрированных событий.

Условие (13) связывает полное число наблюдаемых событий n с суммарным (по всем строкам протокола) их ожидаемым числом. В нашем подходе рассматриваемое условие заменяет обычно применяемое условие нормировки на единицу:

$$\langle c|c \rangle = 1. \quad (14)$$

Различные строки протокола квантовых измерений соответствуют измерениям различных проекций квантового состояния. Важным свойством протокола измерения является его полнота.

Каждой строке X_j ($j = 1, \dots, m$) длины s сопоставим строку длины s^2 , которая является тензорным произведением ($X_j \otimes X_j^*$) строки X_j и комплексно-сопряженной строки X_j^* . Составим из таких строк матрицу B размерности $m \times s^2$. Будем предполагать, что $m \geq s^2$.

Протокол является полным, если все s^2 сингулярных значений матрицы B строго положительны: $\text{svd}(B) > 0$ (нет нулевых сингулярных значений); svd — singular value decomposition. Такой протокол при достаточно высоком объеме выборки в каждой строке может обеспечить, в принципе, сколь угодно точное восстановление произвольного состояния (от чистого до смешанного состояния полного ранга). Ниже будем предполагать условие полноты выполненным.

«Очищенный» вектор состояния c , полученный методом максимального правдоподобия, отличается от точного «очищенного» вектора состояния c_0 . Таким образом, мы сталкиваемся с проблемой оценки точности статистического восстановления квантовых состояний.

3. ТОЧНОСТЬ ВОССТАНОВЛЕНИЯ КВАНТОВЫХ СОСТОЯНИЙ

Вещественное евклидово пространство удвоенной размерности $E^{(2rs)}$ удобно для того, чтобы опи-

сать характеристики точности восстановления состояний.

Переход от комплексного вектора состояния к действительному вектору удвоенной длины осуществляется по правилу

$$c \rightarrow \begin{pmatrix} \text{Re } c \\ \text{Im } c \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Теперь вектор состояния c — столбец действительных чисел длины $2rs$. Аналогичным образом задается преобразование амплитуды:

$$M \rightarrow \begin{pmatrix} \text{Re } M \\ \text{Im } M \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Теперь M не комплексное число, а столбец из двух действительных чисел.

Каждую, вообще говоря комплексную, строку X_j^l длины rs , в свою очередь, превратим в действительную матрицу, состоящую из двух действительных строк длины $2rs$, согласно правилу

$$X_j^l \rightarrow \begin{bmatrix} \text{Re } X_j^l & -\text{Im } X_j^l \\ \text{Im } X_j^l & \text{Re } X_j^l \end{bmatrix}. \quad (17)$$

Заметим, что мы не меняем обозначения при переходе от одного пространства к другому, что приводит к удобной унификации формул. Действительно, все представленные выше формулы (4)–(8), (11), (12), относящиеся к исходному гильбертовому пространству $H^{(rs)}$ размерности rs , остаются без изменений и в новом действительном евклидовом пространстве $E^{(2rs)}$ удвоенной размерности $2rs$.

Реконструированный вектор состояния, являющийся решением уравнения правдоподобия (11), основан на конечной случайной статистике регистрируемых событий и, таким образом, сам является случайной многопараметрической величиной. Отличие реконструированного вектора состояния от точного можно характеризовать как проявление статистических флуктуаций, связанных с фундаментальной вероятностной природой квантовых явлений. Инструмент для количественного описания уровня таких флуктуаций дает матрица полной информации, введенная в работах [11, 17, 18]. В обозначениях, использованных выше, она имеет вид

$$H = 2 \sum_j \frac{t_j (\Lambda_j c) (\Lambda_j c)^+}{\lambda_j}. \quad (18)$$

Матрица H есть действительная симметричная матрица размерности $2rs \times 2rs$.

Пусть dc — разность между точным и восстановленным методом максимального правдоподобия векторами состояния (в действительном евклидовом пространстве удвоенной размерности). Тогда уровень статистических флуктуаций можно описать посредством χ^2 -распределения [11, 17, 18]:

$$2\langle dc|H|dc\rangle = \chi^2(\nu_H), \quad (19)$$

где $\nu_H = (2s - r)r$.

