

# МАГНИТНЫЙ МОМЕНТ ДВУМЕРНОГО ЭЛЕКТРОННОГО ГАЗА С УЧЕТОМ СПИН-ОРБИТАЛЬНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

*В. А. Маргулис\*, В. А. Миронов*

*Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарева  
430000, Саранск, Россия*

Поступила в редакцию 21 июля 2008 г.

Получено явное аналитическое выражение для магнитного момента двумерного электронного газа с учетом спин-орбитального взаимодействия в модели Рашба при  $T = 0$ . Исследованы случаи постоянного химического потенциала и постоянного числа электронов. Изучена зависимость магнитного момента от магнитных полей и температуры. Проведено сравнение полученных результатов с данными экспериментальных исследований намагниченности.

PACS: 71.70.Ej

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Начиная с работы [1], исследования по влиянию спин-орбитального взаимодействия на электронные свойства низкоразмерных систем вызывают повышенный интерес. Такой интерес обусловлен возможностью использования спин-орбитального взаимодействия для создания новых приборов, принцип действия которых основан на спиновой поляризации электронного газа [2].

В работах, посвященных исследованиям энергетического спектра двумерного электронного газа в присутствии спин-орбитального взаимодействия в модели Рашба показано, что во внешнем магнитном поле появляются две системы («лестницы») уровней Ландау. Такое изменение в электронном спектре приводит к существенному изменению транспортных [3, 4] и равновесных [5] характеристик электронного газа в низкоразмерных системах. Как отмечалось в работе [6], для строгого отделения эффектов, связанных с непараболичностью зоны проводимости, необходимо, чтобы влияние спин-орбитального взаимодействия было сильным, а измерение эффектов, обусловленных этим взаимодействием, должны проводиться в достаточно широком интервале магнитных полей.

Ключевым моментом для понимания физики двумерного электронного газа является знание плот-

ности состояний между уровнями Ландау [7]. В частности, отсутствие резких скачков намагниченности, наблюдавшееся в ряде экспериментальных работ, обусловлено конечной плотностью состояний между уровнями Ландау [7–9]. В работах [7, 10] сообщалось о наблюдении резких скачков намагниченности, обусловленных отсутствием связанных состояний между уровнями Ландау. Эти скачки полностью соответствуют теоретическим предсказаниям Пайерлса для намагниченности двумерного электронного газа [11]. Важно отметить, что зависимость намагниченности при постоянном числе частиц от фактора заполнения уровней показывает, что намагниченность периодически по обратному магнитному полю и скачки соответствуют четным значениям фактора заполнения [7, 10, 12] в соответствии с теоретическим предсказанием Пайерлса.

Для гетероструктур на основе GaAs найден [1, 5] электронный спектр в магнитном поле, нормальном к плоскости двумерного электронного газа. Исследована магнитная восприимчивость электронного газа в слабом магнитном поле  $B$  при температуре газа  $T = 0$ . В работе [13] рассматривалось влияние спин-орбитального взаимодействия в модели Рашба на спектр уровней Ландау для двумерного электронного газа в наклонном магнитном поле. В работах [14, 15] теоретически исследовался спектр двумерного электронного газа в магнитном поле при одновременном учете влияния членов Рашба, Дрессельхауза и Зеемана.

\*E-mail: theorphysics@mrsu.ru

Целью настоящей работы является аналитическое и численное исследование магнитного момента двумерного электронного газа в присутствии спин-орбитального взаимодействия в модели Рашба в общем случае произвольного поля и температуры. При этом рассматриваются случаи как постоянного химического потенциала, так и постоянного числа электронов.

