

ВЗАИМОСВЯЗЬ СОЛИТОННОЙ РЕШЕТКИ И ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПОЛЯРИЗАЦИИ В ОКСИДАХ RMn_2O_5

*В. В. Меньшенин**

*Институт физики металлов Уральского отделения Российской академии наук
620041, Екатеринбург, Россия*

Поступила в редакцию 9 июня 2008 г.

Проанализированы магнитные переходы из парамагнитного состояния в несоизмеримую магнитную структуру и далее в упорядоченную фазу с антиферромагнитным дальним порядком в оксидах RMn_2O_5 (R — редкоземельный ион). Показано, что переход из парамагнитной в несоизмеримую фазу связан как с обменными, так и с релятивистскими взаимодействиями и описывается помимо основного магнитного также и сопутствующим параметром порядка — электрической поляризацией вдоль оси y кристалла. В результате такого перехода появление у кристалла электрической поляризации не сопровождается изменением кристаллической симметрии.

PACS: 75.80.+q

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время возрос интерес к средам, называемым магнитоэлектриками, в которых сосуществуют и взаимосвязаны магнитные характеристики и электрическая поляризация. В таких материалах возникает возможность влияния магнитного поля на электрическую поляризацию, а электрического — на магнитные степени свободы. К магнитоэлектрикам относятся, в частности, оксиды RMn_2O_5 (R — редкоземельный ион). Эти оксиды обладают большим числом магнитных и структурных переходов, сложным и до конца не понятным магнитным состоянием.

Переход из парамагнитного состояния в манганатах RMn_2O_5 происходит в несоизмеримую магнитную структуру [1]. В соединениях TbMn_2O_5 , например, этот переход имеет место при $T = 43$ К [2]. При дальнейшем снижении температуры во всех манганатах наблюдается электрическая поляризация. В оксиде TbMn_2O_5 температура, ниже которой экспериментально определяется наличие электрической поляризации, равна 38 К [2]. Важным является то обстоятельство, что появление электрической поляризации в тербиевом и некоторых других манганатах не сопровождается изменением кристаллической структуры, как это должно быть при собствен-

ном ферроэлектрическом переходе, где должна исчезать, как элемент симметрии, инверсия, поскольку при инверсии поляризация P меняет знак: $\bar{1}P = -P$. Последующее понижение температуры приводит к новому магнитному переходу, но теперь уже в соизмеримую антиферромагнитную структуру с волновым вектором $k = \{1/2, 0, 1/4\}$. При более низких температурах имеет место еще ряд переходов, но на них мы дальше останавливаться не будем.

Цель данного исследования состояла в анализе в рамках симметричного подхода перехода в несоизмеримую фазу и далее в соизмеримую антиферромагнитную структуру в манганатах RMn_2O_5 , а также в выяснении причин отсутствия изменения кристаллической симметрии при появлении поляризации.

2. НЕСОИЗМЕРИМАЯ МАГНИТНАЯ СТРУКТУРА

Экспериментально установлено, что магнитный фазовый переход из парамагнитного состояния в несоизмеримую структуру происходит по звезде волнового вектора $k = \{1/2, 0, \mu\}$, где μ изменяется в пределах $0.16 < \mu < 0.39$ [1, 2]. Для пространственной группы $Pbam(D_{2h}^9)$ эта звезда двухлучевая и ей соответствует двумерное проективное представ-

*E-mail: menshenin@imp.uran.ru

Таблица. Проективное представление для звезды волнового вектора $k = \{1/2, 0, \mu\}$ пространственной группы $Pbam(D_{2h}^9)$

Элемент симметрии	2_z	m_x	m_y
Представление	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

ление [3]. В таблице приведен явный вид этого представления.

Для построения термодинамического потенциала необходимо найти матрицы неприводимого представления $D(g)$ пространственной группы $Pbam(D_{2h}^9)$ по проективному представлению, заданному в таблице. Используя метод, изложенный в монографии [4], находим матрицы $D(g)$, которые для генераторов группы имеют вид

$$\begin{aligned}
 D(g_2) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
 D(g_3) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
 D(g_{25}) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{1}$$

В равенствах (1) обозначения элементов в круглых скобках приведены в соответствии со справочником [3]. Таким образом, для описания перехода в упорядоченную магнитную структуру необходимо ввести четырехкомпонентный параметр порядка, который преобразуется по найденному выше неприводимому представлению пространственной группы. Обозначим этот параметр порядка как $(\eta_1, \eta_2, \xi_1, \xi_2)$.