В частном случае чистого состояния имеем $\nu_H = 2s - 1$, в то время как для смеси полного ранга $\nu_H = s^2$.

Кроме того, имеет место следующее равенство, играющее в нашем рассмотрении роль условия нормировки:

$$\langle c|H|c\rangle = 2n, \quad (20)$$

где n — полный ожидаемый объем выборки (по всем строкам протокола).

Равенство (19) показывает, что стоящий слева матричный элемент, есть случайная величина, имеющая χ^2 -распределение с ν_H степенями свободы. Полученный результат является непосредственным обобщением на случай смешанных состояний результата, полученного в работах [11, 17, 18] для чистых состояний.

Если протокол квантовых измерений полный, то для матрицы информации H из $2rs$ собственных значений ν_H строго положительны, а остальные r^2 точно равны нулю.

На основе введенной полной матрицы информации H может быть сформулировано универсальное статистическое распределение для описания точности статистического восстановления квантовых состояний. Алгоритм нахождения параметров искомого распределения удобно сформулировать на языке сингулярного разложения матриц (svd). Действительно, пусть svd-разложение матрицы информации (размерности $2rs \times 2rs$) есть

$$H = U_H S_H V_H^+. \quad (21)$$

Здесь U_H и V_H — унитарные матрицы, а S_H — диагональная неотрицательно определенная матрица.

Все r^2 столбцов матрицы U_H , отвечающие нулевым собственным значениям, объединим в матрицу Q_1 . Объединим матрицу Q_1 с действительным вектором состояния c из евклидова пространства (15) в единую матрицу G . Пусть матрица Q задает ортонормированный базис для матрицы G . Это означает, что $Q^+Q = E$, где E — единичная матрица размерности $(r^2 + 1) \times (r^2 + 1)$. Столбцы матрицы Q покрывают то же самое пространство, что и столбцы

матрицы G , причем число базисных векторов (число столбцов матрицы Q) равно рангу матрицы G .

Определим теперь проекционный оператор (проектор) формулой

$$P = E - QQ^+, \quad (22)$$

где E — единичная матрица размерности $2rs \times 2rs$.

У чистого состояния имеется всего один ненаблюдаемый параметр — глобальная фаза состояния (отсюда следует калибровочная инвариантность [11, 17, 18]), у состояния смеси таких параметров значительно больше. Заметим, что число действительных параметров, которыми описывается «очищенный» вектор состояния полного ранга ($r = s$), равно $2s^2$. Но только половина из них оказываются наблюдаемыми. Остальные параметры относятся к разряду ненаблюдаемых. Прежде всего, калибровочных фаз теперь не одна, а s (по числу компонент в смеси). Кроме того, можно показать, что имеются еще $s(s - 1)$ параметров, связанных с неоднозначностью разделения смеси на чистые компоненты. Рассматриваемое обстоятельство не таит в себе каких-либо трудностей. «Очищенный» вектор состояния определен с точностью до многопараметрического произведения, однако это никак не влияет на искомую матрицу плотности восстанавливаемого квантового состояния, которая является инвариантом, не зависящим от указанного произведения.

Заметим, что в нашем подходе норма состояния имеет вполне определенный физический смысл. Квадрату нормы пропорционально полное по всем строкам ожидаемое число событий и, таким образом, квадрат нормы может характеризовать интенсивность изучаемого физического взаимодействия (например, интенсивность рождения бифотонов в процессе спонтанного параметрического рассеяния света в нелинейном кристалле). Если нас, однако, интересует статистическое распределение рассматриваемого ниже параметра согласия F между неизвестным квантовым состоянием и его реконструкцией, то оказывается, что рассматриваемая величина никак не зависит от нормы вектора состояния и в этом смысле флуктуации нормы становятся несущественными.

