

К НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ДВИЖЕНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ РАЗРЫВОВ

*М. Л. Зайцев**, *В. Б. Аккерман***

*Институт проблем безопасного развития атомной энергетики Российской академии наук
115191, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 4 августа 2008 г.

Полная система гидродинамических уравнений, описывающих свободную поверхность невязкой жидкости, тангенциальный разрыв и развитие гидродинамической неустойчивости фронта реакции, сведена к замкнутой системе поверхностных уравнений с использованием переменных Лагранжа, специальных интегралов движения и их аналогов. Показано, что завихренность играет принципиальную роль в характере движения гидродинамических разрывов, придавая уравнениям дифференциальный вид. В изоэнтропическом приближении демонстрируется, как учесть вызванные этим движением колебания плотности жидкости. Полученная система уравнений согласуется с ранее известными аналитическими решениями, полученными в частных случаях.

PACS: 47.70.Pq, 47.85.Dh

1. ВВЕДЕНИЕ

Одним из важнейших вопросов, возникающих при решении множества гидродинамических задач, является описание поверхностей разрывов [1]. В частности, необходимо учитывать динамику тангенциального разрыва при описании гидродинамических неустойчивостей (Рэлея–Тейлора, Дарье–Ландау, Мешкова–Рихтмайера, Кельвина–Гельмгольца), гравитационных волн и других явлений [1–4]. Тангенциальный разрыв встречается в струях, следах от летящего тела или на поверхности воды в виде ветровых волн, а также является одним из препятствий, стоящих на пути осуществления управляемого инерциального термоядерного синтеза [5–7]. Понимание динамики распространения тангенциального разрыва позволило бы глубже понять механизм их развития и обнаружить новые эффекты и явления. Между тем, уравнения движения тангенциального и других разрывов в общем случае до сих пор полностью не определены [2, 5, 8]; динамика тангенциального разрыва исследована только в некоторых частных случаях [3, 4]. Например, уравнение фронта горения, подверженного неустойчивости Дарье–Ландау, досконально по-

лучено лишь в приближении слабо искривленного пламени и/или малого теплового расширения при горении [9–12]. Также не найдено в общем случае решение нелинейной задачи о неустойчивости Рэлея–Тейлора. Аналитическое решение может быть получено лишь в двух предельных случаях для бесконечно тонких пленок [3] и в приближении «опрокинутой мелкой воды» [4].

Цель данной работы состоит в сведении уравнений гидродинамики невязкой среды «в объеме» к уравнениям на поверхности. Подобная процедура позволяет уменьшить размерность задачи на единицу, что существенно сокращает необходимые вычислительные мощности [12]. В данной работе это показано на примерах свободной поверхности, тангенциального разрыва и фронта пламени при различных внешних условиях. При этом не делается никаких существенных упрощающих предположений, которые ограничивали бы общность рассмотрения этих явлений. Исключение составляет лишь слабая искривленность фронта. Однако это делается только ради упрощения математических преобразований. При необходимости данную теорию можно обобщить и для случая сильно нелинейных эффектов с помощью математического аппарата, изложенного в Приложениях А и Б.

*E-mail: mlzaytsev@gmail.com

**E-mail: slava.akkerman@gmail.com

2. УРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

2.1. Псевдовязкий поток

Рассмотрим движение свободной поверхности вязкой несжимаемой жидкости в двумерном случае, схема которого показана на рис. 1. Граничные условия на поверхности жидкости имеют вид [1]

$$\sigma'_{ik} n_k - n_i P = 0, \tag{1}$$

$$V + u_n = 0, \tag{2}$$

где \mathbf{n} — внутренняя нормаль, V — проекция скорости фронта на отрицательное направление вектора \mathbf{n} , а

$$\sigma'_{ik} = \eta \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \tag{3}$$

— тензор вязких напряжений, η — коэффициент вязкости. Уравнение (1) представляет собой третий закон Ньютона на границе жидкости, уравнение (2) — условие непроницаемости. Следовательно, в декартовой системе координат $(\mathbf{n}, \boldsymbol{\tau})$

$$P = 2\eta \frac{\partial u_n}{\partial x_n} = -2\eta \frac{\partial u_\tau}{\partial \tau}, \tag{4}$$

$$\begin{aligned} \eta \left(\frac{\partial u_\tau}{\partial n} + \frac{\partial u_n}{\partial \tau} \right) &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \omega &= \frac{\partial u_\tau}{\partial n} - \frac{\partial u_n}{\partial \tau} = 2 \frac{\partial V}{\partial \tau} + 2 \frac{u_\tau}{R}, \end{aligned} \tag{5}$$

где ω — завихренность, R — радиус кривизны. Формула (5) означает равенство нулю вязкого касательного напряжения на свободной поверхности жидкости (условие Рэлея). В пределе $\eta \rightarrow 0$ давление на

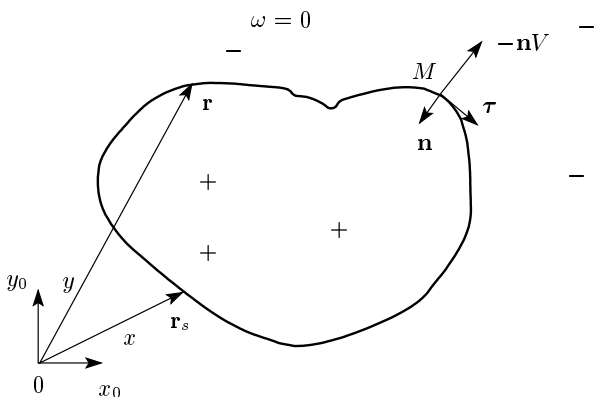


Рис. 1. Свободная поверхность псевдовязкой жидкости и фронт пламени в двумерном случае

поверхности не меняется, $P = \text{const}$, следовательно, уравнения Навье–Стокса переходят в уравнения Эйлера

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega} + \nabla \left(\frac{P}{\rho} + \frac{\mathbf{u}^2}{2} \right) = 0, \tag{6}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} = \nabla \times [\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}], \tag{7}$$

$$\text{div } \mathbf{u} = 0. \tag{8}$$

Предположим, что течение жидкости является невязким, например, потенциальным [1] (примеры вихревых течений такого вида приведены в работе [13]). Тогда с учетом граничных условий (1), (2), из уравнений (6)–(8) получаем

$$\begin{aligned} \frac{du_\tau}{dt} &= \frac{d(\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau})}{dt} = \boldsymbol{\tau} \cdot \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \mathbf{u} \cdot \frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt} = \\ &= -u_\tau \frac{\partial u_\tau}{\partial \tau} + u_n \left(\mathbf{n} \cdot \frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt} \right) = \\ &= -u_\tau \left(\frac{\partial u_\tau}{\partial \tau} \right)' + u_\tau \frac{V}{R} + V \frac{\partial V}{\partial \tau}, \end{aligned} \tag{9}$$

$$\frac{d\omega}{dt} = -u_\tau \frac{\partial \omega}{\partial \tau}, \tag{10}$$

где $(\dots)'$ означает дифференцирование строго вдоль свободной границы. Таким образом, система уравнений (5), (9), (10) определяет движение свободной границы такой жидкости. Если жидкость находится в гравитационном поле, то формула (9) приобретает вид

$$\frac{du_\tau}{dt} = -u_\tau \left(\frac{\partial u_\tau}{\partial \tau} \right)' + u_\tau \frac{V}{R} + V \frac{\partial V}{\partial \tau} - \mathbf{g} \cdot \boldsymbol{\tau}, \tag{11}$$

где \mathbf{g} — вектор ускорения свободного падения. В этом случае уравнения (5), (10), (11) должны описывать поверхностные гравитационные волны и неустойчивость Рэлея–Тейлора в принятых выше предположениях. Преимущество данной системы состоит в том, что она относительно проста. Ее можно смоделировать и получить качественные результаты даже в двумерном случае. В изоэнтропическом случае, $s = \text{const}$, малые изменения давления P , температуры $T = T_S(P)$ и плотности $\rho = \rho_S(P)$ можно учесть с помощью уравнения (4).

2.2. Невязкий поток

Рассмотрим движение свободной поверхности невязкой и несжимаемой жидкости в общем (трехмерном) случае, см. рис. 2. При этом единственное предположение заключается в том, что верны

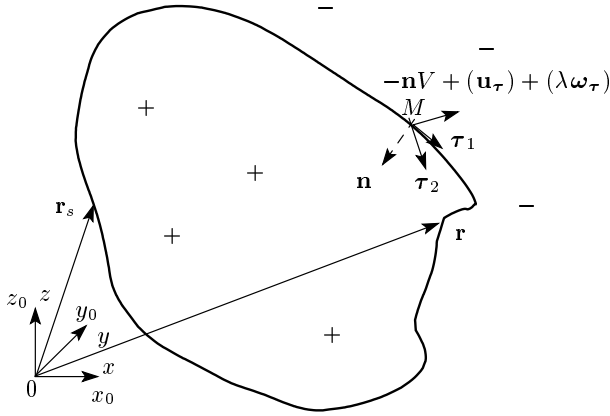


Рис. 2. Распространение свободной поверхности идеальной жидкости и фронта пламени в трехмерном случае

уравнения (6)–(8). В этом случае граничные условия на свободной границе жидкости (1), (2) принимают вид [1]

$$P = \text{const}, \quad (12)$$

$$V + u_n = 0. \quad (13)$$

Будем рассматривать слабые искривления поверхности разрыва, пренебрегая всеми слагаемыми, связанными с кривизной. Рассмотрим точку $M(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{r} = (x, y, z)$, движущуюся со скоростью $-\mathbf{n}V + \mathbf{u}_\tau$ на свободной поверхности. Тогда для точки M в системе координат $(\mathbf{n}, \tau_1, \tau_2)$ с учетом граничных условий (12), (13) из уравнений (6)–(8) следует, что

$$\frac{du_1}{dt} = \frac{d(\mathbf{u} \cdot \tau_1)}{dt} = V \frac{\partial V}{\partial \tau_1}, \quad (14)$$

$$\frac{du_2}{dt} = \frac{d(\mathbf{u} \cdot \tau_2)}{dt} = V \frac{\partial V}{\partial \tau_2}, \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\omega_n}{dt} &= \frac{d(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n})}{dt} = \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla u_n + \boldsymbol{\omega}_\tau \cdot \frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{\tau}} = \\ &= -\omega_n \left(\frac{\partial u_1}{\partial \tau_1} + \frac{\partial u_2}{\partial \tau_2} \right), \end{aligned} \quad (16)$$

где

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} - V \frac{\partial}{\partial n} + \mathbf{u}_\tau \cdot \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\tau}} \quad (17)$$

— полная производная по времени для любой точки поверхности [14]. Здесь и далее использовано соотношение

$$\frac{d\mathbf{n}}{dt} \cdot \boldsymbol{\tau} = \frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{\tau}} \quad (18)$$

и выбрана такая метрика на подвижной поверхности, что

$$\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2 = 0, \quad \frac{d\boldsymbol{\tau}_1}{dt} \cdot \boldsymbol{\tau}_2 = 0 \quad (19)$$

(см. Приложение А). Перейдем взаимно однозначно к лагранжевым переменным начального положения частиц газа и времени \mathbf{r}_0, t (т. е. к разметке):

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{u}(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t) \quad (20)$$

$$\text{и } \mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_0(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{r}_0|_{t=0} = \mathbf{r}.$$

Тогда из (13), (20) для точки M следует

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}_0}{dt} &= \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial t} - V \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial n} + \mathbf{u}_\tau \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial \boldsymbol{\tau}} = \\ &= -(u_n + V) \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial n} = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