## 2. МАГНИТНЫЙ МОМЕНТ ПРИ ПОСТОЯННОМ ХИМИЧЕСКОМ ПОТЕНЦИАЛЕ

Рассматривается двумерный электронный газ на плоскости  $xy$ , находящийся в постоянном магнитном поле  $\mathbf{B}$ , направленном вдоль оси  $z$ . Электронный энергетический спектр такой системы с учетом спин-орбитального взаимодействия в модели Рашба описывается выражением [5]

$$E_s^\pm = \hbar\omega_c \left( s \pm \sqrt{\delta^2 + s\gamma} \right), \quad (1)$$

где  $s = 1, 2, 3, \dots$ , для  $s = 0$  существует только уровень  $E_0^+ = \hbar\omega_c\delta$ ,  $\delta = \frac{1}{2}(1 - gm^*/2m_0)$ ,  $\gamma = 2\alpha^2 m^*/\hbar^3 \omega_c$ ,  $g$  — электронный  $g$ -фактор,  $\alpha$  — эффективная константа спин-орбитального взаимодействия,  $\omega_c$  — циклотронная частота,  $m^*$  — эффективная масса электрона,  $m_0$  — масса свободного электрона.

Магнитный момент  $M$  единицы площади двумерного электронного газа при постоянном химическом потенциале будем искать по стандартной формуле:

$$M = - \left( \frac{\partial \Omega}{\partial B} \right)_{\mu, T}, \quad (2)$$

где  $\mu$  — химический потенциал,  $\Omega$  — термодинамический потенциал,

$$\Omega = -TD \sum_i \ln \left[ 1 + \exp \left( \frac{\mu - E_i}{T} \right) \right], \quad (3)$$

$i$  — совокупность всех квантовых чисел, характеризующих состояние электрона в системе,  $D = 1/2\pi l_c^2$  — кратность вырождения магнитного уровня для двумерных электронов на единицу площади,  $l_c = \sqrt{\hbar/m^*\omega_c}$ . Формулу (3) для случая двумерного электронного газа можно преобразовать к следующему виду [16]:

$$\Omega(\mu, T) = - \int_0^\infty \Omega(\varepsilon, 0) \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} d\varepsilon, \quad (4)$$

где  $f_0 = 1/\{1 + \exp[(\varepsilon - \mu)/T]\}$  — распределение Ферми.

Подставляя выражение (4) в (2), получаем выражение для магнитного момента  $M$  двумерного электронного газа при  $T \neq 0$ :

$$M(\mu, T) = - \int_0^\infty M(\varepsilon, 0) \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} d\varepsilon. \quad (5)$$

При  $T = 0$  термодинамический потенциал  $\Omega(\mu, 0) = E - N\mu$ , где  $E$  — энергия электронного газа,  $N$  — число электронов в системе. С учетом кратности вырождения  $D$  уровня Ландау получим

$$\Omega(\varepsilon, 0) = D \sum_{s=0}^n (E_s^+ - \varepsilon) + D \sum_{s=1}^m (E_s^- - \varepsilon). \quad (6)$$

Суммирование по  $s$  следует проводить только до таких значений  $s$ , для которых  $E_s^\pm < \varepsilon$ . Обозначим через  $n$  и  $m$  самые большие значения  $s$  соответственно в первой и второй суммах в (6).

Найдем термодинамический потенциал при нулевой температуре подстановкой выражения (1) в (6):

$$\begin{aligned} \Omega(\varepsilon, 0) = D \left\{ \frac{\hbar\omega_c}{2} [n(n+1) + m(m+1) + 2\delta] - \right. \\ \left. - \varepsilon(n+m+1) + \hbar\omega_c \left[ \sum_{s=1}^n \sqrt{\delta^2 + s\gamma} - \sum_{s=1}^m \sqrt{\delta^2 + s\gamma} \right] \right\}. \quad (7) \end{aligned}$$

Применяя формулу сдвига для обобщенной дзета-функции Римана,

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+a)^z} = \zeta(z, a) - \zeta(z, n+a+1), \quad (8)$$

где  $a \neq 0, -1, -2, \dots$ , из формулы (7) можно получить

$$\begin{aligned} \Omega(\varepsilon, 0) = D \frac{\hbar\omega_c}{2} [n(n+1) + m(m+1) + 2\delta] - \\ - D\varepsilon(n+m+1) - D\hbar\omega_c\sqrt{\gamma} \times \\ \times \left[ \zeta \left( -\frac{1}{2}, 1+n+\frac{\delta^2}{\gamma} \right) - \zeta \left( -\frac{1}{2}, 1+m+\frac{\delta^2}{\gamma} \right) \right]. \quad (9) \end{aligned}$$