Введенный проектор (22) сконструирован так, чтобы уничтожить ненаблюдаемые «нефизические» флуктуации, отвечающие нулевым собственным значениям матрицы информации H , а также несущественную флуктуацию нормы. Тем самым обеспечивается редукция (сокращение) расстояния между

восстановленным и теоретическим векторами состояния:

$$dc' = P dc. \quad (23)$$

Здесь dc' — вектор флуктуации состояния после редукции. Естественно ввести следующую величину, которую можно назвать «евклидовыми» потерями точности:

$$dF = 1 - F = \frac{\langle dc'|dc' \rangle}{\langle c|c \rangle} = \frac{\langle dc|P|dc \rangle}{\langle c|c \rangle}. \quad (24)$$

Замечательно, что характеристика точности dF совпадает с величиной $1 - F$, где F — так называемая степень согласия (fidelity) между неизвестным квантовым состоянием и его реконструкцией. Для смешанных состояний рассматриваемая величина дается формулой Ульмана [2, 22]:

$$F = \left(\text{Tr} \sqrt{\rho_0^{1/2} \rho \rho_0^{1/2}} \right)^2, \quad (25)$$

где ρ_0 и ρ — соответственно теоретическая и восстановленная матрицы плотности.

В частном случае чистых нормированных на единицу состояний рассматриваемая характеристика определяется формулой

$$F = |\langle c_0|c \rangle|^2, \quad (26)$$

где c_0 и c — теоретический и восстановленный векторы состояния.

Естественность характеристики (25) связана с важной теоремой Ульмана [2, 22]. Согласно этой теореме, выражение (25) задает достижимый максимум выражения (26) для всех возможных чистых векторов состояний c_0 и c , до которых могут быть дополнены смешанные состояния ρ_0 и ρ . Можно констатировать, что наш подход соответствует явному построению состояний, о которых говорится в теореме Ульмана.

Степень согласия имеет простую вероятностную интерпретацию. Если в качестве измерительного базиса для неизвестного состояния c_0 выбрать известный реконструированный вектор состояния c и ортогональное дополнение к нему, то F будет задавать вероятность совпадения неизвестного состояния с восстановленным (квантовая система, приготовленная в состоянии c_0 будет обнаружена при измерении в состоянии c с вероятностью F).

Рассмотрим теперь svd-разложение для проекционной матрицы:

$$P = U_P S_P V_P^\dagger. \quad (27)$$

Здесь U_P и V_P — унитарные матрицы, а S_P — диагональная неотрицательно определенная матрица. В соответствии с определением (22) для матрицы P из $2rs$ собственных значений $r^2 + 1$ равны нулю, а остальные $(2s - r)r - 1$ равны единице.

Учтем, что ранг матрицы H равен $\nu_H = (2s - r)r$, а ранг матрицы P на единицу меньше, $\nu_P = (2s - r)r - 1$. В соответствии с рангом матриц проведем некоторое сокращение их размеров. Диагональная матрица S_H после ее сокращения до размеров $\nu_H \times \nu_H$ перестанет быть особенной (будет существовать обратная матрица S_H^{-1}). Оставим в матрице U_H только первые ν_H столбцов, удалив остальные. Аналогично оставим в матрице U_P только первые ν_P столбцов. Введем матрицу размерности $\nu_P \times \nu_H$:

$$L = \frac{1}{\sqrt{2}} U_P^\dagger U_H \sqrt{S_H^{-1}}. \quad (28)$$

Пусть D_L — столбец сингулярных значений матрицы L (длины ν_P). Введем некоторый вектор d , такой что

$$d = \frac{D_L^2}{\langle c|c \rangle}. \quad (29)$$

Рассматриваемый вектор определяет искомое распределение точности. Потеря точности $1 - F$ оказывается случайной величиной, асимптотическое распределение которой можно представить в виде

$$1 - F = \sum_{j=1}^{j_{max}} d_j \xi_j^2, \quad (30)$$

где $d_j \geq 0$ — неотрицательные коэффициенты, $\xi_j \sim N(0, 1)$, $j = 1, \dots, j_{max}$ — независимые нормально распределенные случайные величины с нулевым средним и единичной дисперсией, $j_{max} = \nu_P = (2s - r)r - 1$. В частности, $j_{max} = 2s - 2$ для чистых состояний и $j_{max} = s^2 - 1$ для смешанных состояний полного ранга.