В трехмерном случае уравнения Эйлера (6)–(8) допускают интегралы движения $\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla x_0, \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla y_0, \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla z_0$ и Δ (см. Приложение Б), т. е. $\Delta = 1, \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla i_0 = \omega_{0i}(\mathbf{r}_0)$, где $i = x, y, z$, а $\boldsymbol{\omega}_0(\mathbf{r}_0)$ — начальное распределение завихренности. В системе координат $\boldsymbol{\tau} = (\mathbf{n}, \tau_1, \tau_2)$ имеем

$$\frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial \boldsymbol{\tau}} = \frac{\partial (x_0, y_0, z_0)}{\partial (\tau_1, \tau_2, n)} = 1, \quad (22)$$

$$\omega_n \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial n} + \omega_1 \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial \tau_1} + \omega_2 \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial \tau_2} = \boldsymbol{\omega}_0(\mathbf{r}_0). \quad (23)$$

Исключая из формул (22), (23) три величины $\partial x_0 / \partial n, \partial y_0 / \partial n, \partial z_0 / \partial n$, входящие туда линейно, получаем

$$\begin{aligned} \omega_n &= \left| \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial \tau_1} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial \tau_2} \cdot \boldsymbol{\omega}_0 - \omega_1 \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial \tau_1} - \omega_2 \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial \tau_2} \right| = \\ &= \left| \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial \tau_1} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial \tau_2} \cdot \boldsymbol{\omega}_0(\mathbf{r}_0) \right|. \end{aligned} \quad (24)$$

Система поверхностных дифференциальных уравнений (14), (15), (21), (24) должна определять скорость V свободной границы в любой момент времени. Для этого следует продифференцировать по времени выражение (24). Поскольку в переменных Лагранжа эта граница не движется [15], реально эта система описывает движение поверхности в терминах самой поверхности. Пусть $z_0 = f(x_0, y_0)$ — уравнение фронта в переменных Лагранжа. Тогда формула (24) сводится к следующей:

$$\omega_n - \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial x_0}{\partial \tau_1} & \frac{\partial x_0}{\partial \tau_2} \\ \frac{\partial y_0}{\partial \tau_1} & \frac{\partial y_0}{\partial \tau_2} \end{array} \right| G(x_0, y_0) = 0, \quad (25)$$

где

$$\begin{aligned} G(x_0, y_0) &= \omega_{0z} - \frac{\partial f}{\partial x_0} \omega_{0x} - \frac{\partial f}{\partial y_0} \omega_{0y} = \\ &= \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_0} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y_0} \right)^2} \omega_{0n}. \end{aligned}$$

В начальный момент требуется знать положение границы, касательную скорость жидкости $\mathbf{u}_\tau = (u_1, u_2)$ и нетривиальную завихренность $\omega_0(\mathbf{r}_0)$ на ней. Если $\omega_0(\mathbf{r}_0) = 0$ на границе, то из (22), (23) следует, что $\omega = 0$ на границе в любой другой момент времени, и формулы (16), (24) можно отбросить вследствие теоремы Томпсона [1]. Тогда можно построить аналогичную теорию для ненулевых пространственных производных от $\omega(\mathbf{r}), \mathbf{r}_0(\mathbf{r})$. Покажем это на следующем примере. Из уравнений (16), (25) следует, что если на границе $\omega_{0n} = 0$, то это будет выполняться там и в любой другой момент времени, т. е. уравнения (16), (24) исчезают. Однако в этом случае из формулы (23) следует уравнение

$$\omega_1 \frac{\partial i_0}{\partial \tau_1} + \omega_2 \frac{\partial i_0}{\partial \tau_2} = \omega_{0i}, \quad i_0 = x_0, y_0, \quad (26)$$

позволяющее определить ω_1 и ω_2 . Кроме того,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial n} &= \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial n} - V \frac{\partial^2 \mathbf{r}_0}{\partial n^2} + \mathbf{u}_\tau \cdot \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial n} = \\ &= \left(\frac{\partial u_1}{\partial \tau_1} + \frac{\partial u_2}{\partial \tau_2} \right) \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial n} - \left(\omega_2 + \frac{\partial u_n}{\partial \tau_1} \right) \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial \tau_1} + \\ &\quad + \left(\omega_1 - \frac{\partial u_n}{\partial \tau_2} \right) \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial \tau_2}. \end{aligned} \quad (27)$$

Продифференцировав (24) в направлении вектора \mathbf{n} , получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega_n}{\partial n} &= -\frac{\partial \omega_1}{\partial \tau_1} - \frac{\partial \omega_2}{\partial \tau_2} = \left| \frac{\partial^2 \mathbf{r}_0}{\partial n \partial \tau_1} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial \tau_2} \cdot \omega_0(\mathbf{r}_0) \right| + \\ &\quad + \left| \frac{\partial^2 \mathbf{r}_0}{\partial \tau_1} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}_0}{\partial n \partial \tau_2} \cdot \omega_0(\mathbf{r}_0) \right| + \\ &\quad + \left| \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial \tau_1} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial \tau_2} \cdot \frac{\partial \omega_0}{\partial \mathbf{r}_0} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial n} \right|. \end{aligned} \quad (28)$$

Уравнением (28) мы замыкаем систему уравнений (14), (15), (26), (27), (28). Если жидкость находится в гравитационном поле, то формулы (14), (15) принимают вид

$$\frac{du_1}{dt} = \frac{d(\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau}_1)}{dt} = V \frac{\partial V}{\partial \tau_1} - \mathbf{g} \cdot \boldsymbol{\tau}_1, \quad (29)$$

$$\frac{du_2}{dt} = \frac{d(\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau}_2)}{dt} = V \frac{\partial V}{\partial \tau_2} - \mathbf{g} \cdot \boldsymbol{\tau}_2. \quad (30)$$

В этом случае уравнения (16), (21), (24), (29), (30) должны определять поверхностные гравитационные волны и неустойчивость Рэлея–Тейлора в трехмерном пространстве. В двумерном случае эта система вырождается, поэтому проверить ее в известных частных случаях [3, 4] невозможно. Однако можно

найти аналитическое решение для слабо искривленных гравитационных волн [1]. Как и в настоящей работе, решение в этом случае не зависит от плотности жидкости. Интересно отметить, что система (16), (21), (24), (29), (30) локальна при нетривиальном значении $\omega_{0n}(\mathbf{r}_0)$. Эта система вырождается, если $\omega_0(\mathbf{r}_0) \equiv 0$ во всем объеме жидкости. Однако в этом случае $\mathbf{u} = \nabla \varphi, \Delta \varphi = 0$ и из уравнений (6)–(8) следует [1], что

$$\frac{d\varphi}{dt} - \frac{1}{2} \mathbf{u}^2 + gh = \text{const}, \quad (31)$$

где gh — потенциальная энергия частицы поверхности жидкости. Скорости $u_{n-} = \partial \varphi / \partial n = -V$ и $\mathbf{u}_\tau = \partial \varphi / \partial \boldsymbol{\tau}$ связаны между собой формулой Грина [16]

$$2\pi\varphi(\mathbf{r}) = \oint \left[\frac{1}{|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}|} \frac{\partial \varphi(\mathbf{r}_s)}{\partial n_s} + \varphi(\mathbf{r}_s) \mathbf{n}_s \cdot \frac{\mathbf{r}_s - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}|^3} \right] dS(\mathbf{r}_s). \quad (32)$$

Мы видим, что система уравнений (31), (32) интегральная, т. е. для определения скорости V в какой-либо точке поверхности необходимо знать информацию на всей свободной границе. Благодаря наличию ненулевой завихренности $\omega_{0n}(\mathbf{r}_0)$ поверхностные волны развиваются локально. В то же время, система (16), (21), (24), (29), (30) неявная и помимо начальных условий надо знать еще и краевые условия, которые зависят от внешних условий.

При движении твердого тела в жидкости, помимо (16), (21), (24), (29), (30), имеется дополнительная связь между скоростью V и распределением давления P на поверхности тела, вытекающая из законов динамики твердого тела. Впрочем, здесь еще образуется турбулентный след, поверхностный ротор, происходит отрывание струй и т. д. Поэтому прямо применять уравнения Эйлера нельзя [1].

3. ТАНГЕНЦИАЛЬНЫЙ РАЗРЫВ

Рассмотрим движение поверхности раздела двух несжимаемых, вязких жидкостей в трехмерном случае, скользящих одна по другой (см. рис. 3). Обозначим все величины перед их общей границей знаком «-», а за ней — знаком «+». Пусть в каждой из областей выполняются только уравнения Эйлера (6)–(8). На границе двух жидкостей должны выполняться условия [1]

$$P = P_- = P_+, \quad (33)$$

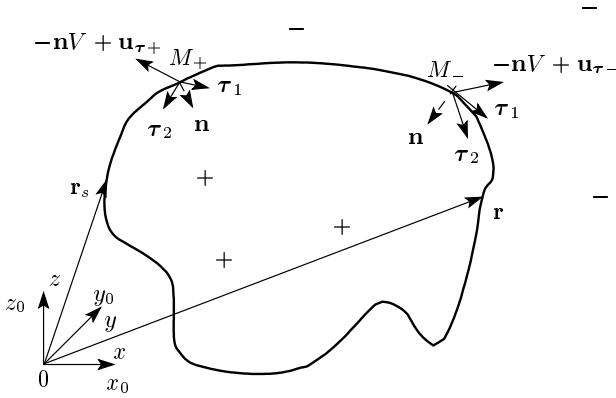


Рис. 3. Распространение поверхности тангенциального разрыва в трехмерном случае

$$V + n_{n\pm} = 0. \tag{34}$$

Рассмотрим точки $M_-(\mathbf{r}, t)$ и $M_+(\mathbf{r}, t)$ на внешней и внутренней сторонах поверхности, движущиеся со скоростями соответственно $-\mathbf{n}V + \mathbf{u}_{\tau-}$ и $-\mathbf{n}V + \mathbf{u}_{\tau+}$ и совпадающие в начальный момент. Тогда для этих точек M_{\pm} в правой прямоугольной системе координат $(\mathbf{n}, \boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2)$ с учетом граничных условий (33), (34) из уравнений (6)–(8) по аналогии с (14)–(16) следует, что

$$\frac{du_{1\pm}}{dt} = \frac{d(\mathbf{u}_{\pm} \cdot \boldsymbol{\tau}_1)}{dt} = V \frac{\partial V}{\partial \tau_1} - \frac{\partial P}{\rho_{\pm} \partial \tau_1}, \tag{35}$$

$$\frac{du_{2\pm}}{dt} = \frac{d(\mathbf{u}_{\pm} \cdot \boldsymbol{\tau}_2)}{dt} = V \frac{\partial V}{\partial \tau_2} - \frac{\partial P}{\rho_{\pm} \partial \tau_2}, \tag{36}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\omega_{n\pm}}{dt} &= \frac{d(\boldsymbol{\omega}_{\pm} \cdot \mathbf{n})}{dt} = \boldsymbol{\omega}_{\pm} \cdot \nabla u_{n\pm} + \\ &+ \boldsymbol{\omega}_{\tau\pm} \cdot \frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{\tau}} \approx -\omega_{n\pm} \left(\frac{\partial u_{1\pm}}{\partial \tau_1} + \frac{\partial u_{2\pm}}{\partial \tau_2} \right), \end{aligned} \tag{37}$$

где

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} - V \frac{\partial}{\partial n} + \mathbf{u}_{\tau\pm} \cdot \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\tau}}$$

— полная производная для величин на внешней (+) и внутренней (–) сторонах поверхности разрыва.