Найденное явным образом неприводимое представление (1) позволяет сразу установить возможность существования инвариантов Лифшица. Определяя характеры элементов антисимметричного квадрата представления и характеры векторного представления, найдем [4], что оно допускает три инварианта Лифшица.

Используя правила преобразования компонент

параметра порядка под действием элементов группы симметрии среды, можно записать термодинамический потенциал следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \Phi &= \frac{1}{V} \int dr \left\{ r_1 [(\eta_1^2 - \xi_2^2) + (\xi_1^2 - \eta_2^2)] + \right. \\
 &+ u_1 [(\eta_1^2 - \xi_2^2)^2 + (\xi_1^2 - \eta_2^2)^2] + u_2 \eta_1 \eta_2 \xi_1 \xi_2 + \\
 &+ u'_2 (\eta_1^2 - \xi_2^2)(\xi_1^2 - \eta_2^2) + \\
 &+ 2\gamma_1 \left[\eta_1 \frac{\partial}{\partial z} \xi_1 - \xi_1 \frac{\partial}{\partial z} \eta_1 + \eta_2 \frac{\partial}{\partial z} \xi_2 - \xi_2 \frac{\partial}{\partial z} \eta_2 \right] + \\
 &+ \gamma_{ex} \left[\frac{\partial}{\partial z} (\xi_1 - \eta_2) \frac{\partial}{\partial z} (\xi_1 + \eta_2) + \right. \\
 &+ \left. \frac{\partial}{\partial z} (\eta_1 - \xi_2) \frac{\partial}{\partial z} (\eta_1 + \xi_2) \right] + \\
 &+ W_1 [(\eta_1 - \xi_2)^n + (\eta_1 + \xi_2)^n + \\
 &+ (\xi_1 - \eta_2)^n + (\xi_1 + \eta_2)^n]_{n=4k} + \\
 &+ \sum_{\substack{|n_1-n_2|=4k \\ n_1, n_2}} W_2^{n_1 n_2} [(\eta_1 - \xi_2)^{n_1} (\xi_1 + \eta_2)^{n_2} + \\
 &+ (\xi_1 - \eta_2)^{n_1} (\xi_1 + \eta_2)^{n_2} + \\
 &+ (\xi_1 - \eta_2)^{n_2} (\xi_2 + \eta_1)^{n_1} + (\eta_1 - \xi_2)^{n_2} (\xi_1 + \eta_2)^{n_1}] + \\
 &+ \left. \sum_{n=2k+1} i\alpha_n (\eta_1 \eta_2 - \xi_1 \xi_2)^n P_y + \frac{1}{2\kappa} P_y^2 \right\}. \tag{2}
 \end{aligned}$$

В равенстве (2) полагается, что от температуры зависит величина r_1 , а $u_1, u_2, u'_2, \gamma_1, \gamma_{ex}, W_1, W_2^{n_1 n_2}, \alpha_n, \kappa$ — некоторые константы, причем условия $u_1, u_2, u'_2 > 0$ обеспечивают положительную определенность термодинамического потенциала.

Отметим, прежде всего, что в потенциале (2) оставлен только инвариант Лифшица (слагаемое, пропорциональное константе γ_1), содержащий производные от компонент параметра порядка по координате z , поскольку звезда волнового вектора может непрерывно меняться именно вдоль этой оси. Наличие такого инварианта в выражении (2) означает, что переход из парамагнитной фазы может осуществляться только в несоизмеримую магнитную структуру. Потенциал содержит сопутствующий параметр порядка в виде компоненты электрической поляризации вдоль оси y . Поэтому появление магнитного порядка у системы должно сразу приводить и к возникновению электрической поляризации, которая, как будет видно далее, слабо зависит от пространственной координаты z в непосредственной близости от точки перехода.

