ЖЭТФ, 2009, том 135, вып. 1, стр. 33–39

О СООТНОШЕНИИ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ ЭНЕРГИЯ-ВРЕМЯ «ПРИЛЕТА» ФОТОНА

С. Н. Молотков *

Институт физики твердого тела Российской академии наук 142432, Черноголовка, Московская обл., Россия

Академия криптографии Российской Федерации, Факультет вычислительной математики и кибернетики, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова 119899, Москва, Россия

Поступила в редакцию 27 июня 2008 г.

Получена нижняя граница соотношения неопределенностей энергия-время «прилета» для фотона.

PACS: 03.70.+k, 03.50.De, 03.65.Pm

Вопрос об измерении времени в квантовой механике имеет давнюю историю (см., например, [1–7]). В отличие от наблюдаемых — энергии, импульса, координаты и т. д., — которым в квантовой механике сопоставляются эрмитовы операторы, время является не динамической переменной, а параметром. Однако данное обстоятельство не служит препятствием для измерения параметра времени. Существует даже бесконечное множество процедур измерения времени. Результатом любой процедуры измерения времени в квантовой механике является появление распределения вероятностей на множестве времен регистрации событий. Нас будет интересовать измерение времени, обладающее естественным свойством ковариантности. Пусть регистрируются квантовые состояния $\rho(t_0)$, приготовленное в момент времени t_0, и $\rho(t_1)$, отличающееся от $\rho(t_0)$ только моментом приготовления. Состояния связаны сдвигом во времени:

$$\rho(t_1) = \hat{U}(t_1 - t_0)\rho(t_0)\hat{U}^{-1}(t_1 - t_0), \qquad (1)$$

где $\hat{U}(t)$ — оператор эволюции (сдвига во времени).

Нас интересует момент наступления некоторого события, например, регистрации фотона быстрым (широкополосным) фотодетектором[1)]. В этом случае пространством результатов является время регистрации. Связь распределения вероятностей над пространством результатов (времен регистрации) и состоянием квантовой системы дается положительной операторнозначной мерой [9, 10]. Каждому подмножеству пространства результатов $\Delta_t \in (-\infty, \infty)$ сопоставляется положительный оператор $\mathcal{M}(\Delta_t)$, такой что

$$\mathcal{M}(\cup\Delta_{it}) = \sum_i \mathcal{M}(\Delta_{it}), \quad \Delta_{it} \cap \Delta_{jt} = \emptyset. \qquad (2)$$

Условие нормировки — равенство единице полной вероятности наступления событий во всем пространстве результатов — дает

$$\mathcal{M}(\Delta_{(-\infty,\infty)}) = I. \qquad (3)$$

Условие ковариантности означает, что сдвиг начала отсчета во времени в процедуре приготовления квантового состояния должен приводить к соответствующему сдвигу в распределении вероятностей. Иначе говоря,

*E-mail: molotkov@issp.ac.ru

1) Приготовление состояний в моменты t_0 либо t_1 может происходить последовательным приготовлением узкого по времени состояния (соответственно с широким спектром) в моменты t_0 и t_1 с последующим пропусканием через частотный фильтр (спектрометр) с подходящей спектральной формой аналогично тому, как это описано в работе [8].

$$\hat{U}(t_1-t_0)\mathcal{M}(\Delta_t)\hat{U}^{-1}(t_1-t_0)=\mathcal{M}(\Delta_{t-(t_1-t_0)}). \quad (4)$$

Пусть вероятность регистрации результата в интервале времени $(t,t+dt)$ равна $\Pr\{dt\}$. Форма распределения вероятностей зависит только от состояния $\rho(t_0)$, а сами распределения для состояний $\rho(t_0)$ и $\rho(t_1)$ различаются только сдвигом во времени на величину t_1-t_0. Для распределения вероятностей можно определить среднее значение $\overline{t}$ и дисперсию времени регистрации: $\sigma_t^2=\overline{(\Delta t)^2}=\overline{(t-\overline{t})^2}$. При этом выбором начала отсчета времени всегда можно сделать так, что $\overline{t}=0$ для состояния $\rho(t_0)$. В дальнейшем, не нарушая общности, будем считать, что $\overline{t}=0$. Для среднеквадратичного отклонения времен регистрации имеем

$$\overline{(\Delta t)^2}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}(t-\overline{t})^2\Pr\{dt\}. \quad (5)$$