Используя формулу суммирования Пуассона, из соотношений (9) и (2) найдем магнитный момент двумерного электронного газа при  $T = 0$ :

$$\begin{aligned} \frac{M(\mu, 0)}{\mu_B^*} = & -\frac{m^* \omega_c}{\pi \hbar} \left\{ 2\delta - 2\delta^2 - \frac{1}{3} - \right. \\ & -\frac{1}{2} \left( x_1 + \frac{\mu}{\hbar \omega_c} \right) B_1(x_1 - [x_1]) - \frac{1}{2} \left( x_2 + \frac{\mu}{\hbar \omega_c} \right) \times \\ & \times B_1(x_2 - [x_2]) + B_2(x_1 - [x_1]) + B_2(x_2 - [x_2]) - \\ & - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\gamma}}{4\pi k^{3/2}} \left[ (2ak \cos(ak) + 3 \sin(ak)) \times \right. \\ & \times \left( C \left( 2(x_2 - \mu/\hbar \omega_c) \sqrt{k/\gamma} \right) + \right. \\ & + C \left( 2(x_1 - \mu/\hbar \omega_c) \sqrt{k/\gamma} \right) ) + \\ & + (2ak \sin(ak) - 3 \cos(ak)) \times \\ & \times \left( S \left( 2(x_2 - \mu/\hbar \omega_c) \sqrt{k/\gamma} \right) + \right. \\ & \left. \left. + S \left( 2(x_1 - \mu/\hbar \omega_c) \sqrt{k/\gamma} \right) \right) \right] \left. \right\}, \quad (10) \end{aligned}$$

где  $\mu_B^* = e\hbar/2m^*c$  — эффективный магнетон Бора,  $a = 2\pi\delta^2/\gamma$ , а  $x_1$  и  $x_2$  — корни уравнения  $E_x^\pm = \mu$ ;  $[x_1]$  и  $[x_2]$  — целые части соответственно  $x_1$  и  $x_2$ . Функции  $B_1(x)$  и  $B_2(x)$  являются первым и вторым полиномами Бернулли, а  $C(x)$  и  $S(x)$  — интегралы Френеля. На рис. 1 представлены графики зависимостей магнитного момента (10) от магнитного поля с учетом и без учета ( $\alpha = 0$ ) спин-орбитального взаимодействия.

Магнитный момент  $M/\mu_B^*$  двумерных электронов при  $T \neq 0$  (жирная линия на рис. 1б) можно получить из выражений (10) и (5), в которых при интегрировании необходимо учесть, что  $x_1$  и  $x_2$  являются корнями уравнения  $E_x^\pm = \varepsilon$ .

### 3. МАГНИТНЫЙ МОМЕНТ ПРИ ПОСТОЯННОМ ЧИСЛЕ ЭЛЕКТРОНОВ

Рассмотрим магнитный момент двумерного электронного газа при постоянном числе  $N$  электронов в системе. Этот случай наиболее интересный, поскольку именно он реализуется в большинстве экспериментов (например, [12, 17]) по измерению намагниченности электронного газа. Как отмечалось [16], в этом случае при  $T = 0$  энергия Ферми равна энергии самого верхнего занятого уровня, но этот уровень заселен только частично (в противоположность условию вычисления термодинамического потенциала (6), при котором предполагается, что все уровни заселены полностью), причем при уменьшении поля эта заселенность изменяется от нуля до  $D$ . Таким образом, при последовательном заполнении уровней Ландау величина  $\mu$  все время соответ-