Проведем для анализа термодинамического по-

тенциала (2) замену переменных вида

$$\begin{aligned} \eta_1 + \xi_2 &= \rho_1 \exp(i\varphi_1), & \eta_1 - \xi_2 &= \rho_1 \exp(-i\varphi_2), \\ \xi_1 - \eta_2 &= \rho_2 \exp(i\varphi_2), & \xi_1 + \eta_2 &= \rho_2 \exp(-i\varphi_2). \end{aligned} \quad (3)$$

Рассмотрим сначала линейное по величинам ρ_1 и ρ_2 приближение, полагая выполненными условия

$$\left| \frac{\partial \rho_1}{\partial z}, \frac{\partial \rho_2}{\partial z} \right| \ll \left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial z}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \right|, \quad (4)$$

означающие, что модули имеют более медленную зависимость от координаты z , нежели фазы [4, 5]. Из равенств

$$\frac{\delta \Phi}{\delta \rho_1} = 0, \quad \frac{\delta \Phi}{\delta \rho_2} = 0 \quad (5)$$

получим систему нелинейных дифференциальных уравнений относительно фаз φ_1 и φ_2 , которая может быть линеаризована при выполнении соотношений

$$\varphi_1 = \varphi_2 + \frac{\pi}{2}(2m + 1), \quad (6)$$

где m — произвольное целое число. Принимая во внимание температурную зависимость коэффициента $r_1 = r_0(T - T_0)$, найдем температуру перехода в несоизмеримую фазу, которая определяется соотношением

$$T_m = T_0 + \frac{\gamma_1^2}{\gamma_{ex} r_0}. \quad (7)$$

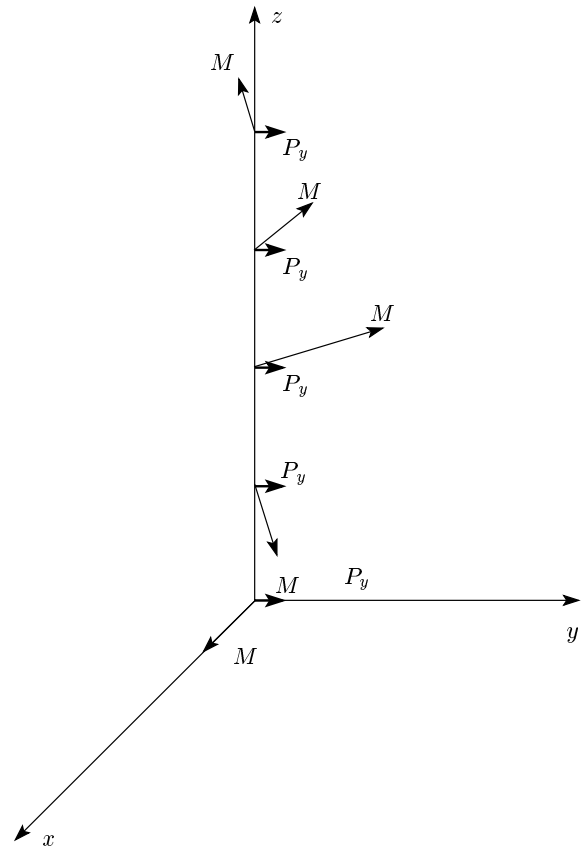
Фаза φ_2 имеет следующую зависимость от координаты:

$$\varphi_2 = k_0 z, \quad k_0 = \frac{|\gamma_1|}{\gamma_{ex}}. \quad (8)$$

Из равенств (7) и (8) видно, что переход в длиннопериодическую магнитную структуру обусловлен обменными и релятивистскими взаимодействиями вследствие наличия в термодинамическом потенциале инварианта Лифшица. В рассматриваемом приближении в системе возникают две модулированные магнитные структуры, фазы которых противоположны и дополнительно сдвинуты относительно друг друга на угол $\pi/2$ или $3\pi/2$. Отметим, что симметрия системы допускает существование структур типа простой спирали, поперечной спиновой волны с ориентацией магнитных моментов перпендикулярно направлению модуляции, а также структур типа продольной спиновой волны. Поляризация P_y , которая находится из условия $\partial \Phi / \partial P_y = 0$, в этом приближении (ограничиваясь только первым инвариантом) равна

$$P_y = (-1)^{m+1} \kappa \alpha_1 \rho_1 \rho_2. \quad (9)$$

Таким образом, вблизи температуры перехода в несоизмеримую магнитную структуру поляризация



Взаимная ориентация магнитных моментов и электрической поляризации

слабо зависит от координаты z и является малой величиной в силу малости амплитуд ρ_1, ρ_2 . Отметим еще раз, что поляризация возникает одновременно с дальним несоизмеримым магнитным порядком.