Так же перейдем взаимно однозначно к лагранжевым переменным (20). В этой системе координат граница будет покоиться [15], а точкам $M_-(\mathbf{r}, t)$ и $M_+(\mathbf{r}, t)$ в силу их определения будет соответствовать одна неподвижная точка $M(\mathbf{r}_0, t)$ на этой поверхности. Аналогично для определения V и P мы получим еще два уравнения вида (24) для обеих сторон поверхности.

Все замечания относительно предыдущего случая свободной границы верны и для тангенциального разрыва. Отличие состоит только в том, что V

в этом случае будет зависеть от отношения плотностей. Интересно рассмотреть его частный случай — контактный разрыв, когда касательная составляющая скорости остается непрерывной, $\mathbf{u}_{\tau-} = \mathbf{u}_{\tau+}$. Из граничных условий (33), (34) и уравнений Эйлера (6)–(8) тогда следует, что для слабо искривленной поверхности разрыва $P \approx \text{const}$ на границе. Система (35)–(37), (24) распадется на две части, описывающие эволюцию внутренней и внешней поверхности разрыва. Из формулы (25) следует, что каждая из них будет описывать одинаково одну и ту же свободную поверхность.

В изоэнтропическом приближении можно рассмотреть две сжимаемые жидкости. Тогда вместо интегралов движения $\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla i_0$ и Δ , где $i_0 = x_0, y_0, z_0$, следует использовать интегралы $\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla i_0 / \rho$, $\rho \Delta$ (см. Приложение Б) и однозначную связь между давлением и плотностью $P = P_S(\rho)$, определяемую уравнением состояния.

4. НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ДАРЬЕ – ЛАНДАУ В ТРЕХМЕРНОМ ПОТОКЕ

4.1. Бесконечно тонкий фронт

Неустойчивость Дарье – Ландау — это присущая фронту химической реакции (например, пламени) гидродинамическая неустойчивость, вызванная тепловым расширением газа при экзотермическом процессе. Предполагается, что газообразное топливо быстро натекает и сгорает в тонком слое и потом превращается в сильно нагретые продукты горения. При этом плотность топлива существенно больше плотности продуктов горения. Поэтому газ расширяется, давит на топливо и заставляет пламя двигаться самым причудливым образом.

Рассмотрим в трехмерном случае распространение бесконечно тонкого, слабо искривленного фронта пламени в потенциальном внешнем потоке, т. е. $\mathbf{u} = \nabla \varphi$, $\Delta \varphi = 0$ (см. рис. 2). Аналогично работе [12] перейдем к безразмерным величинам скорости \mathbf{u} , давления P и плотности ρ . Как и в разд. 3, течение газа предполагается несжимаемым и невязким. Тогда гидродинамические уравнения принимают вид

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega} + \nabla \left(\partial P + \frac{\mathbf{u}^2}{2} \right) = 0, \tag{38}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} = \nabla \times [\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}], \tag{39}$$

$$\text{div } \mathbf{u} = 0, \tag{40}$$

где $\vartheta = 1$ в топливе и $\vartheta = \theta = \rho_-/\rho_+$ в сгоревшем газе, θ — скачок плотности. Граничные условия на поверхности фронта, следующие из законов сохранения, будут выглядеть следующим образом [12]:

$$\mathbf{u}_+ - \mathbf{u}_- = (\theta - 1)\mathbf{n}, \quad (41)$$

$$P_+ - P_- = 1 - \theta, \quad (42)$$

$$V = 1 - u_{n-}. \quad (43)$$

Скорости $u_{n-} = \partial\varphi/\partial n = 1 - V$ и $\mathbf{u}_\tau = \partial\varphi/\partial\boldsymbol{\tau}$ связаны между собой формулой Грина (32). Из уравнений гидродинамики (38)–(40) и условий на фронте (41)–(43) следует, что для любой точки на фронте

$$\frac{d\varphi}{dt} + u_{n-} + \frac{1}{2}(u_\tau^2 - u_{n-}^2) + P = 0, \quad (44)$$

$$\boldsymbol{\omega} = -\frac{\theta - 1}{\theta}[\mathbf{n} \times \nabla P], \quad (45)$$

где $\boldsymbol{\omega}$ — завихренность сразу за фронтом реакции, и для простоты в данном разделе полная производная определена по формуле [14, 17]

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} - V \frac{\partial}{\partial n}.$$

Пусть для определенности выполняются более общие уравнения гидродинамики. Пламя будет тонкой областью, где физические величины претерпевают значительные изменения. Перейдем взаимно однозначно к лагранжевым переменным (20). Тогда, согласно формуле (43), на границе области сгоревшего газа «+»

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}_0}{dt} &= \frac{\partial\mathbf{r}_0}{\partial t} - V \frac{\partial\mathbf{r}_0}{\partial n} = -\mathbf{u}_\tau \cdot \frac{\partial\mathbf{r}_0}{\partial\boldsymbol{\tau}} - (u_n + V) \frac{\partial\mathbf{r}_0}{\partial n} = \\ &= -\mathbf{u}_\tau \cdot \frac{\partial\mathbf{r}_0}{\partial\boldsymbol{\tau}} - \theta \frac{\partial\mathbf{r}_0}{\partial n}. \end{aligned} \quad (46)$$

Рассмотрим также общее уравнение неразрывности

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla\rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{u} = 0. \quad (47)$$

Переходя в нем к переменным Лагранжа, находим [15]

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt_L} + \\ + \rho \left(\frac{\partial(u_x, y, z)}{\partial(x, y, z)} + \frac{\partial(x, u_y, z)}{\partial(x, y, z)} + \frac{\partial(x, y, u_z)}{\partial(x, y, z)} \right) = 0, \end{aligned} \quad (48)$$

$$\frac{d\rho}{dt_L} + \frac{\rho}{\Delta} \frac{d\Delta}{dt_L} = 0, \quad (49)$$

т. е.

$$\rho\Delta = \rho \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\mathbf{r}_0} = \rho_0(\mathbf{r}_0). \quad (50)$$

Якобиан преобразования переменных (20) $\Delta \sim \theta$ внутри фронта ограничен. Следовательно, в пределе $\delta \rightarrow 0$, где δ — толщина фронта, область пламени становится бесконечно тонкой и превращается в поверхность разрыва как в пространстве (\mathbf{r}, t) , так и пространстве переменных Лагранжа (\mathbf{r}_0, t) . Завихренность (45), образующаяся за фронтом, зависит от кривизны фронта пламени и происходящих в нем внутренних процессов [1, 18]. Поэтому найти ее, не решая общих уравнений теории горения, крайне затруднительно. Однако можно в некотором смысле обойти эту проблему, направив время в обратную сторону. Мы знаем, что в трехмерном случае уравнения Эйлера (6)–(8) допускают интегралы движения $\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla i_0 = \omega_{0i}(\mathbf{r}_0)$, см. Приложение Б. Тогда в системе координат $(\mathbf{n}, \boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2)$ на границе области сгоревшего газа «+» уравнение (23) сводится к следующему:

$$\omega_1 \frac{\partial\mathbf{r}_0}{\partial\tau_1} + \omega_2 \frac{\partial\mathbf{r}_0}{\partial\tau_2} = \boldsymbol{\omega}_0(\mathbf{r}_0), \quad (51)$$

так как из формулы (45) следует, что на фронте $\omega_{n+} = 0$, см. Приложение А. Исключая величины $\partial x_0/\partial n$, $\partial y_0/\partial n$, $\partial z_0/\partial n$ из формул (46), (50), с учетом (22) получаем

$$\begin{vmatrix} \frac{dx_0}{dt} & \frac{dy_0}{dt} & \frac{dz_0}{dt} \\ \frac{\partial x_0}{\partial\tau_1} & \frac{\partial y_0}{\partial\tau_1} & \frac{\partial z_0}{\partial\tau_1} \\ \frac{\partial x_0}{\partial\tau_2} & \frac{\partial y_0}{\partial\tau_2} & \frac{\partial z_0}{\partial\tau_2} \end{vmatrix} + \theta = 0. \quad (52)$$

Выразив из (51) \mathbf{r}_0 через ω_1, ω_2 , которые, в свою очередь, выражаются из (45) через давление на фронте, и подставив результат в (52), чтобы найти P , получим в итоге замкнутую поверхностную систему уравнений (44), (45), (51), (52) для определения потенциала φ и скорости пламени V . Смысл этой системы состоит в следующем. Пусть пламя распространяется из какой-то точки зажигания. В некоторый момент фотографируется распределение завихренности за фронтом. Тогда с помощью выражений (44), (45), (51), (52) можно описать всю эволюцию пламени: от момента зажигания до момента фотографирования. В противном случае неизвестна была бы функция $\boldsymbol{\omega}_0(\mathbf{r}_0)$ на поверхности фронта, поскольку он, захватывая все новые и новые частицы, удалялся бы от области, где она определена. Если в некоторый момент $\boldsymbol{\omega}_0(\mathbf{r}_0) = 0$ во всей области сгоревшего газа, то из уравнения (51) следует, что

$\omega(\mathbf{r}, t) \equiv 0$ во все предыдущие моменты времени. Тогда скорость пламени V должна была бы определяться одновременно формулой Франкеля [11]

$$V = 1 - \frac{\theta - 1}{2\pi} (\mathbf{n} \cdot \nabla) \oint \frac{1}{|\mathbf{r}_\xi - \mathbf{r}|} dS_\xi \quad (53)$$

и уравнениями (44), (45). Это невыполнимо, а следовательно, завихренность всегда должна образовываться за фронтом кроме тривиального случая $\theta = 1$, что подтверждается прямыми численными экспериментами [19–21]. Этот простой пример показывает, что не все решения гидродинамических уравнений спереди и сзади фронта можно согласовать с условиями на границе, т. е. в этом случае не всякую задачу Коши можно поставить. Вместо перехода к переменным Лагранжа (\mathbf{r}_0, t) (20) можно использовать более общее преобразование (Б.5)–(Б.7). Если же $\omega_n = 0$, то принципиально ничего не изменится. Поменяются только формулы (46), где добавится слагаемое, содержащее $\lambda\omega_\tau$.