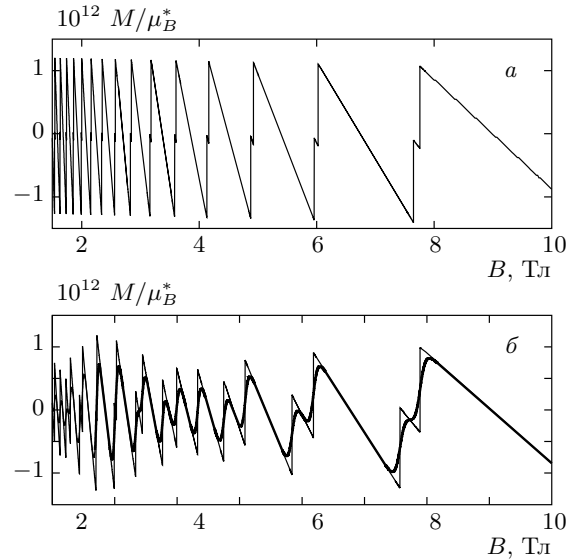


Рис. 1. Зависимости магнитного момента от магнитного поля: а — без учета спин-орбитального взаимодействия ( $\alpha = 0$ ), но со снятым спиновым вырождением при  $T = 0$ ; б — с учетом спин-орбитального взаимодействия ( $\alpha = 2 \cdot 10^{-11}$  эВ · м,  $\mu = 10^{-13}$  эрг,  $g = 2$ ,  $m^* = 0.05m_0$ ) при  $T = 0$  (тонкая линия) и  $T = 4$  К (жирная линия)

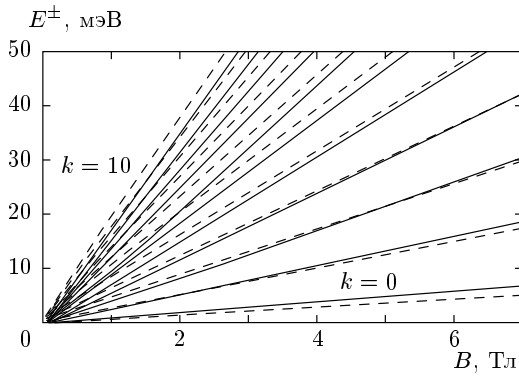
ствует самому верхнему занятому уровню и имеет пилообразный характер (т. е. зависит как от  $N$ , так и от магнитного поля  $B$ ). Поэтому для вычисления магнитного момента при постоянном числе электронов воспользуемся формулой  $M = -(\partial F/\partial B)_{N,T}$ , где  $F = E - TS$  — свободная энергия,  $S$  — энтропия системы. Тогда при  $T = 0$  магнитный момент определяется как

$$M = - \left( \frac{\partial E}{\partial B} \right)_N. \quad (11)$$

Для удобства вычисления энергии  $E$  электронного газа выберем другую параметризацию спектра (1) [18]:

$$E_k^\pm = \hbar \omega_c \left[ \left( k + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \right) \mp \sqrt{\delta^2 + \left( k + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \right) \gamma} \right], \quad (12)$$

где теперь  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Поскольку при изменении магнитного поля уровни могут пересекаться (рис. 2), при нахождении энергии  $E$  возможны два случая. Первый — самый верхний частично заселенный уровень соответствует лестнице уровней Ландау для



**Рис. 2.** Зависимости энергетического спектра электронов в модели Рашба от магнитного поля для  $0 \leq k \leq 10$ . Сплошные линии соответствуют электронам с энергией  $E^+$ , штриховые — электронам с энергией  $E^-$ ;  $g = 5$ ,  $\alpha = 1.2 \cdot 10^{-11}$  эВ · м,  $m^* = 0.067m_0$

электронов с энергией  $E_n^+$ , а второй — для другой лестницы самый верхний заселенный уровень  $E_m^-$  заполнен полностью, т. е.  $E_m^- < E_n^+$ :

$$E = E_1 = D \sum_{k=0}^{n-1} E_k^+ + [N - (n + m + 1)D] E_n^+ + D \sum_{k=0}^m E_k^- \quad (13)$$

Вторая ситуация является обратной, т. е.  $E_m^- \geq E_n^+$ , где теперь уровень  $E_m^-$  заполнен частично, а уровень  $E_n^+$  заполнен полностью:

$$E = E_2 = D \sum_{k=0}^{m-1} E_k^- + [N - (n + m + 1)D] E_m^- + D \sum_{k=0}^n E_k^+ \quad (14)$$

Отметим, что в обеих ситуациях общее число  $n + m + 1$  полностью заполненных уровней равно целой части отношения  $N/D$ .