Рассматриваемое распределение является естественным обобщением χ^2 -распределения. Последнее соответствует частному случаю $d_1 = d_2 = \dots = d_{j_{max}} = 1$. Полученное распределение естественно назвать неоднородным χ^2 -распределением. В рассматриваемом нами асимптотическом пределе параметры d_j оказываются обратно пропорциональными общему числу зарегистрированных событий n , т. е. $d_j \propto 1/n$. Указанная зависимость позволяет легко осуществлять перерасчет от одного объема выборки к другому.

Из формулы (30) следует, что среднее значение потери точности равно

$$\langle 1 - F \rangle = \sum_{j=1}^{j_{max}} d_j. \quad (31)$$

Нетрудно показать также, что дисперсия для потери точности равна

$$\sigma_F^2 = 2 \sum_{j=1}^{j_{max}} d_j^2. \quad (32)$$

Рассмотрим важный частный случай. Пусть матрица I (12), равная сумме по всем строкам протокола произведений времен экспозиции t_j на операторы интенсивности Λ_j , пропорциональна единичной матрице E :

$$I = \sum_j t_j \Lambda_j = \text{const} \cdot E. \quad (33)$$

Протокол, удовлетворяющий условию (33), сводится к так называемому неортогональному разложению единицы [5]. Заметим, что в математической теории такие измерения рассматриваются в качестве наиболее общего расширения традиционных измерений фон Неймана, основанных на ортогональном разложении единицы. В то же время, реальные экспериментальные протоколы квантовых измерений зачастую не удовлетворяют условию (33). Резонность требования (33) основана на соображениях, связанных с сохранением полной вероятности. В реальных же экспериментах с использованием схемы регистрации событий (рис. 1), экспериментатор настраивает установку на выделение, как правило, только одной проекции квантового состояния (при этом представители, отвечающие всем остальным проекциям, просто не регистрируются). Таким образом, реальные эксперименты (по техническим причинам) не обеспечивают регистрацию всех представителей квантового статистического ансамбля и, в силу этого, не связаны условием сохранения полной вероятности.

Наш подход разработан для анализа произвольных реальных протоколов квантовых измерений, основанных на регистрации элементарных событий, и не ограничен требованием (33). Если, однако, рассматриваемое условие выполняется, то анализ протокола упрощается. Легко видеть, что в этом случае действительный евклидов вектор состояния удвоенной размерности (15) становится собственным вектором матрицы информации H . Этот вектор отвечает за флуктуацию нормы состояния, которая несущественна для распределения параметра согласия F .

В рассматриваемом случае формула (28) приобретает наиболее простой вид:

$$L = \sqrt{\frac{S_H^{-1}}{2}}. \quad (34)$$

Здесь диагональная матрица S_H сокращена до размера $(\nu_H - 1) \times (\nu_H - 1)$ путем удаления не только всех нулевых собственных значений, но и собственного значения, отвечающего действительному вектору состояния (15) удвоенной размерности.

Важная особенность статистического восстановления квантовых состояний заключается в том, что при оценке неизвестного квантового состояния ранг модели r , вообще говоря, не может быть зафиксирован заранее, а должен быть определен по самим экспериментальным данным. Рассматриваемой цели служит алгоритм проверки адекватности для модели смешанного состояния ранга r . Пусть k_j — число событий, зарегистрированных схемой регистрации событий для j -й строки протокола ($j = 1, \dots, m$). Для оценки адекватности модели рассмотрим следующую величину:

$$\chi_r^2 = \sum_{j=1}^m \frac{(k_j - \lambda_j t_j)^2}{\lambda_j t_j}. \quad (35)$$

Здесь λ_j — интенсивности генерации событий, полученные в результате решения уравнения правдоподобия. Если модель смешанного состояния ранга r адекватна, то, согласно классическому результату Фишера [20], рассматриваемая характеристика должна иметь χ^2 -распределение с числом степеней свободы равным

$$\nu = m - \nu_P - 1 = m - (2s - r)r.$$

Здесь, согласно изложенному выше, ν_P определяет число параметров состояния, оцениваемых по экспериментальным данным методом максимального правдоподобия. Заметим, что численное моделирование подтверждает справедливость рассматриваемого здесь критерия.