Измерение энергии[2)] на состоянии $\rho(t_0)$ дает распределение вероятностей по энергии. Пусть вероятность регистрации энергии в интервале $(\varepsilon,\varepsilon+d\varepsilon)$ равна $\Pr\{d\varepsilon\}$. Для данного распределения также может быть вычислено среднее значение энергии $\overline{\varepsilon}$ и дисперсия: $\sigma_\varepsilon^2=\overline{(\Delta\varepsilon)^2}=\overline{(\varepsilon-\overline{\varepsilon})^2}$. Отметим, что сдвигом начала отсчета среднее значение энергии нельзя сделать равным нулю, поскольку энергия (спектр гамильтониана) ограничена снизу. Далее будем считать, что энергия $\varepsilon\in[0,\infty)$.

Для дисперсии энергии получаем

$$\overline{(\Delta\varepsilon)^2}=\int\limits_{0}^{\infty}(\varepsilon-\overline{\varepsilon})^2\Pr\{d\varepsilon\}. \quad (6)$$

Далее нас будет интересовать нижняя граница по всевозможным входным состояниям ρ соотношения неопределенностей энергия-время «прилета» для фотона:

$$\Omega=\min_{\{\rho\}}\left\{\overline{(\Delta\varepsilon)^2}\,\overline{(\Delta t)^2}\right\}. \quad (7)$$

Ниже будем рассматривать одночастичные состояния безмассового свободного квантованного поля (фотонов). Такие состояния порождаются действием на вакуумный вектор полевых операторов (обобщенных функций с операторными значениями) [11]:

$$\psi^\dagger(\hat{x})=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int d\hat{k}\,\delta(\hat{k}^2)\theta(k_0)e^{i\hat{k}\hat{x}}a^\dagger(\hat{k}), \quad (8)$$

$$\hat{k}=(k,k_0),\quad \hat{x}=(x,t),$$
$$\hat{k}=dk\,dk_0,\quad \hat{k}\hat{x}=kx-k_0t.$$

Операторы рождения и уничтожения удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[a(\hat{k}),a^\dagger(\hat{k}')]=k_0\delta(k-k'). \quad (9)$$

Физические состояния поля $|\psi\rangle\in\mathcal{H}$, принадлежащие гильбертову пространству состояний, определяются как результат сглаживания операторных обобщенных функций с основными функциями $\psi(\hat{x})\in\in\Omega(\hat{x})$ ($\psi^\dagger(\hat{x})|0\rangle\in\Omega^*(\hat{x})$ — обобщенные собственные векторы, непрерывные линейные функционалы над $\Omega(\hat{x})$, $\Omega(\hat{x})\subset\mathcal{H}\subset\Omega^*(\hat{x})$ — оснащенное гильбертово пространство [11, 12]).

Далее имеем

$$|\psi\rangle=\int d\hat{x}\,\psi(\hat{x})\psi^\dagger(\hat{x})|0\rangle=$$
$$=\int d\hat{k}\,\psi(\hat{k})\delta(\hat{k}^2)\theta(k_0)a^\dagger(\hat{k})|0\rangle=$$
$$=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dk}{k_0}\psi(k,k_0=|k|)|\hat{k}\rangle, \quad (10)$$

$$|\hat{k}\rangle=a^\dagger(\hat{k})|0\rangle,\quad \langle\hat{k}|\hat{k}'\rangle=k_0\delta(k-k'),$$
$$\psi(\hat{k})=\int d\hat{x}\,\psi(\hat{x})e^{-i\hat{k}\hat{x}}.$$

Здесь dk/k_0 — лоренц-инвариантный объем интегрирования. Вклад в физическое состояние $|\psi\rangle$ дают значения амплитуды $\psi(k,k_0=|k|)$ на массовой поверхности.