Найдем магнитный момент двумерного электронного газа при постоянном числе электронов и  $T = 0$ , подставляя формулы (13) и (14) в (11) (при этом учтем соотношение (8) для дзета-функции Римана). Для первой ситуации ( $M = M_1$ ) получим

$$\begin{aligned} \frac{M_1}{\mu_B^*} = & -\frac{m^* \omega_c}{\pi \hbar} \left\{ n(n+1) + m(m+1) + 2\delta + \right. \\ & + \frac{3\sqrt{\gamma}}{2} \left[ \zeta\left(-\frac{1}{2}, 1+n+\frac{\delta^2}{\gamma}\right) - \zeta\left(-\frac{1}{2}, 1+m+\frac{\delta^2}{\gamma}\right) \right] + \\ & + \frac{\delta^2}{2\sqrt{\gamma}} \left[ \zeta\left(\frac{1}{2}, 1+n+\frac{\delta^2}{\gamma}\right) - \zeta\left(\frac{1}{2}, 1+m+\frac{\delta^2}{\gamma}\right) \right] + \\ & + 2 \left( \frac{N}{2D} - (n+m+1) \right) (n+1 - \sqrt{\delta^2 + (n+1)\gamma}) + \\ & \left. + \frac{1}{2} \left( \frac{N}{D} - (n+m+1) \right) \frac{\gamma(n+1)}{\sqrt{\delta^2 + (n+1)\gamma}} \right\}, \quad (15) \end{aligned}$$

а для второй ( $M = M_2$ ) —

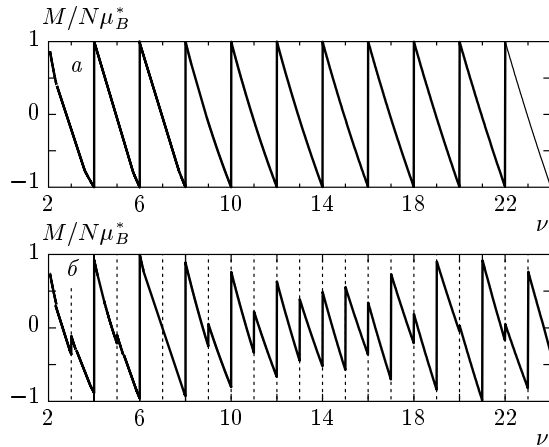
$$\begin{aligned} \frac{M_2}{\mu_B^*} = & -\frac{m^* \omega_c}{\pi \hbar} \left\{ (2+n)(1+n) + m(m-1) + 2\delta + \right. \\ & + \frac{3\sqrt{\gamma}}{2} \left[ \zeta\left(-\frac{1}{2}, 2+n+\frac{\delta^2}{\gamma}\right) - \zeta\left(-\frac{1}{2}, m+\frac{\delta^2}{\gamma}\right) \right] + \\ & + \frac{\delta^2}{2\sqrt{\gamma}} \left[ \zeta\left(\frac{1}{2}, 2+n+\frac{\delta^2}{\gamma}\right) - \zeta\left(\frac{1}{2}, m+\frac{\delta^2}{\gamma}\right) \right] + \\ & + 2 \left( \frac{N}{2D} - (n+m+1) \right) (m + \sqrt{\delta^2 + m\gamma}) - \\ & \left. - \frac{1}{2} \left( \frac{N}{D} - (n+m+1) \right) \frac{\gamma m}{\sqrt{\delta^2 + m\gamma}} \right\}. \quad (16) \end{aligned}$$

Подчеркнем, что магнитный момент  $M$  при  $N = \text{const}$  определяется формулой (15) либо (16) в зависимости от того, какой лестнице Ландау принадлежит самый верхний частично заселенный уровень, соответственно  $E^+$  либо  $E^-$ . На рис. 3 представлены зависимости магнитного момента двумерного электронного газа от фактора заполнения  $\nu = N/D$ , из расчета на один электрон.