Подбор адекватного ранга r может, например, происходить следующим образом. Начинаем с модели чистого состояния ($r = 1$). Если, согласно критерию (35), рассматриваемая модель оказывается неадекватной, переходим к более сложной модели ($r = 2$) и т. д., пока модель не станет адекватной. Выбор модели с наименьшим возможным числом компонент означает, что компоненты более высокого порядка, даже если они существуют, не имеют статистически значимого веса при заданном объеме экспериментальных данных.

Если неадекватной оказывается модель самого высокого ранга ($r = s$), то это означает наличие систематических инструментальных ошибок в установках параметров и данных. Заметим, однако, что когда объем статистики становится достаточно большим, инструментальные погрешности неизбежно начинают превалировать над статистическими флуктуациями. В результате, в реальных экспериментах, асимптотически при неограниченном увеличении объема выборки, потери точности не стремятся к нулю, как в идеальной модели, а демонстрируют хотя бы и малые, но конечные значения. Эти «остаточные» потери точности характеризуют качество экспериментов по статистическому восстановлению квантовых состояний [11].

4. ПРИМЕРЫ ЧИСЛЕННОГО СТАТИСТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Развитая выше теория позволяет анализировать произвольные протоколы статистического восстановления квантовых состояний для экспериментов, основанных на использовании системы регистрации элементарных событий. Подробные описания различных протоколов такого рода можно найти в работах [9–15].

В качестве примера проанализируем два различных протокола. Первый из них (Протокол 1) предложен в известной работе [9] и предназначен для измерения двухкубитовых квантовых состояний, образованных поляризационными степенями свободы коррелирующих пар фотонов (бифотонов), возникающих в процессе спонтанного параметрического рассеяния света. Рассматриваемый протокол является очень простым и эффективным с экспериментальной точки зрения. Такой и аналогичные протоколы используются многими авторами. В нашем формализме Протокол 1 может быть представлен аппаратной матрицей, имеющей 16 строк X_j ($j = 1, \dots, 16$). Время экспозиции каждой строки предполагается одинаковым.

В обозначениях авторов работы [9] базисные состояния кубита представлены горизонтально и вертикально поляризованными фотонами, соответственно

$$|H\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |V\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Кроме того, рассматриваются следующие состояния:

$$|D\rangle = \frac{|H\rangle + |V\rangle}{\sqrt{2}}, \quad |L\rangle = \frac{|H\rangle + i|V\rangle}{\sqrt{2}},$$

$$|R\rangle = \frac{|H\rangle - i|V\rangle}{\sqrt{2}}.$$

Протокол восстановления квантового состояния бифотонного поля определяется измерением следующих 16 двухфотонных проекций:

$$|HH\rangle, |HV\rangle, |VV\rangle, |VH\rangle, |RH\rangle, |RV\rangle, |DV\rangle, |DH\rangle, \\ |DR\rangle, |DD\rangle, |RD\rangle, |HD\rangle, |VD\rangle, |VL\rangle, |HL\rangle, |RL\rangle.$$