Будем рассматривать состояния (пакеты), распространяющиеся в одном направлении. Для состояний безмассового поля энергия и импульс с точностью до коэффициента совпадают: $\varepsilon=k_0=|k|=k$. Для таких состояний вклад в функцию (10) дают лишь векторы с $k>0$, и амплитуда $\psi(k,k)$ отлична от нуля при $k>0$.

Измерение энергии дается разложением единицы в одночастичном подпространстве состояний:

$$I=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dk}{k_0}|\hat{k}\rangle\langle\hat{k}|=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathcal{M}(d\varepsilon),$$
$$\mathcal{M}(d\varepsilon)=|\varepsilon\rangle\langle\varepsilon|d\varepsilon,\quad |\varepsilon\rangle=\frac{|\hat{k}\rangle}{\sqrt{k_0}}. \quad (11)$$

Для гамильтониана $\hat{H}$ свободного безмассового поля имеет место спектральное представление

$$\hat{H}=\int\limits_{0}^{\infty}\varepsilon\mathcal{M}(d\varepsilon), \quad (12)$$

[2)] Такое измерение реализуется при помощи спектрометра и детектора.

где $\mathcal{M}(d\varepsilon)$ — спектральное семейство ортогональных проекторов.

Связь между распределением вероятностей и спектральным семейством проекторов дается следующим соотношением:

$$\begin{aligned}\Pr\{d\varepsilon\} = \mathrm{Tr}\{\mathcal{M}(d\varepsilon)|\psi\rangle\langle\psi|\} = |\psi(k,k)|^2\frac{dk}{k} = \\ = |f(\varepsilon)|^2 d\varepsilon, \quad f(\varepsilon) = \frac{\psi(k,k)}{\sqrt{k}}. \quad (13)\end{aligned}$$

Здесь $\Pr\{d\varepsilon\}$ — вероятность получить значение энергии в интервале $(\varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon)$ при измерении состояния $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$. Среднее значение энергии и среднеквадратичное отклонение в состоянии ρ равны

$$\begin{gathered}\overline{\varepsilon} = \int\limits_0^\infty \varepsilon \Pr\{d\varepsilon\} = \int\limits_0^\infty \varepsilon |f(\varepsilon)|^2 d\varepsilon, \\ \overline{(\Delta\varepsilon)^2} = \int\limits_0^\infty (\varepsilon - \overline{\varepsilon})^2 \Pr\{d\varepsilon\}, \quad \overline{\varepsilon^2} = \int\limits_0^\infty \varepsilon^2 \Pr\{d\varepsilon\}.\end{gathered} \quad (14)$$

Рассмотрим теперь измерение положения частицы, которое для состояний, распространяющихся в одном направлении $(k > 0)$, может быть представлено в виде разложения единицы:

$$\begin{aligned}I = \int\limits_{-\infty}^\infty \frac{d\tau}{2\pi}\left(\int\limits_0^\infty \frac{dk}{\sqrt{k}} e^{-ik\tau}|\hat{k}\rangle\right)\left(\int\limits_0^\infty \frac{dk'}{\sqrt{k'}}\langle\hat{k'}|e^{ik'\tau}\right) = \\ = \int\limits_{-\infty}^\infty \frac{d\tau}{2\pi}\left(\int\limits_0^\infty d\varepsilon e^{-i\varepsilon\tau}|\varepsilon\rangle\right)\left(\int\limits_0^\infty d\varepsilon'\langle\varepsilon'|e^{i\varepsilon'\tau}\right) = \\ = \int\limits_{-\infty}^\infty \mathcal{M}(d\tau), \quad (15)\end{aligned}$$

где $\tau = x - t$.