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе получено точное аналитическое выражение для магнитного момента двумерного электронного газа с учетом спин-орбитального взаимодействия в модели Рашба при  $T = 0$  и численно исследовано влияние температуры на поведение зависимости  $M(B)$ .

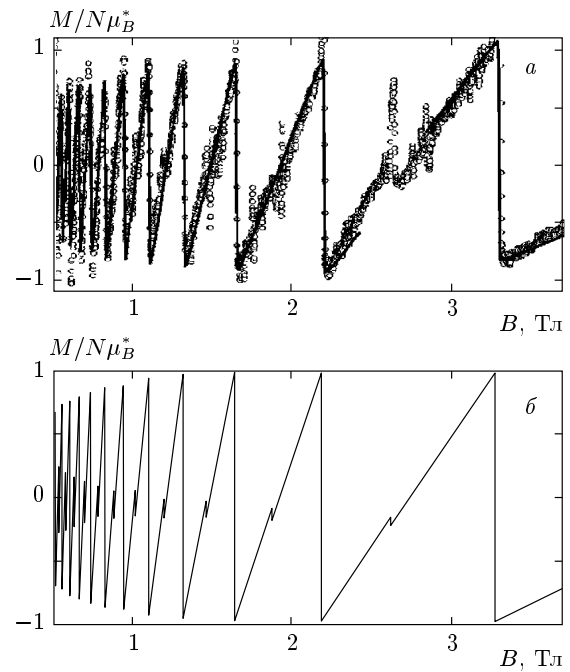
Зависимость (10) магнитного момента  $M(\mu, 0)$  от магнитного поля  $B$  имеет характер неперiodических осцилляций (см. рис. 1). Это связано с тем, что вырожденный уровень Ландау  $E_n$  из-за спин-орбитального взаимодействия расщепляется на два,  $E_n^+$  и  $E_{n+1}^-$ . Эти уровни при прохожде-



**Рис. 3.** Зависимости магнитного момента от фактора заполнения при  $T = 0$  и  $N = \text{const}$ :  $a$  — без учета спинового расщепления ( $\alpha = 0, g = 0$ );  $b$  — с учетом спин-орбитального взаимодействия при  $\alpha = 0.8 \cdot 10^{-11}$  эВ · м,  $g = 5, m^* = 0.067m_0$  и концентрации электронов  $n_s = 4 \cdot 10^{11}$  см $^{-2}$

нии через уровень Ферми и приводят к осцилляциям. В результате наложения осцилляций от электронов с двумя направлениями спина получаются осцилляции с изменяющейся амплитудой. Как следует из выражения (7), с изменением поля величина  $\Omega(\mu, 0)$  изменяется скачком с началом заполнения следующего уровня  $E_s^\pm$ . Эти скачки приводят к пилообразным пикам на зависимости  $M(\mu, 0)$ , показанным на рис. 1. Большие и более мелкие пики обусловлены соответственно не зависящим и зависящими от спина и спин-орбитального взаимодействия слагаемыми в выражении (10). Последние, как видно из рис. 1б, сильно размываются даже при довольно низких температурах.

Физическое объяснение возникновения осцилляций магнитного момента, которое дано для случая постоянного химического потенциала  $\mu$ , не применимо к случаю постоянного значения числа частиц  $N$ . Осцилляции магнитного момента (см. рис. 3б) в этом случае связаны с переменным числом электронов на частично заполненном верхнем уровне лестницы. Как отмечалось в предыдущем разделе, в зависимости от  $N$ , магнитного поля и параметров энергетического спектра электронов этот уровень может принадлежать различным «спиновым» лестницам уровней Ландау. Это и приводит к изменению амплитуды осцилляций, что видно на рис. 3б. Кроме того, осцилляции являются периодичными по  $\nu$ , а значит, и по обратному полю. Сравнение