4.2. Фронт конечной толщины

Происходящие внутри пламени процессы можно учесть с помощью малых поправок в граничных условиях на поверхности фронта [18] (см. Приложение В):

$$\mathbf{u}_+ - \mathbf{u}_- = (\theta - 1)\mathbf{n} + \delta\mathbf{A}, \quad (54)$$

$$P_+ - P_- = 1 - \theta + \delta B, \quad (55)$$

$$V = \theta - u_{n+} + \delta C, \quad (56)$$

где \mathbf{A} , B , C зависят от θ , \mathbf{u}_- , P_- , кривизны фронта и внутренних параметров газа. В отличие от предыдущего случая, здесь $\omega_{n+} = \delta[\nabla \times \mathbf{A}]_n \neq 0$ и порядка δ . Рассмотрим точку $M(\mathbf{r}, t)$ на поверхности пламени, движущуюся со скоростью $-\mathbf{n}V + \mathbf{u}_\tau + \lambda\omega_\tau$ (см. рис. 2). Перейдем взаимно однозначно в области сгоревшего газа к переменным начального положения частиц газа и времени \mathbf{r}_0, t по формуле

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) + \lambda(\mathbf{r}, t)\omega(\mathbf{r}, t), \quad (57)$$

где $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t)$ и $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_0(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{r}_0|_{t=0} = \mathbf{r}$, а $\lambda(\mathbf{r}, t)$ выбрано так, что

$$\omega(\mathbf{r}, t) \cdot \nabla \lambda(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (58)$$

в области сгоревшего газа и

$$\lambda(\mathbf{r}, t)\omega_{n+} = -\theta - \delta C \quad (59)$$

на границе сгоревшего газа. Из теории дифференциальных уравнений известно, что система (58), (59)

имеет единственное решение. Из выражения (58) всегда можно выразить $\lambda(\mathbf{r}, t)$ на поверхности пламени. В системе координат (\mathbf{r}_0, t) граница сгоревшего газа неподвижна. Действительно, пусть $g_0(\mathbf{r}_0, t) = 0$ уравнение движения фронта реакции. Тогда скорость фронта равна

$$V_{0+} = -\frac{g_{0t}}{|\nabla_0 g_0|} = -\frac{g_t + (\mathbf{u} + \lambda\omega) \cdot \nabla g}{|\nabla_0 g_0|} = -\frac{|\nabla g|}{|\nabla_0 g_0|} (V + u_{n+} + \lambda\omega_{n+}) = 0. \quad (60)$$

Аналогично (46), для точки $M(\mathbf{r}, t)$ на границе сгоревшего газа имеем

$$\frac{d\mathbf{r}_0}{dt} = \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial t} - V \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial n} + (\mathbf{u}_\tau + \lambda\omega_\tau) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial \tau} = 0, \quad (61)$$

где

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} - V \frac{\partial}{\partial n} + (\mathbf{u}_\tau + \lambda\omega_\tau) \cdot \frac{\partial}{\partial \tau} \quad (62)$$

— полная производная по времени для движущейся точки $M(\mathbf{r}, t)$ [14]. В Приложении Б показано, что и в этих переменных интегралы $\omega \cdot \nabla i_0$ и Δ не зависят явно от времени, т. е. $\Delta = 1$, $\omega \cdot \nabla i_0 = \omega_{0i}(\mathbf{r}_0)$, где $\omega_{0i}(\mathbf{r}_0)$ — распределение завихренности в начальный момент времени. Аналогично предыдущему случаю, исключая $\partial x_0/\partial n$, $\partial y_0/\partial n$, $\partial z_0/\partial n$ из формул (22), (23), получаем уравнения (24), (25). К уравнениям (44), (45) в этом случае добавляются поправки порядка δ/R :

$$\frac{d\varphi}{dt} + (1 + \delta C - \delta A_n)u_{n-} - \frac{1}{2}(u_\tau^2 + u_{n-}^2) + P_- = 0, \quad (63)$$

$$\omega_+ = -\frac{\theta - 1}{\theta} [\mathbf{n} \times \nabla P_-] + \delta\Psi(\mathbf{A}, B, C), \quad (64)$$

где $\omega_{n+} = \delta[\nabla \times \mathbf{A}]_n$. Таким образом, система уравнений (24), (25), (61)–(64) должна определять эволюцию фронта реакции. Ее преимущество состоит в том, что она реально описывает движение поверхности в терминах самой поверхности, а недостаток — что $\lambda \sim 1/\delta$, т. е. сильно зависит от конкретных свойств газовой смеси.

Предположим, что перед фронтом и за ним выполняется условие изоэнтропичности течения, а характерная скорость потока намного меньше скорости звука. Тогда можно учесть сжимаемость газа, перейдя к новым переменным, но вместо (58) взяв уравнение

$$\lambda\omega \cdot \nabla \rho + \rho\omega \cdot \nabla \lambda = 0. \quad (65)$$

В этом случае вместо интегралов движения $\omega \cdot \nabla i_0$ и Δ надо использовать интегралы $\omega \cdot \nabla i_0/\rho$ и $\rho\Delta$ (см.

Приложение Б), а также однозначную связь на поверхности фронта между давлением и плотностью $P = P_S(\rho)$, определяемую уравнением состояния. Если перед фронтом $s = \text{const}$, то эта зависимость сразу следует из уравнения состояния топлива. За искривленным фронтом происходит неравномерное нагревание продуктов горения, но выполняется соотношение $s = P(1 - 1/\theta) + \text{const}$ (это следует из второго начала термодинамики и закона Гесса). Если это выражение для энтропии подставить в уравнение состояния сгоревшего газа $P = P_+(\rho, s)$, то мы также получим однозначную связь между давлением и плотностью на границе пламени, $P = P_+(\rho)$, что и позволяет учесть образующиеся звуковые колебания. Выпишем уравнения для этого случая. С учетом изменения плотности формулы (22) и (23) примут вид

$$\omega_n \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial n} + \omega_1 \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial \tau_1} + \omega_2 \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial \tau_2} = \frac{\rho}{\rho_0(\mathbf{r}_0)} \boldsymbol{\omega}_0(\mathbf{r}_0), \quad (66)$$

$$\frac{\partial(x_0, y_0, z_0)}{\partial(\tau_1, \tau_2, n)} = \frac{\rho}{\rho_0(\mathbf{r}_0)}. \quad (67)$$

Интересно отметить, что, исключая $\partial x_0/\partial n, \partial y_0/\partial n, \partial z_0/\partial n$ из формул (66), (67), также получим уравнения (24), (25). При этом отношение плотностей $\rho/\rho_0(\mathbf{r}_0)$ исчезнет. Вместе с условиями шивки на фронте (54)–(56) надо учитывать зависимость от температуры и плотности. Уравнения же движения фронта пламени остаются прежними: (24), (25), (61)–(64). Только незначительные звуковые изменения плотностей газа перед и за фронтом определяются по формулам $P = P_{-S}(\rho)$ и $P = P_+(\rho)$.

4.3. Влияние внешней турбулентности

Рассмотрим распространение бесконечно тонкого слабо искривленного фронта реакции во внешнем турбулентном течении газа (см. рис. 2). Рассмотрим точку $M(x, y, z)$ на поверхности пламени, движущуюся со скоростью $-\mathbf{n}V + \mathbf{u}_\tau$. Из уравнений Эйлера (38)–(40) в областях «-» и «+» и граничных условий (41)–(43) для этой точки следует, что

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{dt} &= \frac{d(\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau}_1)}{dt} \approx \\ &\approx \frac{\theta}{\theta - 1}(\omega_{2+} - \omega_{2-}) - (1 - V) \frac{\partial V}{\partial \tau_1}, \end{aligned} \quad (68)$$

$$\begin{aligned} \frac{du_2}{dt} &= \frac{d(\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau}_2)}{dt} \approx \\ &\approx \frac{\theta}{\theta - 1}(\omega_{1-} - \omega_{1+}) - (1 - V) \frac{\partial V}{\partial \tau_2}, \end{aligned} \quad (69)$$

$$\frac{\partial \omega_{1-}}{\partial \tau_1} + \frac{\partial \omega_{2-}}{\partial \tau_2} = \theta \left(\frac{\partial \omega_{1+}}{\partial \tau_1} + \frac{\partial \omega_{2+}}{\partial \tau_2} \right), \quad (70)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\omega_n}{dt} &= \frac{d(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n})}{dt} \approx -\omega_n \left(\frac{\partial u_1}{\partial \tau_1} + \frac{\partial u_2}{\partial \tau_2} \right) - \\ &- \theta \left(\frac{\partial \omega_{1+}}{\partial \tau_1} + \frac{\partial \omega_{2+}}{\partial \tau_2} \right). \end{aligned} \quad (71)$$

Формула (45) для давления на фронте здесь обобщается следующим образом:

$$\theta \boldsymbol{\omega}_+ - \boldsymbol{\omega}_- = -(\theta - 1)[\mathbf{n} \times \nabla P]. \quad (72)$$

Предположим, что течение газа таково, что $\omega_n \neq 0$. Чтобы замкнуть данную систему, необходимо еще как минимум четыре независимых уравнения. Для этого перейдем взаимно однозначно в областях «-» и «+» соответственно к переменным начального положения частиц газа и времени \mathbf{r}_0, t по формулам

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) + \lambda_\pm(\mathbf{r}, t)\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}, t), \quad (73)$$

где $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t)$ и $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_0(\mathbf{r}, t), \mathbf{r}_0|_{t=0} = \mathbf{r}$, а $\lambda_\pm(\mathbf{r}, t)$ выбрано следующим образом:

$$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}, t) \cdot \nabla \lambda_\pm(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (74)$$

в областях соответственно «-» и «+»,

$$\lambda_-(\mathbf{r}, t)\omega_n = -1 \quad (75)$$

на границе топлива и

$$\lambda_+(\mathbf{r}, t)\omega_n = -\theta \quad (76)$$

на границе сгоревшего газа. Из теории линейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка известно, что система (74)–(76) имеет единственное решение. Из (75), (76) можно определить $\lambda_\pm(\mathbf{r}, t)$ на поверхности пламени. Аналогично уравнению (60), в системе координат (73) границы топлива и сгоревшего газа неподвижны. Точке $M(\mathbf{r}, t)$ будут соответствовать две различные точки $M_-(\mathbf{r}_{0-}, t)$ и $M_+(\mathbf{r}_{0+}, t)$, движущиеся по внешней и внутренней сторонам поверхности и совпадающие в начальный момент. Тогда из (73)–(76) следует, что координаты этих точек описываются формулами

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}_{0\pm}}{dt} &= \frac{\partial \mathbf{r}_{0\pm}}{\partial t} - V \frac{\partial \mathbf{r}_{0\pm}}{\partial n} + \mathbf{u}_\tau \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_{0\pm}}{\partial \boldsymbol{\tau}} = \\ &= - \left(\lambda_\pm \boldsymbol{\omega}_{\tau\pm} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_{0\pm}}{\partial \boldsymbol{\tau}} \right). \end{aligned} \quad (77)$$

Полную производную в (68)–(71), (77) для простоты определим по формуле (17). Аналогично предыдущему пункту, в переменных (73) интегралы

$\omega \cdot \nabla i_0$ и Δ не зависят явно от времени, т. е. $\Delta = 1$, $\omega \cdot \nabla i_0 = \omega_{0i}(\mathbf{r}_0)$. В системе координат $(\mathbf{n}, \tau_1, \tau_2)$ на границе пламени имеем

$$\frac{\partial(x_{0\pm}, y_{0\pm}, z_{0\pm})}{\partial(\tau_1, \tau_2, n)} = 1, \quad (78)$$

$$\omega_n \frac{\partial \mathbf{r}_{0\pm}}{\partial n} + \omega_{1\pm} \frac{\partial \mathbf{r}_{0\pm}}{\partial \tau_1} + \omega_{2\pm} \frac{\partial \mathbf{r}_{0\pm}}{\partial \tau_2} = \omega_{0\pm}. \quad (79)$$

Исключая из (78), (79) величины $\partial x_{0\pm}/\partial n, \partial y_{0\pm}/\partial n, \partial z_{0\pm}/\partial n$, входящие туда линейно, по аналогии с (24), получаем для обеих сторон фронта

$$\omega_n - \left| \frac{\partial \mathbf{r}_{0\pm}}{\partial \tau_1} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_{0\pm}}{\partial \tau_2} \cdot \omega_{0\pm}(\mathbf{r}_{0\pm}) \right| = 0. \quad (80)$$

Этого недостаточно, чтобы замкнуть систему уравнений (68)–(71). Необходимо еще как минимум два уравнения. Отметим, что формула (80) верна не только на поверхности фронта, но и в объеме. Продифференцировав ее в направлении \mathbf{n} , находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega_{n\pm}}{\partial n} - \left| \frac{\partial^2 \mathbf{r}_{0\pm}}{\partial n \partial \tau_1} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_{0\pm}}{\partial \tau_2} \cdot \omega_{0\pm}(\mathbf{r}_{0\pm}) \right| + \\ + \left| \frac{\partial^2 \mathbf{r}_{0\pm}}{\partial \tau_1} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}_{0\pm}}{\partial n \partial \tau_2} \cdot \omega_{0\pm}(\mathbf{r}_{0\pm}) \right| + \\ + \left| \frac{\partial \mathbf{r}_{0\pm}}{\partial \tau_1} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_{0\pm}}{\partial \tau_2} \cdot \frac{\partial \omega_{0\pm}}{\partial \mathbf{r}_{0\pm}} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_{0\pm}}{\partial n} \right| = 0, \quad (81) \end{aligned}$$

где величины $\partial x_{0\pm}/\partial n, \partial y_{0\pm}/\partial n, \partial z_{0\pm}/\partial n$ можно выразить из (79) и

$$\frac{\partial \omega_{n\pm}}{\partial n} = -\frac{\partial \omega_{1\pm}}{\partial \tau_1} - \frac{\partial \omega_{2\pm}}{\partial \tau_2}. \quad (82)$$

Пусть $z_0 = f(x_0, y_0)$ — уравнение фронта в переменных (73). Тогда одна из формул (77) становится ненужной, а (80) упрощается до (25) для внутренней «+» и внешней «-» поверхности пламени.