Все шестнадцать сингулярных значений матрицы B , характеризующей полноту рассматриваемого протокола, положительны (в этом случае говорят, что матрица хорошо обусловлена). Таким образом, рассматриваемый протокол обладает свойством полноты и может быть использован для восстановления произвольной матрицы плотности. Формально задача считается плохо обусловленной, когда одно или несколько сингулярных значений равны нулю. Однако в реальных задачах трудности восстановления квантового состояния возникают и в тех случаях, когда некоторые из сингулярных значений хотя и отличны от нуля, но малы. Качественной характеристикой может служить число обусловленности, равное отношению максимального сингулярного значения к минимальному. По нашим оценкам, если число обусловленности превышает величину порядка 10^4 – 10^5 , то соответствующий протокол будет давать заведомо низкую точность восстановления квантового состояния (поскольку потребуется очень высокий объем однородного статистического материала, который весьма трудно обеспечить в реальных современных экспериментах). Для рассматриваемого протокола число обусловленности составляет $\text{cond}(B) = 9.749$, что говорит о его довольно хорошей обусловленности. Протокол имеет минимальное число строк, необходимых для полноты. Такая экономность, однако, может иметь и отрицательные стороны, поскольку отсутствие избыточности не позволяет проверить адекватность протокола. Наличие избыточности полезно с точки зрения тестирования протокола на предмет его внутренней согласованности и отсутствия грубых ошибок в установках параметров и данных. Тестирование рассматриваемого протокола с помощью критерия (35) для $m = 16$, $r = s = 4$ показывает, что число степеней свободы равно нулю ($\nu = m - (2s - r)r = 0$), что, собственно, формально и означает невозможность проверки адекватности для модели смеси полного ранга. Наконец, рассматриваемый протокол, как и большинство других протоколов, используемых в экспериментах, не удовлетворяет условию (33) и поэтому не сводится к разложению единицы.

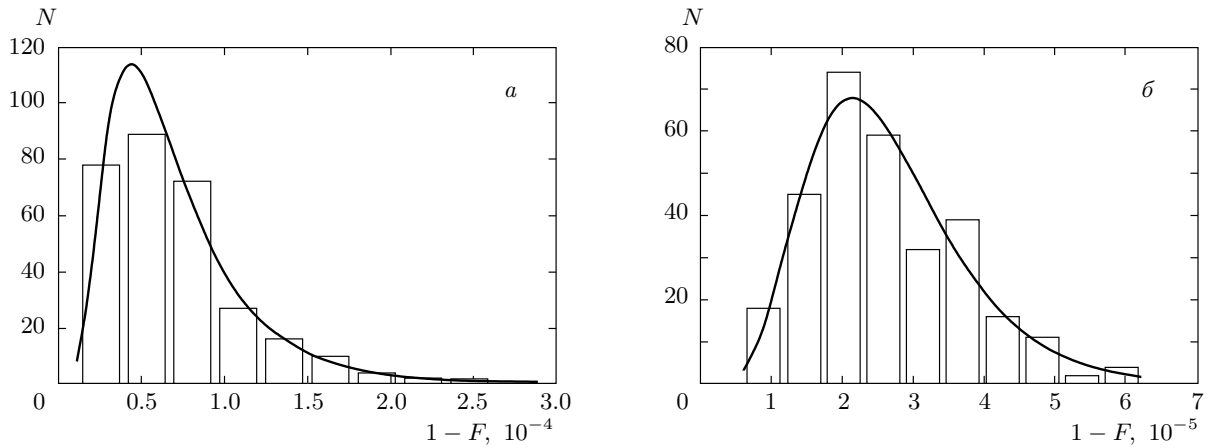


Рис. 2. Сравнение теории статистического восстановления квантовых состояний (кривые) с результатами численного моделирования (гистограммы); Протокол 1 (а), Протокол 2 (б)