На рисунке приведена взаимная ориентация магнитных моментов, образующих в пространстве простую спираль и локализованных на атомах Mn, получающихся размножением первого атома в позиции $4h$ при переходе от одной элементарной ячейки к другой, и вектора электрической поляризации ячейки при смещении вдоль оси z кристалла.

При дальнейшем понижении температуры становятся существенными более высокие гармоники, появление которых можно понять из анализа оставшихся условий минимума термодинамического потенциала:

$$\frac{\delta \Phi}{\delta \varphi_1} = 0, \quad \frac{\delta \Phi}{\delta \varphi_2} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial P_y} = 0. \quad (10)$$

Изучение этих условий проведем, считая, что энергия анизотропии, пропорциональная константе W_1 , и инвариант, связанный с магнитоэлектрически-

ми эффектами, берутся в самом низком по n приближении. Обратим внимание на то, что слагаемые пропорциональные константам W^{n_1, n_2} оказываются более высокого порядка и в рассматриваемом приближении вклада не дают. В этом случае условия (10) с учетом (4) также сводятся к двум нелинейным дифференциальным уравнениям относительно фаз φ_1 и φ_2 :

$$\begin{aligned} \gamma_{ex} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} + 2W_1 \rho_1^2 \sin 4\varphi_1 + \\ + \frac{u_2}{4} \rho_2^2 [\sin 2(\varphi_1 - \varphi_2) - \sin 2(\varphi_1 + \varphi_2)] + \\ + \frac{\alpha_1^2 \kappa}{4} \rho_2^2 \sin 2(\varphi_1 + \varphi_2) + \\ + 2 \frac{\gamma_1 \rho_2}{\rho_1} \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \cos(\varphi_1 + \varphi_2) = 0, \\ \gamma_{ex} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z^2} + 2W_1 \rho_2^4 \sin 4\varphi_2 - \\ - \frac{u_2}{4} \rho_1^2 [\sin 2(\varphi_1 - \varphi_2) + \sin 2(\varphi_1 + \varphi_2)] + \\ + \frac{\alpha_1^2 \kappa}{4} \rho_1^2 \sin 2(\varphi_1 + \varphi_2) - \\ - 2\gamma_1 \frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \cos(\varphi_1 + \varphi_2) = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

которые линеаризуются при выполнении равенства (6), если $\rho_1 = \rho_2$. В дальнейшем будем считать в соотношении (6) $m = 1$, а $\rho_1 = \rho_2 = \rho$. В окончательном виде получим уравнение для амплитуды $\varphi = \varphi$ вида

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + 4\nu \sin 4\varphi = 0, \quad (12)$$

где константа ν равна

$$\nu = \frac{1}{16} (4W_1 - u_2) \frac{\rho^2}{\gamma_{ex}}. \quad (13)$$

Обозначим через ε первый интеграл уравнения (11) и введем обозначение [4] $\varepsilon = -\nu + q^2/2$. Решение равенства (11) теперь может быть представлено следующим образом:

$$\varphi = \frac{1}{2} am(2qz, k), \quad (14)$$

где $am(z, k)$ — функция амплитуды z [6], $k = (4\nu/q^2)^{1/2}$.

Воспользовавшись разложением функции амплитуды в ряд Фурье, приведенном, например, в монографии [7], непосредственно из вида этого ряда устанавливаем, что с понижением температуры у системы помимо первой гармоники появляются и более высокие гармоники.

Функция амплитуды имеет важное свойство $am(u + 2K, k) = \pi + am(u, k)$, где K — полный

эллиптический интеграл первого рода. Предельные случаи этого решения представляют для нас интерес. При $k \rightarrow 0$ соотношение (14) сводится к равенству $\varphi = qz$, а при $k^2 \rightarrow 1$ функция амплитуды на интервале изменения аргумента z от nK/q до $(n+1)K/q$ (n — любое целое число) остается практически постоянной, а при $z = nK/q$ испытывает скачок на π [6]. Стремление модуля k к нулю вблизи температуры перехода в длиннопериодическую структуру видно из формулы (13), поскольку в этом случае малы величины ρ_1, ρ_2 , а значит, малым оказывается и параметр ν . С понижением температуры амплитуды ρ_1, ρ_2 возрастают, следовательно, увеличивается и модуль k .