В результате получим замкнутую систему (68)–(71), (77), (80), (81) для определения V . В отличие от пп. 4.1, 4.2, она является локальной, но неявной относительно V . Требование $\omega_n \neq 0$ здесь существенно. Последнее замечание предыдущего пункта относительно учета влияния температуры и плотности остается в силе и здесь.

5. НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ДАРЬЕ – ЛАНДАУ В ДВУМЕРНОМ ПОТОКЕ

В предыдущих разделах мы рассматривали гидродинамические разрывы только в трехмерном случае. В случае двумерного потока данный метод

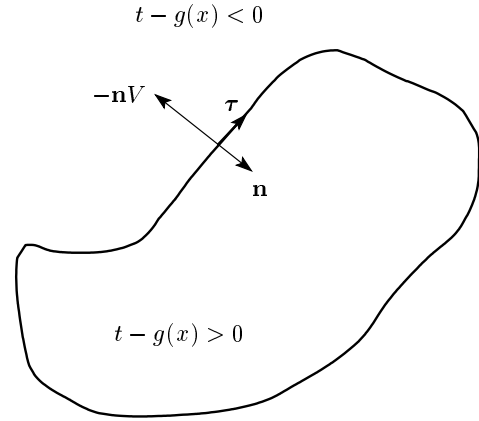


Рис. 4. Движущаяся поверхность, описываемая уравнением $t - g(x_1, \dots, x_k) = 0$

неприменим. Покажем теперь на примере гидродинамической неустойчивости фронта реакции, как можно из других соображений вывести соответствующие уравнения и в двумерном случае.

5.1. Общая теория

Рассмотрим сначала в пространстве $\mathfrak{R}_{x,y,t}^3$ поле физических величин $\alpha(x, y, t), \beta(x, y, t), \gamma(x, y, t)$, описываемое системой уравнений в частных производных первого порядка:

$$H_j \left(\alpha, \frac{\partial \alpha}{\partial t}, \frac{\partial \alpha}{\partial x_i}, \beta, \frac{\partial \beta}{\partial t}, \frac{\partial \beta}{\partial x_i}, \gamma, \frac{\partial \gamma}{\partial t}, \frac{\partial \gamma}{\partial x_i} \right) = 0, \quad (83)$$

$j = 1, 2, 3; \quad i = 1, 2.$

Пусть в данном поле распространяется поверхность разрыва $g(x, y, t) = 0$ со скоростью V , при переходе через которую эти величины меняются скачкообразно (см. рис. 4). Выпишем общие формулы для скачка этих величин

$$\alpha_+ - \alpha_- = A \left(\alpha_-, \frac{\partial \alpha_-}{\partial x_i}, \beta_-, \frac{\partial \beta_-}{\partial x_i}, \gamma_-, \frac{\partial \gamma_-}{\partial x_i} \right), \quad (84)$$

$$\beta_+ - \beta_- = B \left(\alpha_-, \frac{\partial \alpha_-}{\partial x_i}, \beta_-, \frac{\partial \beta_-}{\partial x_i}, \gamma_-, \frac{\partial \gamma_-}{\partial x_i} \right), \quad (85)$$

$$\gamma_+ - \gamma_- = \Gamma \left(\alpha_-, \frac{\partial \alpha_-}{\partial x_i}, \beta_-, \frac{\partial \beta_-}{\partial x_i}, \gamma_-, \frac{\partial \gamma_-}{\partial x_i} \right). \quad (86)$$

Пусть скорость поверхности V связана с величинами α, β и γ на поверхности соотношением

$$V = V \left(\alpha_-, \frac{\partial \alpha_-}{\partial x_i}, \beta_-, \frac{\partial \beta_-}{\partial x_i}, \gamma_-, \frac{\partial \gamma_-}{\partial x_i} \right). \quad (87)$$

Перейдем к переменным начального положения частиц x_0, y_0, t , в которых $\alpha(x, y, t)$ и $\beta(x, y, t)$ не зависят явно от времени,

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{dy}{dt} \frac{\partial \alpha}{\partial y} = \frac{d\alpha}{dt} = 0 \Rightarrow \alpha(x, y, t) = \alpha_0(x_0, y_0), \quad (88)$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial \beta}{\partial x} + \frac{dy}{dt} \frac{\partial \beta}{\partial y} = \frac{d\beta}{dt} = 0 \Rightarrow \beta(x, y, t) = \beta_0(x_0, y_0), \quad (89)$$

где

$$\alpha(x, y, t)|_{t=0} = \alpha_0(x, y), \quad \beta(x, y, t)|_{t=0} = \beta_0(x, y).$$

Уравнения (88), (89) определяют преобразование переменных x, y, t к x_0, y_0, t . Предположим, что это преобразование взаимно однозначно отображает все пространство (x, y, t) на все пространство (x_0, y_0, t) , а не его часть. Тогда

$$x = x(x_0, y_0, t), \quad x_0 = x_0(x, y, t), \quad x_0|_{t=0} = x, \quad (90)$$

$$y = y(x_0, y_0, t), \quad y_0 = y_0(x, y, t), \quad y_0|_{t=0} = y. \quad (91)$$

Рассмотрим точку $M(x, y, t)$ границы фронта, движущуюся со скоростью $-V\mathbf{n}$ (см. рис. 4). В переменных x_0, y_0, t этой точке соответствуют две точки:

$$M^- = M(x_{0-}(x, y, t), y_{0-}(x, y, t)),$$

$$M^+ = M(x_{0+}(x, y, t), y_{0+}(x, y, t)),$$

соответственно на внутренней и внешней сторонах поверхности, которые, вообще говоря, могут не совпадать в случае тангенциального разрыва в переменных Лагранжа. Тогда в точке $M(x, y, t)$

$$\frac{d\alpha_-}{dt} = \frac{\partial \alpha_{0-}}{\partial x_0}(x_{0-}, y_{0-}) \frac{dx_{0-}}{dt} + \frac{\partial \alpha_{0-}}{\partial y_0}(x_{0-}, y_{0-}) \frac{dy_{0-}}{dt}, \quad (92)$$

$$\frac{d\beta_-}{dt} = \frac{\partial \beta_{0-}}{\partial x_0}(x_{0-}, y_{0-}) \frac{dx_{0-}}{dt} + \frac{\partial \beta_{0-}}{\partial y_0}(x_{0-}, y_{0-}) \frac{dy_{0-}}{dt}, \quad (93)$$

$$\frac{d\alpha_+}{dt} = \frac{\partial \alpha_{0+}}{\partial x_0}(x_{0+}, y_{0+}) \frac{dx_{0+}}{dt} + \frac{\partial \alpha_{0+}}{\partial y_0}(x_{0+}, y_{0+}) \frac{dy_{0+}}{dt}, \quad (94)$$

$$\frac{d\beta_+}{dt} = \frac{\partial \beta_{0+}}{\partial x_0}(x_{0+}, y_{0+}) \frac{dx_{0+}}{dt} + \frac{\partial \beta_{0+}}{\partial y_0}(x_{0+}, y_{0+}) \frac{dy_{0+}}{dt}. \quad (95)$$

Пусть $g_0(x_0, y_0, t) = 0$ — уравнение движения поверхности разрыва в переменных x_0, y_0, t . Тогда

$$\mathbf{n}_0(x_0, y_0, t) = \frac{\nabla_0 g_0}{|\nabla_0 g_0|}$$

— единичная нормаль к фронту, а

$$V_0 = -\frac{g_{0t}}{|\nabla_0 g_0|}$$

— его скорость в системе координат x_0, y_0, t . Дифференцируя уравнение $g_0(x_0, y_0, t) = 0$ по t , получаем

$$n_{0x-}(x_{0-}, y_{0-}, t) \frac{dx_{0-}}{dt} + n_{0y-}(x_{0-}, y_{0-}, t) \frac{dy_{0-}}{dt} = V_0(x_{0-}, y_{0-}, t) = V_{0-}, \quad (96)$$

$$n_{0x+}(x_{0+}, y_{0+}, t) \frac{dx_{0+}}{dt} + n_{0y+}(x_{0+}, y_{0+}, t) \frac{dy_{0+}}{dt} = V_0(x_{0+}, y_{0+}, t) = V_{0+}. \quad (97)$$

В момент времени $t = 0$: $x_{0\pm} = x, y_{0\pm} = y$ и $V_0 = V_{0-} = V_{0+} \neq V$. Однако производные dx_{0-}/dt и dx_{0+}/dt ; dy_{0-}/dt и dy_{0+}/dt , вообще говоря, различны. Исключая теперь из системы (92)–(97) пять неизвестных $dx_{0-}/dt, dx_{0+}/dt, dy_{0-}/dt, dy_{0+}/dt$ и V_0 , входящих туда линейно, найдем независимо от (83)–(87) некоторое соотношение

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \alpha_{0-}}{\partial x_0} & \frac{\partial \alpha_{0-}}{\partial y_0} & 0 & 0 & \frac{d\alpha_-}{dt} \\ \frac{\partial \beta_{0-}}{\partial x_0} & \frac{\partial \beta_{0-}}{\partial y_0} & 0 & 0 & \frac{d\beta_-}{dt} \\ 0 & 0 & \frac{\partial \alpha_{0+}}{\partial x_0} & \frac{\partial \alpha_{0+}}{\partial y_0} & \frac{d\alpha_+}{dt} \\ 0 & 0 & \frac{\partial \beta_{0+}}{\partial x_0} & \frac{\partial \beta_{0+}}{\partial y_0} & \frac{d\beta_+}{dt} \\ n_{0x} & n_{0y} & -n_{0x} & -n_{0y} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \alpha_-}{\partial x} & \frac{\partial \alpha_-}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{d\alpha_-}{dt} \\ \frac{\partial \beta_-}{\partial x} & \frac{\partial \beta_-}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{d\beta_-}{dt} \\ 0 & 0 & \frac{\partial \alpha_+}{\partial x} & \frac{\partial \alpha_+}{\partial y} & \frac{d\alpha_+}{dt} \\ 0 & 0 & \frac{\partial \beta_+}{\partial x} & \frac{\partial \beta_+}{\partial y} & \frac{d\beta_+}{dt} \\ n_x & n_y & -n_x & -n_y & 0 \end{vmatrix} = 0. \quad (98)$$

Формула (98) следует из инвариантности по времени. После несложных преобразований можно переписать уравнение (98) в виде

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \alpha_-}{\partial x} & \frac{\partial \alpha_-}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{d\alpha_-}{dt} \\ \frac{\partial \beta_-}{\partial x} & \frac{\partial \beta_-}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{d\beta_-}{dt} \\ 0 & 0 & \frac{\partial \alpha_+}{\partial x} & \frac{\partial \alpha_+}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial \beta_+}{\partial x} & \frac{\partial \beta_+}{\partial y} & 0 \\ n_x & n_y & -n_x & -n_y & V_0 \end{vmatrix} = 0, \quad (99)$$