Второй рассматриваемый нами протокол, который мы обозначим как Протокол 2, напротив, удовлетворяет условию (33) и сводится, таким образом, к неортогональному разложению единицы. Для описания протокола удобно представить, что имеется двухкубитовое состояние, образованное двумя удаленными друг от друга частицами со спином $1/2$. Измерения проводятся двумя экспериментаторами (Алисой и Бобом), причем каждый измеряет свою частицу. Пусть a_1, a_2, a_3 — три взаимно ортогональные оси, на которые проводит измерения Алиса, $a_1 = (1, 0, 0)$, $a_2 = (0, 1, 0)$, $a_3 = (0, 0, 1)$, а b_1, b_2, b_3 — три взаимно ортогональные оси, на которые проводит измерения Боб, $b_1 = (-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2, 0)$, $b_2 = (-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 0)$, $b_3 = (0, 0, 1)$. Четыре направления a_1, a_2, b_1, b_2 задают классическую схему измерений, демонстрирующую нарушение неравенства Белла при измерении синглетного состояния [2, 5, 23]. Направление $a_3 = b_3$ добавлено для того, чтобы протокол стал полным с точки зрения задачи статистического восстановления квантовых состояний [23]. Рассматриваемый протокол может быть назван расширенным протоколом Белла. Он образован 36 строками (9 распределений по 4 значения в каждом, каждое распределение возникает при измерении пар направлений a_j, b_j , где $i, j = 1, 2, 3$). Как и для первого протокола, предположим, что время экспозиции всех строк одинаково. Рассматриваемый протокол характеризуется $\text{cond}(B) = 3$, т. е. обладает еще лучшей обусловленностью, чем первый протокол. В то же время Протокол 2 имеет большее число строк по сравнению с Протоколом 1 (36

против 16). Наличие избыточности позволяет применить к Протоколу 2 критерий адекватности (35): при $m = 36$ для смеси полного ранга ($r = s = 4$) число степеней свободы равно 20 ($\nu = m - (2s - r)r = 20$).

Рассмотрим в качестве примера восстановление следующей смеси (указаны состояния и их весовые проценты): синглетное состояние $(|01\rangle - |10\rangle)/\sqrt{2} - 40\%$ и три состояния, образующие триплет, $(|01\rangle + |10\rangle)/\sqrt{2} - 30\%$, $|00\rangle - 20\%$, $|11\rangle - 10\%$.

Результаты численного статистического моделирования, направленные на проверку правильности универсального закона распределения точности (30), представлены на рис. 2. Для каждого из протоколов было выполнено по 300 численных экспериментов, в каждом эксперименте суммарный по всем строкам протокола объем статистики составлял $n = 10^6$. Представленные на рис. 2 данные численного эксперимента (гистограммы) и теоретический расчет (кривые) хорошо согласуются между собой. Статистический критерий χ^2 показывает, что имеется согласие с критическим уровнем значимости $\alpha_c = 0.6327$ для рис. 2а и $\alpha_c = 0.2039$ для рис. 2б.

Представленные результаты показывают, что оба протокола способны восстанавливать квантовые состояния с высокой точностью. В то же время, Протокол 2 обладает более высокой точностью, хотя и несколько сложнее в реализации. Сравнение точности протоколов представлено на рис. 3. Кривая плотности распределения потерь точности для Протокола 2 является более острой по сравнению с кривой для Протокола 1 и сосредоточена в области более низких потерь. В среднем потери точности для Про-

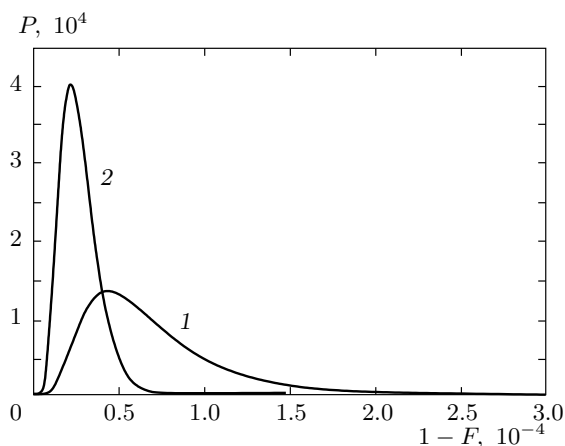


Рис. 3. Распределение потери точности: Протокол 1 (кривая 1), Протокол 2 (кривая 2)

токола 2 в 2.63 раза меньше, чем для Протокола 1.

Другие, проведенные в рамках настоящего исследования, численные эксперименты с конкретными физически интересными состояниями, а также с состояниями, сгенерированными случайным образом, также свидетельствуют об адекватности и эффективности предложенной в настоящей работе унифицированной теории статистического восстановления квантовых состояний.

Результаты настоящего исследования были использованы в задаче оптимизации параметров конкретного экспериментального протокола статистического восстановления квантовых состояний бифотонных оптических полей [24].