В данном случае спектральное семейство $\mathcal{M}(d\tau)$ является положительной операторнозначной мерой, а не ортогональными проекторами. При помощи данного семейства можно ввести положительный максимально симметричный оператор времени (см. подробности в работе [8])

$$\hat{\mathcal{T}} = \int\limits_{-\infty}^\infty \tau \mathcal{M}(d\tau). \quad (16)$$

Измерение координаты x является по сути измерением времени срабатывания t. Более точно, пространством результатов реально является не x или t по отдельности, а их разность τ. Разложение единицы (15) является формальным описанием прибора, которое может быть интерпретировано следующим образом. Если считать пространством результатов x, то измерение следует понимать как распределенный по x прибор, который выдает случайный результат в одной точке $(x, x + dx)$ в момент t. Если фиксировать x, то измерение описывает локальный по x прибор, работающий в ждущем режиме, который выдает результат в случайный момент времени $(t, t + dt)$. То обстоятельство, что операторнозначная мера $\mathcal{M}(d\tau)$ в (15) зависит лишь от разности $\tau = x - t$, выражает тот факт, что если результат с какой-то вероятностью может быть получен в точке x в момент времени t, то с той же вероятностью он может быть получен в другой точке x', но в момент времени $t' = x' - x + t$.

Связь распределения вероятности для получения результата в интервале времени $(\tau, \tau + d\tau)$ и операторными мерами (11), (12) дается соотношением

$$\begin{gathered}\Pr\{d\tau\} = \mathrm{Tr}\{\mathcal{M}(d\tau)|\psi\rangle\langle\psi|\} = |f(\tau)|^2 d\tau, \\ f(\tau) = \int\limits_0^\infty \frac{dk}{\sqrt{k}}\psi(k,k)e^{-ik\tau} = \int\limits_0^\infty d\varepsilon f(\varepsilon) e^{-i\varepsilon\tau}.\end{gathered} \quad (17)$$

Обратим внимание на то, что $f(\tau)$ по сути совпадает с волновой функцией Ландау–Пайерлса в координатно-временном представлении [13].

Естественным граничным условием для функции $f(\varepsilon)$ является условие $f(\varepsilon = 0) = 0$. Соответственно, $f(\varepsilon = \infty) = 0$. Первое условие означает отсутствие фотонов с нулевой (частотой) энергией.

Среднеквадратичное отклонение времени регистрации с учетом граничного условия при $\varepsilon = 0$ может быть записано в виде

$$\begin{aligned}\overline{(\Delta\tau)^2} = \int\limits_{-\infty}^\infty \tau^2|f(\tau)|^2 d\tau = \int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty d\varepsilon\, d\varepsilon' f(\varepsilon) f^*(\varepsilon') \times \\ \times \int\limits_{-\infty}^\infty \tau^2 e^{i(\varepsilon-\varepsilon')\tau} d\tau = \int\limits_0^\infty \left|\frac{df(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|^2 d\varepsilon. \quad (18)\end{aligned}$$

Дальнейшая задача сводится к нахождению состояния $|\psi\rangle$ $(f(\varepsilon))$, на котором достигается минимум следующего функционала с дополнительным условием нормировки состояния:

$$\Omega(f) = \left(\int_0^\infty \left| \frac{df(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|^2 d\varepsilon \right) \times \\ \times \left(\int_0^\infty (\varepsilon^2 - \overline{\varepsilon}^2) |f(\varepsilon)|^2 d\varepsilon \right), \qquad (19)$$

$$\langle \psi | \psi \rangle = \int_0^\infty |f(\varepsilon)|^2 d\varepsilon = 1.$$

Вариация функционала

$$\delta\Omega(f)/\delta f = 0 \qquad (20)$$

приводит к дифференциальному уравнению второго порядка для $f(\varepsilon)$:

$$\frac{d^2 f(\xi)}{d\xi^2} + \left(\nu + \frac{1}{2} - \frac{\xi^2}{4} \right) f(\xi) = 0, \\ \xi = \left(\frac{4a}{b - c^2} \right)^{1/4} (\varepsilon - c), \qquad (21) \\ \nu + \frac{1}{2} = \sqrt{a(b - c^2)},$$

где

$$a = \int_0^\infty \left| \frac{df(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|^2 d\varepsilon, \quad b = \int_0^\infty \varepsilon^2 |f(\varepsilon)|^2 d\varepsilon, \\ c = \int_0^\infty \varepsilon |f(\varepsilon)|^2 d\varepsilon, \quad \int_0^\infty |f(\varepsilon)|^2 d\varepsilon = 1, \qquad (22)$$

а граничные условия имеют вид $f(\varepsilon = 0) = 0$, $f(\varepsilon = \infty) = 0$.