где $V_0 = V_0(\alpha, \beta)$ — скорость поверхности в пространстве переменных, определяемых формулами (88), (89), в которых $\alpha(x, y, t)$ и $\beta(x, y, t)$ не зависят явно от времени. Из (88), (89) следует, что

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial(\alpha, \beta)}{\partial(y, t)} \left[\frac{\partial(\alpha, \beta)}{\partial(x, y)} \right]^{-1}, \quad x = x(x_0, y_0, t), \quad (100)$$

$$x_0 = x_0(x, y, t), \quad x_0|_{t=0} = x,$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial(\alpha, \beta)}{\partial(t, x)} \left[\frac{\partial(\alpha, \beta)}{\partial(x, y)} \right]^{-1}, \quad y = y(x_0, y_0, t), \quad (101)$$

$$y_0 = y_0(x, y, t), \quad y_0|_{t=0} = y.$$

Дифференцируя в общем случае $g(x, y, t) \equiv g(x_0, y_0, t)$ по t , получаем при $t = 0$

$$V - n_x \frac{dx_-}{dt} - n_y \frac{dy_-}{dt} = V_0, \quad (102)$$

$$V - n_x \frac{dx_+}{dt} - n_y \frac{dy_+}{dt} = V_0. \quad (103)$$

Производные dx_{\pm}/dt и dy_{\pm}/dt определяются из формул (100), (101). Следовательно,

$$V_{0-} = V_{0+} = V_0 \Rightarrow n_x \frac{dx_-}{dt} + n_y \frac{dy_-}{dt} = n_x \frac{dx_+}{dt} + n_y \frac{dy_+}{dt}, \quad (104)$$

$$V_0 = V - n_x \frac{dx_+}{dt} - n_y \frac{dy_+}{dt}, \quad (105)$$

т. е. (104), (105) есть иная форма записи соотношения (98). Мы видим, что формула (98) связывает между собой поверхностные величины и является лишь следствием того, что разрыв движется как поверхность, не распадается, не расплывается и не исчезает как в пространстве (x, y, t) , так и в пространстве (x_0, y_0, t) , т. е. $V_0 = V_{0-} = V_{0+} \neq V$.

Выведем аналогично еще два соотношения вида (98) для двух других пар величин α, γ и β, γ :

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \alpha_-}{\partial x} & \frac{\partial \alpha_-}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{d\alpha_-}{dt} \\ \frac{\partial \gamma_-}{\partial x} & \frac{\partial \gamma_-}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{d\gamma_-}{dt} \\ 0 & 0 & \frac{\partial \alpha_+}{\partial x} & \frac{\partial \alpha_+}{\partial y} & \frac{d\alpha_+}{dt} \\ 0 & 0 & \frac{\partial \gamma_+}{\partial x} & \frac{\partial \gamma_+}{\partial y} & \frac{d\gamma_+}{dt} \\ n_x & n_y & -n_x & -n_y & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad (106)$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \gamma_-}{\partial x} & \frac{\partial \gamma_-}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{d\gamma_-}{dt} \\ \frac{\partial \beta_-}{\partial x} & \frac{\partial \beta_-}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{d\beta_-}{dt} \\ 0 & 0 & \frac{\partial \gamma_+}{\partial x} & \frac{\partial \gamma_+}{\partial y} & \frac{d\gamma_+}{dt} \\ 0 & 0 & \frac{\partial \beta_+}{\partial x} & \frac{\partial \beta_+}{\partial y} & \frac{d\beta_+}{dt} \\ n_x & n_y & -n_x & -n_y & 0 \end{vmatrix} = 0. \quad (107)$$

Заметим, что

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{\partial \alpha}{\partial t} - V \frac{\partial \alpha}{\partial n}, \quad \frac{d\beta}{dt} = \frac{\partial \beta}{\partial t} - V \frac{\partial \beta}{\partial n}, \quad (108)$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{\partial \gamma}{\partial t} - V \frac{\partial \gamma}{\partial n}.$$

Уравнения (83) на поверхности можно выразить следующим образом:

$$H_j^* \left(\alpha, \frac{d\alpha}{dt}, \frac{\partial \alpha}{\partial x_i}, \beta, \frac{d\beta}{dt}, \frac{\partial \beta}{\partial x_i}, \gamma, \frac{d\gamma}{dt}, \frac{\partial \gamma}{\partial x_i} \right) = 0, \quad (109)$$

$$j = 1, 2, 3; \quad i = 1, 2.$$

Теперь формально мы можем записать замкнутую систему уравнений (84)–(87), (98), (106)–(109). Предположим, что из нее мы можем однозначно определить скорость V . С помощью (99) тогда можно определить V_0 . В трехмерном случае, чтобы получить такого рода замкнутую систему, необходимо иметь уже четыре переменных и четыре уравнения в (83). Это выполняется, например, если в газе распространяется фронт пламени [1]. В других случаях (например, при наличии тангенциального разрыва) число переменных и число уравнений, которые нам необходимы, не будет совпадать.

5.2. Неустойчивость Дарье – Ландау в двумерном случае

Рассмотрим распространение бесконечно тонкого фронта пламени в потенциальном внешнем потоке, т. е. $\mathbf{u} = \nabla\varphi$, $\Delta\varphi = 0$ (см. рис. 1). Перейдем к безразмерным величинам скорости \mathbf{u} и давления P [12]. Граничные условия на поверхности фронта определяются из выражений (41)–(43). Скорости $u_{n-} = \partial\varphi/\partial n$ и $u_{\tau} = \partial\varphi/\partial\tau$ связаны между собой формулой Грина [16]:

$$\pi\varphi(\mathbf{r}, t) = \oint \left[\frac{\partial\varphi(\mathbf{r}_s, t)}{\partial n_s} \ln|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}| - \varphi(\mathbf{r}_s, t) \mathbf{n}_s \cdot \frac{\mathbf{r}_s - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}|^2} \right] dl(\mathbf{r}_s). \quad (110)$$

Из уравнений гидродинамики следуют формулы (44), (45) для двумерного случая. Перейдем к переменным начального положения частиц x_0, y_0, t , в которых компоненты скорости $u_x(x, y, t)$ и $u_y(x, y, t)$ не зависят от времени,

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{dy}{dt} \frac{\partial u_x}{\partial y} = \frac{du_x}{dt} = 0 \Rightarrow u_x(x, y, t) = u_{0x}(x_0, y_0), \quad (111)$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{dy}{dt} \frac{\partial u_y}{\partial y} = \frac{du_y}{dt} = 0 \Rightarrow u_y(x, y, t) = u_{0y}(x_0, y_0). \quad (112)$$

Формулы (111), (112) определяют преобразование переменных x, y, t к x_0, y_0, t . Предположим, что это преобразование взаимно однозначно отображает все пространство x, y, t на все пространство x_0, y_0, t , а не его часть. Следовательно, выполняются соотношения (90), (91). Если якобиан преобразования (111), (112) внутри фронта ограничен, то в пределе нулевой толщины фронта область реакции, естественно, представляет собой поверхность разрыва как в пространстве (x, y, t) , так и в пространстве (x_0, y_0, t) . Рассмотрим точку $M(x, y, t)$ границы фронта, движущуюся со скоростью $-V\mathbf{n}$. В переменных x_0, y_0, t этой точке соответствуют две точки $M^- = M(x_{0-}(x, y, t), y_{0-}(x, y, t))$ и $M^+ = M(x_{0+}(x, y, t), y_{0+}(x, y, t))$ на внутренней и внешней сторонах поверхности, которые в пределе бесконечно тонкого фронта могут не совпадать, как это имело место в случае тангенциального разрыва в переменных Лагранжа. Формула (98) принимает вид

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u_{0x-}}{\partial x_0} & \frac{\partial u_{0x-}}{\partial y_0} & 0 & 0 & \frac{du_{x-}}{dt} \\ \frac{\partial u_{0y-}}{\partial x_0} & \frac{\partial u_{0y-}}{\partial y_0} & 0 & 0 & \frac{du_{y-}}{dt} \\ 0 & 0 & \frac{\partial u_{0x+}}{\partial x_0} & \frac{\partial u_{0x+}}{\partial y_0} & \frac{du_{x+}}{dt} \\ 0 & 0 & \frac{\partial u_{0y+}}{\partial x_0} & \frac{\partial u_{0y+}}{\partial y_0} & \frac{du_{y+}}{dt} \\ n_{0x} & n_{0y} & -n_{0x} & -n_{0y} & 0 \end{vmatrix} = 0. \quad (113)$$

С учетом потенциальности внешнего потока и граничных условий (41)–(43) выражение (113) принимает вид

$$G\left(\frac{d\varphi_0}{dt}, \varphi_0, \omega_0, n_{0x}, n_{0y}, V, \theta\right) = 0, \quad (114)$$

а поскольку время можно отсчитывать от любого момента движения, то

$$G\left(\frac{d\varphi}{dt}, \varphi, \omega, n_x, n_y, V, \theta\right) = 0. \quad (115)$$

Формула (115) выведена независимо от уравнений гидродинамики за фронтом и является следствием того, что фронт пламени движется как поверхность (не распадается, не расплывается и не исчезает) как в пространстве (x, y, t) , так и в пространстве (x_0, y_0, t) , т. е. $V_0 = V_{0-} = V_{0+} \neq V$. Таким образом, система уравнений (44), (45), (110), (115) должна определять эволюцию бесконечно тонкого фронта. Перейдем в точке $M(x, y, t)$ в систему координат $(\mathbf{n}, \boldsymbol{\tau})$ (см. рис. 1) и повторим в ней все предыдущие рассуждения. С учетом соотношений

$$\frac{\partial u_{n\pm}}{\partial n} + \frac{\partial u_{\tau\pm}}{\partial \tau} = 0, \quad \frac{\partial u_{\tau-}}{\partial n} = \frac{\partial u_{n-}}{\partial \tau},$$

$$\omega = \frac{\partial u_{\tau+}}{\partial n} - \frac{\partial u_{n+}}{\partial \tau}$$

формула (115) принимает вид

$$\begin{vmatrix} -\frac{\partial u_{\tau-}}{\partial \tau} & \frac{\partial u_{n-}}{\partial \tau} & 0 & 0 & \frac{du_{n-}}{dt} \\ \frac{\partial u_{n-}}{\partial \tau} & \frac{\partial u_{\tau-}}{\partial \tau} & 0 & 0 & \frac{du_{\tau-}}{dt} \\ 0 & 0 & -\frac{\partial u_{\tau+}}{\partial \tau} & \frac{\partial u_{n+}}{\partial \tau} & \frac{du_{n+}}{dt} \\ 0 & 0 & \omega + \frac{\partial u_{n+}}{\partial \tau} & \frac{\partial u_{\tau+}}{\partial \tau} & \frac{du_{\tau+}}{dt} \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0. \quad (116)$$

Затем с учетом кривизны из уравнений (41)–(43) следует

$$\frac{d\mathbf{u}_+}{dt} = \frac{d\mathbf{u}_-}{dt} + (\theta - 1) \frac{d\mathbf{n}}{dt} \Rightarrow \frac{du_{n+}}{dt} = \frac{du_{n-}}{dt},$$

$$\frac{du_{\tau+}}{dt} = \frac{du_{\tau-}}{dt} + (\theta - 1) \left(\frac{d\mathbf{n}}{dt} \cdot \boldsymbol{\tau} \right) = \frac{du_{\tau-}}{dt} + (\theta - 1) \frac{\partial V}{\partial \tau},$$