**Рис. 4.** Сравнение экспериментальных [7] данных ( $a$ ) с нашими результатами ( $b$ ) для магнитного момента при  $T = 0$  и  $N = \text{const}$  с учетом спин-орбитального взаимодействия при  $\alpha = 0.25 \cdot 10^{-11}$  эВ · м,  $g = -0.44, m^* = 0.067m_0, n_s = 3.18 \cdot 10^{11}$  см $^{-2}$

зависимостей магнитного момента двумерного электронного газа без учета спин-орбитального взаимодействия и спинового расщепления уровней Ландау (рис. 3а) от магнитного поля и (рис. 3б) показывает, что учет спин-орбитального взаимодействия в вычислении момента приводит к появлению скачков магнитного момента и при нечетных значениях фактора заполнения. Это соответствует результатам экспериментальных работ [7, 10, 12], в которых исследовалась намагниченность двумерной электронной системы на основе гетероструктуры AlGaAs/GaAs. Как отмечалось в предыдущем разделе, случай магнитного момента при  $N = \text{const}$  реализуется в эксперименте, поэтому мы можем сравнить наши расчеты (рис. 4б) с экспериментальными результатами [7, рис. 2а], представленными на рис. 4а. Видно, что вычисленный нами магнитный момент хорошо воспроизводит основные характерные черты экспериментальных результатов, такие как зависимость амплитуды осцилляций от магнитного поля, наличие дополнительных скачков в намагниченности (на фоне основных, предсказанных Пайерлсом) при нечетных значениях фактора заполнения  $\nu$ .

Следует отметить, что для наблюдения этих осцилляций необходимо, чтобы выполнялись два условия: 1) ширина уровней энергии должна быть много меньше, чем расстояние между ближайшими соседними уровнями,  $\Delta E \gg T$ ; 2) уровни энергии не должны быть сильно размыты рассеянием,  $\Delta E \gg \hbar\tau$  ( $\tau$  — время релаксации).

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 08-02-01035).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Э. И. Рашба, ФТТ **2**, 1224 (1960).
2. S. Datta and B. Das, Appl. Phys. Lett. **56**, 665 (1990).
3. X. F. Wang and P. Vasilopoulos, Phys. Rev. B **67**, 085313 (2003).
4. J. Luo, H. Munekata, F. F. Fang et al., Phys. Rev. B **41**, 7685 (1990).
5. Yu. A. Bychkov and E. I. Rashba, J. Phys. C **17**, 6039 (1984).
6. Ю. Б. Васильев, С. Д. Сучалкин, С. В. Иванов и др., Письма в ЖЭТФ **79**, 674 (2004).
7. M. A. Wilde, M. P. Schwarz, Ch. Heyn et al., Phys. Rev. B **73**, 125325 (2006).
8. M. A. Wilde, M. Rhode, Ch. Heyn et al., Phys. Rev. B **72**, 165429 (2005).
9. N. Ruhe, J. I. Springborn, Ch. Heyn et al., Phys. Rev. B **74**, 235326 (2006).
10. S. A. J. Wieggers, M. Specht, L. P. Levy et al., Phys. Rev. Lett. **79**, 3238 (1997).
11. R. Peierls, Z. Phys. **81**, 186 (1933).
12. M. P. Schwarz, M. A. Wilde, S. Groth et al., Phys. Rev. B **65**, 245315 (2002).
13. Ю. А. Бычков, В. И. Мельников, Э. И. Рашба, ЖЭТФ **98**, 717 (1990).
14. M. Zarea and S. E. Ulloa, Phys. Rev. B **72**, 085342 (2005).
15. M. Valin-Rodriguez and R. G. Nazmitdinov, Phys. Rev. B **73**, 235306 (2006).
16. Д. Шенберг, *Магнитные осцилляции в металлах*, Мир, Москва (1986).
17. I. Meinel, T. Hengstmann, D. Grundler et al., Phys. Rev. Lett. **82**, 819 (1999).
18. M. Akabori, V. A. Guzenko, T. Sato et al., Phys. Rev. B **77**, 205320 (2008).