Задача нахождения минимума функционала (19) решалась для классических сигналов в элегантной, но малоизвестной работе Майера и Леонтовича [14] еще в 1934 г. (см. также [15]). Численно значение функционала в минимуме было найдено в работе [16]: $\sqrt{\Omega_{min}} = 0.2951\ldots$ Для классических сигналов функция $f(\omega)$ должна быть четной функцией частоты, поскольку классический сигнал

$$f(t) = \int_{-\infty}^\infty f(\omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

должен описываться вещественной функцией. Это возможно, если $f(\omega)$ является четной функцией частоты. В качестве граничного условия при $\omega = 0$ в работе [16] использовалось условие

$$\left. \frac{df(\omega)}{d\omega} \right|_{\omega=0} = 0.$$

В этом случае для дифференциального уравнения второго порядка $f(\omega = 0) \neq 0$.

Решением уравнения (21) являются функции Вебера (параболического цилиндра) [17]:

$$f(\varepsilon) = D_{\mu - \frac{1}{2}} \left(\sqrt{\frac{2a}{\mu}} \left(\varepsilon - \sqrt{\frac{2\mu^2}{a}} \right) \right), \\ \mu = \sqrt{a(b - c^2)} = \sqrt{\Omega}. \qquad (23)$$

Нули функции Вебера могут находиться только в интервале $|\xi| < 2\sqrt{\mu}$ [17], с учетом граничного условия — обращения в нуль при нулевой энергии ($\varepsilon = 0$, $\xi = 2\sqrt{\mu}$) — приходим к трансцендентному уравнению, которое определяет минимумы функционала:

$$D_{\mu_n - 1/2}(-2\sqrt{\mu_n}) = 0, \quad \sqrt{\Omega_n} = \mu_n, \qquad (24)$$

где n — номер минимума. Основной минимум имеет место при $n = 0$.

Функция Вебера имеет $n+1$ нулей при $\varepsilon \in [0, \infty)$, включая нуль при $\varepsilon = 0$. Константа a_n определяется из условия нормировки. Значение минимума функционала равно $\sqrt{\Omega_0} = 0.6715\ldots$ Остальные минимумы даются соотношением $\sqrt{\Omega_n} = 0.6715\ldots + n$. Рассчитанные численно функции $D_{\mu_n - 1/2}(\xi - 2\sqrt{\mu_n})$ для нескольких первых значений n приведены на рис. 1. На рис. 2 показаны функции во временном представлении.

Заметим, что аналогично можно минимизировать соотношение неопределенностей координата-импульс. В этом случае задача минимизации приводит к аналогичному уравнению с целыми значениями индекса $\nu = n - 1/2$, а функции Вебера совпадают с волновыми функциями гармонического осциллятора. Как известно, волновая функция гармонического осциллятора, отвечающая основному состоянию $n = 0$ является гауссовой функцией координаты и минимизирует соотношение неопределенностей координата-импульс. Волновые функции возбужденных состояний отвечают более высоким локальным минимумам. Граничные условия для волновой функции для соотношения неопределенностей координата-импульс сводятся лишь к обращению в нуль при $x = \pm\infty$, в отличие от соотношения неопределенностей энергия-время. Состояние с нулевой производной в нуле ближе к гауссовому состоянию, поэтому значение минимума функционала (0.2951) оказывается ближе к минимуму соотношения неопределенностей для координаты-импульса, равному 0.25.