а также

$$\frac{\partial u_{n+}}{\partial \tau} = \frac{\partial u_{n-}}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial u_{\tau+}}{\partial \tau} = \frac{\partial u_{\tau-}}{\partial \tau} + \frac{\theta - 1}{R},$$

где R — радиус кривизны. Подставляя эти соотношения в уравнение (116), находим

$$\omega \frac{\partial u_{n-}}{\partial \tau} \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial u_{n-}}{\partial \tau} & \frac{du_{n-}}{dt} \\ \frac{\partial u_{\tau-}}{\partial \tau} & \frac{du_{\tau-}}{dt} \end{array} \right| +$$

$$+ \frac{\theta - 1}{R} \left(\frac{\partial u_{\tau-}}{\partial \tau} + \frac{\theta - 1}{R} \right) \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial u_{n-}}{\partial \tau} & \frac{du_{n-}}{dt} \\ \frac{\partial u_{\tau-}}{\partial \tau} & \frac{du_{\tau-}}{dt} \end{array} \right| -$$

$$- (\theta - 1)^2 \left(\frac{\partial u_{n-}}{\partial \tau} \right)^2 \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial u_{n-}}{\partial \tau} & \frac{du_{n-}}{dt} \\ \frac{1}{R} & \frac{\partial V}{\partial \tau} \end{array} \right| -$$

$$- (\theta - 1)^2 \frac{\partial u_{n-}}{\partial \tau} \frac{\partial u_{\tau-}}{\partial \tau} \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial u_{\tau-}}{\partial \tau} & \frac{du_{\tau-}}{dt} \\ \frac{1}{R} & \frac{\partial V}{\partial \tau} \end{array} \right| = 0. \quad (117)$$

Здесь $\partial\varphi/\partial n$ и φ связаны между собой формулой Грина (110). Поскольку $\Delta(\partial\varphi/\partial t) = 0$, производные $\partial^2\varphi/\partial n \partial t$ и $\partial\varphi/\partial t$ также связаны между собой формулой Грина:

$$\pi \frac{\partial\varphi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \oint \left[\frac{\partial^2\varphi(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{n}_s \partial t} \ln |\mathbf{r}_s - \mathbf{r}| - \frac{\partial\varphi(\mathbf{r}_s, t)}{\partial t} \mathbf{n}_s \cdot \frac{\mathbf{r}_s - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}|^2} \right] dl(\mathbf{r}_s). \quad (118)$$

Кроме того, поскольку

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial n \partial t} = \frac{d}{dt} \frac{\partial\varphi}{\partial n} + V \frac{\partial^2\varphi}{\partial n^2} =$$

$$= \frac{d}{dt} \frac{\partial\varphi}{\partial n} - V \frac{\partial^2\varphi}{\partial \tau^2} = \frac{d}{dt} \frac{\partial\varphi}{\partial n} - V \frac{\partial u_{\tau-}}{\partial \tau}$$

и

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{d\varphi}{dt} + V \frac{\partial\varphi}{\partial n} = \frac{d\varphi}{dt} + V u_{n-},$$

полные производные $d(\partial\varphi/\partial n)/dt$ и $d\varphi/dt$ связаны между собой соотношением

$$\pi \left(\frac{d\varphi}{dt} + V u_{n-} \right) (\mathbf{r}, t) =$$

$$= \oint \left[\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial\varphi}{\partial n} - V \frac{\partial u_{\tau-}}{\partial \tau} \right) (\mathbf{r}_s, t) \ln |\mathbf{r}_s - \mathbf{r}| - \left(\frac{d\varphi}{dt} + V u_{n-} \right) (\mathbf{r}_s, t) \mathbf{n}_s \cdot \frac{\mathbf{r}_s - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}|^2} \right] dl(\mathbf{r}_s). \quad (119)$$

Таким образом, величины $u_{n\pm}$, u_{τ} , $\partial u_{n\pm}/\partial \tau$, $\partial u_{\tau\pm}/\partial \tau$, $du_{n\pm}/d\tau$, $du_{\tau\pm}/d\tau$ выражаются через φ , $d\varphi/dt$, V , так как

$$u_{n-} = \frac{\partial\varphi}{\partial n}, \quad u_{\tau} = \frac{\partial\varphi}{\partial \tau},$$

$$\frac{du_{n-}}{d\tau} = \frac{d}{dt} \frac{\partial\varphi}{\partial n}, \quad \frac{du_{\tau-}}{d\tau} = \frac{d}{dt} \frac{\partial\varphi}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{d\varphi}{dt}.$$

При слабом тепловом расширении на фронте реакции, $\theta - 1 \ll 1$, из формулы Франкеля (53) следует, что u_{n-} , $u_{\tau} \sim \theta - 1$ и соответственно

$$\frac{\partial u_{n\pm}}{\partial \tau}, \frac{\partial u_{\tau\pm}}{\partial \tau}, \frac{du_{n\pm}}{d\tau}, \frac{du_{\tau\pm}}{d\tau}, \frac{\partial V}{\partial \tau} \sim \frac{\theta - 1}{R}.$$

Из уравнения (117) получаем

$$\omega = \frac{\theta - 1}{R} \left(\frac{\partial u_{\tau-}}{\partial \tau} + \frac{\theta - 1}{R} \right) \left(\frac{\partial u_{n-}}{\partial \tau} \right)^{-1} +$$

$$+ O \left[\frac{(\theta - 1)^2}{R} \right]. \quad (120)$$

В случае слабо искривленного плоского фронта $1/R \sim \theta - 1 \Rightarrow \omega \sim (\theta - 1)^2$ в полном соответствии с теорией Дарье–Ландау [1, 8]. Если $1/R \sim 1$, то $\omega \sim (\theta - 1)/R$. Таким образом, большая кривизна создает большую завихренность за фронтом [2, 8]. Оценим с помощью этого верность формулы Франкеля (53). Вихревую составляющую скорости оценим как

$$u_{\nu} = -\frac{1}{2\pi} \nabla_{\tau} \times \iint \omega(r_{\xi}) \ln |r_{\xi} - r| dS_{\xi} \sim \omega D \sim \frac{\theta - 1}{R} D,$$

где D — размер области сгоревшего газа; $u_p \sim \theta - 1 \Rightarrow u_{\nu} \ll u_p$ или $D/R \leq 1$, т.е. формула (53) должна быть верна для достаточно слабо искривленного фронта при $\theta - 1 \ll 1$.

Рассмотрим общие уравнения горения, в которых скорость \mathbf{u} , хотя и меняется значительно в тонкой области, но остается непрерывной [1, 3]. Переход к бесконечно тонкому фронту, $\delta \rightarrow 0$, вырождает преобразование (111), (112) внутри области горения.

Однако это не должно нарушать его структуры. Математически это означает, что преобразования

$$\begin{aligned} u_{x-}(x, y, t) &= u_{0x-}(x_0, y_0), \\ u_{x+}(x, y, t) &= u_{0x+}(x_0, y_0), \end{aligned} \quad (121)$$

$$\begin{aligned} u_{y-}(x, y, t) &= u_{0y-}(x_0, y_0), \\ u_{y+}(x, y, t) &= u_{0y+}(x_0, y_0), \end{aligned} \quad (122)$$

где $u_{0x\pm}(x_0, y_0)$ и $u_{0y\pm}(x_0, y_0)$ — распределение скорости газа в момент времени $t = t_0$, должны взаимно однозначно переводить две области $g(x, y, t) < 0$ и $g(x, y, t) > 0$ в пространстве (x, y, t) в две области $g_0(x_0, y_0, t) < 0$ и $g_0(x_0, y_0, t) > 0$ в пространстве x_0, y_0, t с общей границей $g_0(x_0, y_0, t) = 0$ для любого t_0 . Условие, что в переменных x_0, y_0, t фронт не «расплывается», означает, что внутри области реакции должно выполняться условие

$$\begin{aligned} \frac{\delta_0}{R_0} = \frac{\partial(x_0, y_0)}{\partial(x, y)} \frac{\delta}{R_0} \ll 1 \\ \text{или} \quad \frac{\partial(u_x, u_y)}{\partial(x, y)} \frac{\delta}{R_0} \ll \frac{\partial(u_{0x}, u_{0y})}{\partial(x_0, y_0)} \end{aligned} \quad (123)$$

для любых t и t_0 . Здесь δ_0 — толщина и R_0 — радиус кривизны фронта в пространстве (x_0, y_0, t) . Это определенное требование на происходящие там внутренние процессы.

Впрочем, это не означает, что фронт не сожмется, например, в «расческу» или «ветку». Переходя по формулам (111), (112) к переменным x_0, y_0, t , из-за наличия стационарного профиля скоростей можно было бы подумать, что в пространстве (x_0, y_0, t) фронт не «движется». Однако частица (x_0, y_0) ничто не мешает входить внутрь фронта с одной плотностью и выходить из него в другой точке с другой плотностью. Поэтому скачкообразный профиль распределения плотности может смещаться, определяя движение истинного фронта реакции. Если структура профиля плотности другая, то это означает невозможность преобразования (121), (122). В случае бесконечно тонкого фронта скорость \mathbf{u} терпит разрыв на поверхности $g(x, y, t) = 0$, но на поверхности $g_0(x_0, y_0, t) = 0$ его может не быть. Никакого противоречия при этом нет, так как испытывают скачок функции $x(x_0, y_0, t)$ и $y(x_0, y_0, t)$. Частица (x_0, y_0) входит внутрь пламени в точке $(x_-(x_0, y_0, t), y_-(x_0, y_0, t))$ и выходит из него в точке $(x_+(x_0, y_0, t), y_+(x_0, y_0, t))$.

Из соотношения (123) следует, что градиенты скоростей внутри и вне пламени не должны сильно отличаться друг от друга. Таким образом, формула (117) должна быть верна только для достаточно искривленного пламени, хотя и приводит при

$\theta - 1 \rightarrow 0$ к правильным выводам для слабо искривленного фронта. Возможно, данную проблему решают поправки вида $u_x + U_{max}x/\delta$ и $u_y + U_{max}y/\delta$, где U_{max} — максимальная величина модуля скорости $\mathbf{u}(x, y, t)$. Однако в этом случае надо будет использовать уже конечную толщину фронта пламени (см. Приложение В).