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сформулируем кратко основные результаты проведенного исследования.

На основе процедуры очищения смеси предложен и подробно описан общий формализм, позволяющий осуществлять статистическое восстановление квантовых состояний произвольных чистых и смешанных состояний.

Получено универсальное многопараметрическое статистическое распределение для параметра согласия Ульмана, характеризующего точность статистической реконструкции. Полученное распределение может быть охарактеризовано как неоднородное χ^2 -распределение.

Выводы теоретического исследования хорошо согласуются с результатами статистического моделирования.

Развитый подход может быть использован для разработки и реализации элементов и устройств квантовой информатики.

Автор выражает благодарность С. П. Кулику и участникам семинара «Квантовые компьютеры» под руководством К. А. Валиева в Физико-технологическом институте РАН за обсуждение результатов работы.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 08-07-00481-а).

ЛИТЕРАТУРА

1. К. А. Валиев, А. А. Кокин, *Квантовые компьютеры: надежда и реальность*, РХД, Ижевск (2001).
2. М. Нильсен, И. Чанг, *Квантовые вычисления и квантовая информация*, Мир, Москва (2006).
3. *Физика квантовой информации. Квантовая криптография. Квантовая телепортация. Квантовые вычисления*, под ред. Д. Боумейстера, А. Экерта, А. Цайлингера, Постмаркет, Москва (2002).
4. И. фон Нейман, *Математические основы квантовой механики*, Наука, Москва (1964).
5. А. С. Холево, *Статистическая структура квантовой теории*, РХД, Москва–Ижевск (2003).
6. V. V. Braginsky and F. Ya. Khalili, *Quantum Measurement*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1992).
7. М. Б. Менский, *Квантовые измерения и декогеренция*, Физматлит, Москва (2001).
8. А. В. Белинский, *Квантовые измерения*, Бинوم. Лаборатория знаний, Москва (2008).
9. D. F. James, P. G. Kwiat, W. J. Munro et al., *Phys. Rev. A* **64**, 052312 (2001).
10. Ю. И. Богданов, Л. А. Кривицкий, С. П. Кулик, *Письма в ЖЭТФ* **78**, 804 (2003).
11. Yu. I. Bogdanov, M. V. Chekhova, S. P. Kulik et al., *Phys. Rev. A* **70**, 042303 (2004).
12. Yu. I. Bogdanov, M. V. Chekhova, S. P. Kulik et al., *Phys. Rev. Lett.* **93**, 230503 (2004).
13. Yu. I. Bogdanov, R. F. Galeev, S. P. Kulik et al., *Phys. Rev. A* **73**, 063810 (2006).
14. H. Mikami and T. Kobayashi, *Phys. Rev. A* **75**, 022325 (2007).
15. B. P. Lanyon, T. J. Weinhold, N. K. Langford et al., *Phys. Rev. Lett.* **100**, 060504 (2008).

16. M. Genovese and P. Traina, *Adv. Sci. Lett.* **1**, 153 (2008).
17. Yu. I. Bogdanov, arXiv:quant-ph/0312042.
18. Ю. И. Богданов, *Труды ФТИАН* **18**, 91 (2005).
19. Yu. I. Bogdanov, in *New Topics in Quantum Physics Research*, Nova Science (2006), p. 129; arXiv:quant-ph/0303014.
20. М. Кендалл, А. Стьюарт, *Статистические выводы и связи*, Наука, Москва (1973).
21. *Вероятность и математическая статистика. Энциклопедия*, под ред. Ю. В. Прохорова, Большая Российская Энциклопедия, Москва (1999).
22. A. Uhlmann, *Phys. Rev. A* **62**, 032307 (2000); arXiv:quant-ph/9909060.
23. Ю. И. Богданов, *Микроэлектроника* **37**, 352 (2008).
24. E. V. Moreva, Yu. I. Bogdanov, A. K. Gavrichenko et al., *Appl. Math. Inf. Sci.* **3**, 1 (2009); arXiv:quant-ph/0811.1927.