Данные результаты подходят для классического сигнала, например, распространяющейся классиче-

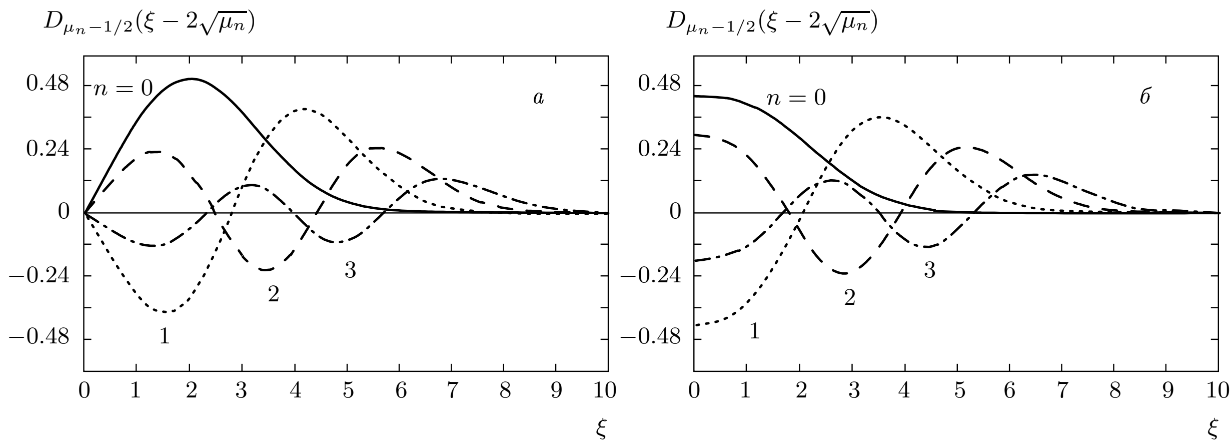

Рис. 1. Зависимости волновых функций $D_{\mu_n-1/2}(\xi-2\sqrt{\mu_n})$ для нескольких первых значений n, граничные условия: $f(0)=0$ (a), $\left.\dfrac{df(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}=0$ $(б)$

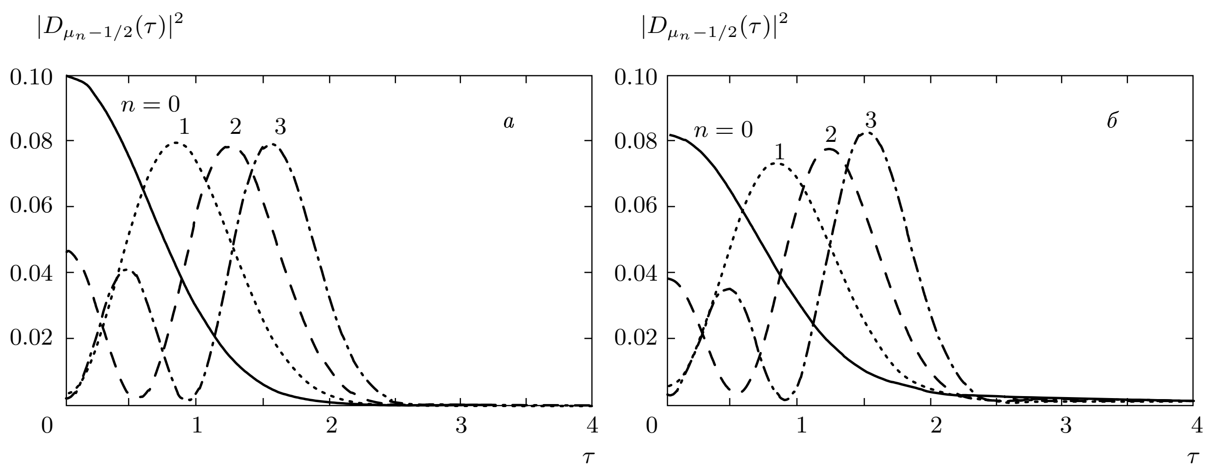

Рис. 2. Зависимости квадрата модуля волновых функций $|D_{\mu_n-1/2}(\tau)|^2$, где $D_{\mu_n-1/2}(\tau)=\int\limits_0^\infty D_{\mu_n-1/2}(\xi-2\sqrt{\mu_n})\times$ $\times e^{-i\xi\tau}d\xi$, для нескольких первых значений n, граничные условия: $f(0)=0$ (a), $\left.\dfrac{df(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}=0$ $(б)$