Из анализа предельных случаев решения (14) вытекает, что при $k \rightarrow 0$ оно эквивалентно равенству (8). При значениях k^2 близких к единице образец разбивается на домены с однородным внутри них антиферромагнитным упорядочением. Доменные границы представляют собой солитоноподобные образования. В этом случае в системе образуется так называемая солитонная решетка [4, 8]. Однако в нашем случае имеют место две системы доменов, возникающие соответственно для углов φ_1, φ_2 .

Для цилиндрического образца при значениях k^2 близких к единице значение термодинамического потенциала как функции параметра q ($q \neq 0$) равно

$$\begin{aligned} \Phi = \Phi_0 + \frac{S}{V} \left[u_2' \frac{\rho_1^2 \rho_2^2}{8q^2} + \frac{\gamma_{ex}}{4} (\rho_1^2 + \rho_2^2) + \right. \\ \left. + \frac{W_1}{q^2} (\rho_1^4 + \rho_2^4) - \frac{\alpha_1^2 \kappa}{8} \frac{\rho_1^2 \rho_2^2}{q^2} \right] \ln(\text{ch } 2qd), \end{aligned} \quad (15)$$

где S — основание цилиндра, V — объем, d — его длина. Условие $\partial\Phi/\partial q = 0$, определяющее значение величины q , соответствующее минимальному значению Φ , приводит к соотношению

$$\text{ch } 2qd = Aq^{-2} + B, \quad (16)$$

где

$$A = \frac{1}{8} (u_2' \rho_1^2 \rho_2^2 + 8W_1 [\rho_1^4 + \rho_2^4] - \alpha_1^2 \kappa \rho_1^2 \rho_2^2), \quad (17)$$

$$B = \frac{\gamma_{ex}}{4} (\rho_1^2 + \rho_2^2).$$

Из равенств (16), (17) получаем, что несоизмеримая фаза реализуется, если выполняется неравенство

$$q < \frac{1}{2d} \text{arch } B. \quad (18)$$

Из условия $\partial\Phi/\partial P_y = 0$, а также равенства $\varphi_1 + \varphi_2 = \pi/2$ следует, что пространственное распределение поляризации снова определяется равенством (9) при $m = 1$. Температура, при которой впервые удается определить наличие в образце поляризации, соответствует появлению в нем доменной магнитной структуры.

Дальнейшее понижение температуры после формирования в системе солитонной решетки приводит к тому, что параметр k становится равным единице. В этом случае интервал изменения координаты z , в котором функция $\text{am}(2qz, k)$ остается постоянной, стремится к бесконечности. Существование доменных границ, разделяющих магнитные домены, теперь становится энергетически невыгодным [4, 8]. Солитонная решетка исчезает и осуществляется переход в состояние с однородным магнитным упорядочением по всему образцу.

При достижении параметром k значения равного единице образец и при исчезновении несоизмеримой магнитной структуры обладает отличной от нуля поляризацией, задаваемой равенством (9), в отсутствие внешнего электрического поля. Величина поляризации в этом случае достигает наибольшей величины в силу максимального значения амплитуд ρ_i ($i = 1, 2$). Температура, при которой происходит полный распад солитонной решетки, соответствует второму магнитному переходу в соизмеримую антиферромагнитную структуру.

Возвратимся снова к системе уравнений (11). Предполагая, что выполняются условия

$$W_1\rho_1^2 \gg \left| \gamma_1 \frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{\partial\varphi_2}{\partial z} \right|, \quad W_2\rho_2^2 \gg \left| \gamma_1 \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{\partial\varphi_1}{\partial z} \right|, \quad (19)$$

можно пренебречь последними слагаемыми в этих равенствах. В этом случае уравнения (11) можно линеаризовать, если положить $\varphi_1 = \varphi_2 = \pi/2$, а $\rho_1 = \rho_2$. Тогда решение системы (11) снова сведется к решению уравнения (12), где параметр ν теперь равен

$$\nu = \frac{1}{16}(4W_1 - \alpha_1^2\kappa) \frac{\rho^2}{\gamma_{ex}}. \quad (20)$$

В этой ситуации при возникновении солитонной решетки из условия $\partial\Phi = \partial P_y = 0$ следует, что пространственное распределение электрической поляризации должно характеризоваться, в отличие от рассмотренного выше случая, доменной структурой. При этом, поскольку для функции $\text{sn}(z, k)$ выполняется равенство $\text{sn}(2qz + 2K, k) = -\text{sn}(2qz, k)$, где K — полный эллиптический интервал первого рода, векторы поляризации внутри соседних электрических