ской электромагнитной волны. В этом случае функция $f(\tau)$, где $\tau=x-t$, подчиняется волновому уравнению

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)f(\tau)=0.$$

Естественным условием для спектральной плотности $f(\omega)$ является условие $f(\omega=0)=0$. Условие же

$$\frac{d}{d\omega}f(\omega)|_{\omega=0}=0,$$

хотя формально и возможно, по-видимому, является не физическим, поскольку оно дает $f(\omega=0)\neq 0$, что означает присутствие постоянной составляющей сигнала на нулевой фурье-гармонике.

Специфика соотношения неопределенностей энергия-время связано с тем, что энергия задана на полуоси $[0,\infty)$. С этим же обстоятельством тесно связан факт «нелокализуемости» безмассового поля (фотонов). Из-за того что амплитуда состояний задается значениями на массовой поверхности (определены значения $\psi(k,k_0)$ как функции двух переменных не при произвольных k и k_0, а только при $k_0=k$), она оказывается всегда отличной от нуля во всем пространстве (вне области сколь угодно большого, но конечного размера, т. е. любого компакта [18, 19]). Факт нелокализуемости состояний в квантовой теории поля известен давно (см. физическое обсуждение данного вопроса, например, в работе [20]). В данном случае нелокализуемость может быть явно продемонстрирована как следствие теоремы Винера–Пэли [21]. Для нормированной функции $\psi(\varepsilon)$,

$$\int_0^\infty d\varepsilon |\psi(\varepsilon)|^2 = 1,$$

равной нулю на полуоси $\varepsilon \le 0$, но не равной нулю тождественно, допустимая степень убывания в пространстве ее фурье-образа $\psi(\tau)$ $(\tau = x - t)$ на бесконечности диктуется сходимостью интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln|\psi(\tau)|}{1+\tau^2} d\tau < \infty.$$

Отсюда следует, что амплитуда $\psi(\tau)$ не может убывать даже экспоненциально (не говоря о том, чтобы быть равной нулю вне компакта), поскольку в этом случае, если $|\psi(\tau)| \propto \exp(-\alpha|\tau|)$, то интеграл расходится. Однако амплитуда может убывать сколь угодно близко к экспоненте с любым показателем $\alpha > 0$,

$$|\psi(\tau)| \propto \exp(-\alpha|\tau|/\ln(\ln\ldots|\tau|)).$$

Подобной степени локализации фотонного поля можно добиться и в трехмерном случае [22], хотя долгое время после работы Ньютона и Вигнера [23] считалось, что наиболее быстрое убывание в пространстве может быть лишь степенным со степенью $7/2$.

Таким образом, имеют место следующие нижние границы для соотношения неопределенностей энергия-время «прилета»:

$$\begin{gathered}\sqrt{\overline{(\Delta\varepsilon)^2}\,\overline{(\Delta t)^2}}|_{f(0)=0} = 0.6715\ldots, \\ \sqrt{\overline{(\Delta\varepsilon)^2}\,\overline{(\Delta t)^2}}|_{\frac{df(\varepsilon)}{d\varepsilon}|_{\varepsilon=0}=0} = 0.2951\ldots\end{gathered} \qquad (25)$$

Для свободно распространяющегося безмассового поля (фотонов) должно иметь место первое соотношение в формуле (25), поскольку при нулевой энергии $f(0) = 0$, условие же с нулевой производной, по-видимому, не является физическим.

Основным аргументом в пользу граничного условия $f(0) = 0$ является следующее соображение. Вектор состояния $f(\varepsilon)$ есть вероятность того, что фотон обладает импульсом ($k = \omega$, где положено $c = 1$), лежащим в интервале dk. Ненулевое значение вероятности при $k = \omega = 0$ означало бы, что имеется статическая компонента поля во всем пространстве. Кроме того, поскольку квадрат модуля амплитуды $|f(\omega)|^2$ пропорционален плотности энергии (сумме квадратов электрического и магнитного полей), ненулевое значение $f(\omega)$ при $k = \omega = 0$ означало бы также присутствие статического электрического и магнитного полей во всем пространстве[3)].

В заключение отметим, что соотношения неопределенностей (25) являются лоренц-инвариантными, т. е. одинаковыми в любых инерциальных системах отсчета, в чем несложно убедиться, если сделать преобразование Лоренца для координат $x - t$ и соответствующее преобразование для вектора состояния (10).

Выражаю благодарность Академии криптографии РФ за поддержку. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант № 08-02-00559). Выражаю также благодарность С. П. Кулику и С. С. Назину за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. W. Heisenberg, Z. Phys. **60**, 56 (1927).
2. Н. Бор, *Избранные научные труды*, т. 2, Наука, Москва (1971).
3. Н. С. Крылов, В. А. Фок, ЖЭТФ **17**, 93 (1947).
4. E. P. Wigner, in *Aspects of Quantum Theory*, ed. by A. Salam and E. P. Wigner, Cambridge Univ. Press, Mass. (1972), p. 237.
5. Л. И. Мандельштам, И. Е. Тамм, Изв. АН СССР, сер. физ., **9**, 122 (1945).
6. Y. Aharonov and D. Bohm, Phys. Rev. **122**, 1649 (1961); Y. Aharonov and J. L. Safko, Ann. Phys. **91**, 279 (1975).
7. В. А. Фок, ЖЭТФ **42**, 1135 (1962).
8. С. Н. Молотков, Письма в ЖЭТФ **80**, 576 (2004).

[3)] Интересно отметить аналогию с акустическими фононами в твердом теле, которые также имеют линейный спектр. Волновая функция акустических фононов при $k = 0$ должна быть равна нулю. Ненулевая амплитуда при $k = 0$ формально отвечает за присутствие акустических фононов с нулевой частотой («статических» фононов), что означает наличие однородной деформации решетки.

9. A. S. Holevo, *Probabilistic and Statistical Aspects of Quantum Theory*, North-Holland, Amsterdam (1980).

10. P. Busch, *The Time Energy Uncertainty Relation*, arXiv:quant-ph/0105049; P. Busch, M. Grabowski, and P. J. Lahti, *Operational Quantum Physics*, Lect. Notes Phys. **31**, Springer (1995).

11. Н. Н. Боголюбов, А. А. Логунов, А. И. Оксак, И. Т. Тодоров, *Общие принципы квантовой теории поля*, Наука, Москва (1987).

12. И. М. Гельфанд, Н. Я. Виленкин, *Обобщенные функции*, вып. 4, *Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства*, Физматлит, Москва (1961).

13. Л. Д. Ландау, Р. Пайерлс, Z. Phys. **62**, 188 (1930); Z. Phys. **69**, 56 (1931); в кн. Л. Д. Ландау, *Собрание трудов*, Наука, Москва (1969), т. 1, с. 56.

14. А. Г. Майер, Е. А. Леонтович, ДАН СССР **4**, 353 (1934).

15. А. А. Харкевич, *Спектры и анализ*, Физматлит, Москва (1962).

16. В. В. Додонов, В. И. Манько, *Инварианты и эволюция нестационарных квантовых систем*, Труды ФИАН **183** (1987).

17. Г. Бейтман, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции: функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены*, Наука, Москва (1966).

18. A. M. Jaffe, Phys. Rev. **158**, 1454 (1967).

19. G. C. Hegerfeldt, Phys. Rev. D **10**, 3320 (1974); G. C. Hegerfeldt and S. N. M. Ruijsenaar, Phys. Rev. D **22**, 377 (1980).

20. Д. А. Киржниц, УФН **90**, 129 (1966).

21. Н. Винер, Р. Пэли, *Преобразование Фурье в комплексной области*, Наука, Москва (1964) [N. Wiener and R. Paley, *Fourier Transforms in the Complex Domain*, New York (1934)].

22. I. Bialynicki-Birula, Phys. Rev. Lett. **80**, 5247 (1998).

23. T. D. Newton and E. P. Wigner, Rev. Mod. Phys. **21**, 400 (1949).