доменов ориентированы противоположно друг другу, при этом внутри доменов поляризация отлична от нуля. В коллинеарной антиферромагнитной фазе поляризация равна

$$P_y = -\alpha_1\kappa\rho^2 \frac{1}{\text{ch}(2qz)}. \quad (21)$$

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данном исследовании фазовых переходов в рамках симметричного подхода показано, что в оксидах RMn_2O_5 переход из парамагнитного состояния в несоизмеримую магнитную структуру обусловлен не только обменными, но и релятивистскими взаимодействиями, благодаря наличию в термодинамическом потенциале инварианта Лифшица. Этот переход помимо основного четырехкомпонентного параметра порядка характеризуется также наличием сопутствующего параметра P_y — проекции вектора электрической поляризации. В этом случае появление у системы ниже температуры перехода в несоизмеримую магнитную структуру электрической поляризации не сопровождается изменением кристаллической симметрии вследствие того, что ниже этой температуры пространственная инверсия исчезает как элемент симметрии из-за возникновения дальнего магнитного порядка. Это и наблюдается в эксперименте, когда в отсутствие дополнительных ядерных рефлексов при рассеянии нейтронов, указывающих на изменение кристаллической симметрии, наблюдается появление электрической поляризации [2]. Незначительная величина этой поляризации обусловлена малостью амплитуд компонент магнитного параметра порядка. Отсюда следует вывод о том, что, по нашему мнению, нет необходимости менять группу, описывающую кристаллохимическую симметрию манганатов, как это предлагается в некоторых работах.

Ниже точки перехода в несоизмеримую магнитную структуру формируется магнитная солитонная решетка, сопровождающаяся, как выше уже сказано, образованием электрических доменов. Из симметрии системы следует, что направление электрической поляризации оказывается перпендикулярным осям спиралей. Именно в этой области температур и удается впервые экспериментально измерить поляризацию среды. Соизмеримая магнитная фаза возникает при температуре, ниже которой энергетически невыгодно существование солитонной решетки [4, 8]. Пространственное распределение поляриза-

ции в соизмеримой магнитной фазе однородно по образцу.

Для экспериментального подтверждения рассматривавшегося выше механизма перехода в длиннопериодическую, а затем в коллинеарную антиферромагнитную фазу целесообразно провести нейтронографические исследования с целью обнаружения дополнительных магнитных рефлексов с периодичностью $4k$. Эти рефлексы обусловлены наличием магнитной анизотропии, которая совместно с обменными взаимодействиями и приводит к формированию солитонной решетки. Обнаружение указанных рефлексов будет являться одним из подтверждений наличия такой решетки. Отметим теперь то обстоятельство, что переход из несоизмеримой в соизмеримую магнитную фазу на основе солитонной решетки не может быть фазовым переходом второго рода [4]. Проведение калориметрического анализа с целью определения наличия теплоты перехода позволит сделать заключение о типе перехода.

В соизмеримой фазе, как следует из формулы (21), при определенных условиях пространственное распределение поляризации может иметь форму статического солитона. Солитон поляризации в данном случае может оказаться устойчивым, поскольку неоднородное распределение имеет место вдоль оси z кристалла, тогда как поляризация ориентирована

вдоль оси y , что нарушает его одномерность. Экспериментально установленное существование солитона поляризации может представлять интерес для процессов передачи информации.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. М. Кадомцева, С. С. Кротов, Ю. Ф. Попов и др., ЖЭТФ **127**, 343 (2005).
2. G. R. Blake, L. C. Charon, P. G. Radaelli et al., Phys. Rev. B **71**, 214402 (2005).
3. О. В. Ковалев, *Неприводимые и индуцированные представления и копредставления федоровских групп*, Наука, Москва (1986).
4. Ю. А. Изюмов, В. Н. Сыромятников, *Фазовые переходы и симметрия кристаллов*, Наука, Москва (1984).
5. И. Е. Дзялошинский, ЖЭТФ **47**, 992 (1964).
6. Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Леш, *Специальные функции*, Наука, Москва (1977), с. 118.
7. Э. Т. Уиттекер, Дж. Н. Ватсон, *Курс современного анализа*, Физматгиз, Москва (1963), с. 402.
8. Л. Н. Булаевский, Д. И. Хомский, ЖЭТФ **74**, 1863 (1978).