Сделаем соответствующую оценку применимости формулы (117). Имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial(u_{0x}, u_{0y})}{\partial(x_0, y_0)} &\sim \left(\frac{|U|}{R_0}\right)^2, \\ \frac{\partial(u_x, u_y)}{\partial(x, y)} &\sim \left(\frac{\theta - 1}{\delta}\right)^2 + \left(\frac{|U|}{R}\right)^2. \end{aligned} \quad (124)$$

Подставляя (124) в (123), находим

$$\begin{aligned} \left(\left(\frac{\theta - 1}{\delta}\right)^2 + \left(\frac{|U|}{R}\right)^2\right) \frac{\delta}{R_0} \ll \left(\frac{|U|}{R_0}\right)^2 \\ \text{или} \quad \left(\frac{\theta - 1}{|U|}\right)^2 \frac{R}{\delta} + \frac{\delta}{R} \ll 1. \end{aligned} \quad (125)$$

Следовательно, $\delta/R \ll 1$ и $|U| \gg (\theta - 1)\sqrt{R/\delta}$, т. е. скорость должна быть достаточно велика. Вместо $u_x(x, y, t)$ и $u_y(x, y, t)$ можно использовать любые «удобные» величины. Необходимо только, чтобы они и/или их производные терпели разрыв на поверхности пламени и выполнялись условия (122), (123). Например, если выбрать $\varphi(x, y, t)$ и $\psi(x, y, t)$, так что

$$\mathbf{u}(x, y, t) = \nabla\varphi + \nabla \times \psi, \quad (126)$$

где

$$\psi(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{2\pi} \iint \omega(\mathbf{r}_\xi) \ln |\mathbf{r}_\xi - \mathbf{r}| dS_\xi,$$

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \iint \text{div } \mathbf{u}(\mathbf{r}_\xi) \ln |\mathbf{r}_\xi - \mathbf{r}| dS_\xi$$

— соответственно функция тока и потенциал, переходящий в потенциал Франкеля при $\delta \rightarrow 0$,

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \oint (\theta - 1) \ln |\mathbf{r}_\xi - \mathbf{r}| dl_\xi,$$

то можно обойтись без уравнений гидродинамики за фронтом. Действительно,

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{dy}{dt} \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \\ = \frac{d\varphi}{dt} = 0 \Rightarrow \varphi = \varphi_0(x_0, y_0), \end{aligned} \quad (127)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{dy}{dt} \frac{\partial \psi}{\partial y} = \\ = \frac{d\psi}{dt} = 0 \Rightarrow \psi = \psi_0(x_0, y_0). \end{aligned} \quad (128)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(y, t)} \left[\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(x, y)} \right]^{-1}, \quad x = x(x_0, y_0, t), \\ x_0 = x_0(x, y, t), \quad x_0|_{t=0} = x, \end{aligned} \quad (129)$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} = \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(t, x)} \left[\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(x, y)} \right]^{-1}, \quad y = y(x_0, y_0, t), \\ y_0 = y_0(x, y, t), \quad y_0|_{t=0} = y. \end{aligned} \quad (130)$$

Пусть $g(x, y, t) \equiv g(x_0, y_0, t) = 0$ — уравнение фронта в переменных x_0, y_0, t . Дифференцируя его по t , получаем при $t = 0$

$$V - n_x \frac{dx_-}{dt} - n_y \frac{dy_-}{dt} = V_{0-}, \quad (131)$$

$$V - n_x \frac{dx_+}{dt} - n_y \frac{dy_+}{dt} = V_{0+}. \quad (132)$$

Следовательно,

$$V_{0-} - V_{0+} \Rightarrow n_x \frac{dx_-}{dt} + n_y \frac{dy_-}{dt} = n_x \frac{dx_+}{dt} + n_y \frac{dy_+}{dt}.$$

Перейдем теперь в систему координат (\mathbf{n}, τ) , где $n_x = 1, n_y = 0$. Тогда формула (104) будет иметь вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\varphi_-, \psi_-)}{\partial(\tau, t)} \left[\frac{\partial(\varphi_-, \psi_-)}{\partial(n, \tau)} \right]^{-1} = \\ = \frac{\partial(\varphi_+, \psi_+)}{\partial(\tau, t)} \left[\frac{\partial(\varphi_+, \psi_+)}{\partial(n, \tau)} \right]^{-1}, \end{aligned} \quad (133)$$

а это означает, что

$$\begin{aligned} V_0 = V_{0-} = V_{0+} = V - \\ - \frac{\partial(\varphi_+, \psi_+)}{\partial(\tau, t)} \left[\frac{\partial(\varphi_+, \psi_+)}{\partial(n, \tau)} \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (134)$$

Здесь величины $\nabla \varphi_{\pm}, \nabla \times \psi_{\pm}, \partial \varphi_{\pm} / \partial t, \partial \psi_{\pm} / \partial t$ на границе пламени выражаются через V . Если $u_{\tau} = u_{\tau}(\varphi, \psi)$ и $u_n = u_n(\varphi, \psi)$, то

$$\begin{aligned} \frac{\partial(u_{\tau-}, u_{n-})}{\partial(\tau, t)} \left[\frac{\partial(u_{\tau-}, u_{n-})}{\partial(n, t)} \right]^{-1} = \\ = \frac{\partial(u_{\tau-}, u_{n-})}{\partial(\varphi_-, \psi_-)} \frac{\partial(\varphi_-, \psi_-)}{\partial(\tau, t)} \times \\ \times \left[\frac{\partial(u_{\tau-}, u_{n-})}{\partial(\varphi_-, \psi_-)} \frac{\partial(\varphi_-, \psi_-)}{\partial(n, \tau)} \right]^{-1} = \\ = \frac{\partial(\varphi_-, \psi_-)}{\partial(\tau, t)} \left[\frac{\partial(\varphi_-, \psi_-)}{\partial(n, \tau)} \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (135)$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} \frac{\partial(u_{\tau+}, u_{n+})}{\partial(\tau, t)} \left[\frac{\partial(u_{\tau+}, u_{n+})}{\partial(n, \tau)} \right]^{-1} = \\ = \frac{\partial(\varphi_+, \psi_+)}{\partial(\tau, t)} \left[\frac{\partial(\varphi_+, \psi_+)}{\partial(n, \tau)} \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (136)$$

В результате получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial(u_{\tau-}, u_{n-})}{\partial(\tau, t)} \left[\frac{\partial(u_{\tau-}, u_{n-})}{\partial(n, t)} \right]^{-1} = \\ = \frac{\partial(u_{\tau+}, u_{n+})}{\partial(\tau, t)} \left[\frac{\partial(u_{\tau+}, u_{n+})}{\partial(n, t)} \right]^{-1}, \end{aligned} \quad (137)$$

что является другим видом формулы (117). Следовательно, в этом случае уравнения (117) и (133) определяют одно и тоже уравнение фронта пламени.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе с помощью специального преобразования переменных в трехмерном потоке мы свели полную систему гидродинамических уравнений по объему к системе уравнений на поверхности. Полученные уравнения показывают серьезное влияние ненулевой завихренности на движение гидродинамических разрывов. Эти уравнения могут серьезно упростить их численное моделирование. Во-первых, они уменьшают размерность задачи на единицу. Во-вторых, самый малый масштаб, который можно разрешить при их моделировании, много больше толщины этого разрыва. Особенно это важно для неустойчивости Дарье–Ландау, где процессы, происходящие внутри пламени, крайне сложно моделировать на больших временных и пространственных масштабах [9, 21, 22]. В-третьих, они выведены в виде, независимом от выбора системы координат и могут быть применены в любых пространственных геометриях. В Приложении А показывается, как можно записать эти уравнения в любых удобных координатах и учесть влияние кривизны поверхности. В-четвертых, помимо скорости поверхности они позволяют определить, как меняются на разрыве все остальные параметры, характеризующие течение (такие как $\mathbf{u}, P, \boldsymbol{\omega}, \rho, s$ и т. д.).

К сожалению, все полученные системы уравнений неявные относительно времени и описывают только невязкие среды. Поэтому надо еще рассматривать краевые условия, чтобы определить скорость разрыва V . По-видимому, через них происходит поступление информации о внешнем потоке, несомненно влияющем на эволюцию всего фронта. При этом

они существенно трехмерные, т. е. вырождаются в двумерном случае. Однако это не означает, что они не могут быть успешно использованы в приложениях. При этом линейные соотношения всех рассмотренных в данной работе неустойчивостей (в частности Дарье–Ландау) здесь автоматически выполняются, так как полученные системы уравнений в двумерном случае задают эволюцию поверхностей разрывов через краевые условия, которые могут быть произвольными.

В случае двумерного потока мы также вывели систему уравнений для описания неустойчивости Дарье–Ландау, не связанную с предположениями об образующейся завихренности за фронтом, и нашли область ее применимости. В частных случаях показано, что она не противоречит выводам теории Дарье–Ландау. Построена общая теория этого метода, применимого для описания движения произвольной поверхности разрыва как в двумерном, так и в трехмерном случаях. Это представляет собой альтернативу полному решению систем дифференциальных уравнений и согласования их решений на поверхности, что фактически мы делали с уравнениями Эйлера до этого в случае трехмерного потока.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Выражения для dn/dt и ковариантных производных

Рассмотрим $(m - 1)$ -мерную поверхность $F(x_1, \dots, x_m, t) = 0$, движущуюся в m -мерном пространстве со скоростью $V = -(\partial F/\partial t)/|\nabla F|$. Выразим явно время t , т. е. $t - g(x_1, \dots, x_m) = 0$. Тогда $V = -|\nabla g|^{-1}$ — скорость и $\mathbf{n} = \nabla g/|\nabla g|$ — внутренняя нормаль к поверхности $\{\mathbf{x} : g(x_1, \dots, x_m) = \text{const}\}$ (см. рис. 4). Мы видим, что V и \mathbf{n} не зависят явно от времени. Каждая точка поверхности движется вдоль некоторой кривой со скоростью $-V\mathbf{n}$. Очевидно, что любая производная по времени от некоторой величины ψ вдоль этой кривой определяется формулой

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\partial\psi}{\partial t} - V(\mathbf{n} \cdot \nabla)\psi.$$

Рассмотрим производную по времени dn/dt вдоль этой кривой:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{n}}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(V \frac{\mathbf{n}}{V} \right) = V \frac{d}{dt} \frac{\mathbf{n}}{V} + \frac{dV}{dt} \frac{\mathbf{n}}{V} = \\ &= V \frac{d}{dt} (\nabla g) - \mathbf{n} \cdot (\mathbf{n} \cdot \nabla)V. \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Для первой компоненты вектора ∇g имеем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial g}{\partial x_1} &= -V(\mathbf{n} \cdot \nabla) \frac{\partial g}{\partial x_1} = -V^2 (\nabla g \cdot \nabla) \frac{\partial g}{\partial x_1} = \\ &= -\frac{V^2}{2} \frac{\partial}{\partial x_1} |\nabla g|^2 = -\frac{V^2}{2} \frac{\partial}{\partial x_1} V^{-2} = \frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial x_1}. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Аналогичные рассуждения мы можем провести для любой компоненты вектора ∇g , т. е. $d(\nabla g)/dt = \nabla V/V$. В результате из (A.1) получаем

$$\frac{d\mathbf{n}}{dt} = \nabla V - \mathbf{n} \cdot (\mathbf{n} \cdot \nabla)V. \quad (\text{A.3})$$

Умножим обе части выражения (A.3) на вектор $\boldsymbol{\tau}$, такой что $\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} = 0$. Имеем

$$\frac{d\mathbf{n}}{dt} \cdot \boldsymbol{\tau} = \frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{\tau}}, \quad \frac{d\mathbf{n}}{dt} \cdot \mathbf{n} = 0. \quad (\text{A.4})$$

Сделаем в исходном m -мерном евклидовом пространстве невырожденную замену переменных: $x_i = x_i(q_1, \dots, q_m)$, $i = 1, \dots, m$. Если f , u^i , u_i , u_{ij} и т. д. — тензоры, то величины

$$\frac{Df}{dq_r} = \frac{\partial f}{\partial q_r}, \quad \frac{Du^i}{dq_r} = \frac{\partial u^i}{\partial q_r} + \Gamma^i_{s,r} u^s,$$

$$\frac{Du_i}{dq_r} = \frac{\partial u_i}{\partial q_r} - \Gamma^s_{i,r} u_s,$$

$$\frac{Du_{ij}}{dq_r} = \frac{\partial u_{ij}}{\partial q_r} - \Gamma^s_{i,r} u_{sj} - \Gamma^s_{j,r} u_{is}$$

и т. д., где

$$\Gamma^k_{r,s} = \frac{\partial^2 x_j}{\partial q_s \partial q_r} \frac{\partial q_k}{\partial x_j}$$

— символ Кристоффеля, также являются тензорами, и в исходной системе координат (x_1, \dots, x_m) совпадают с обычными частными производными [14, 17, 23]. Выразим для примера уравнения Эйлера (6)–(8) и полную (субстанциональную) производную в этих переменных. Пусть $m = 2, 3$, P — скаляр давления, $\mathbf{u} = (u^i)$ — распределение вектора скорости,

$$g_{ij} = \delta_{kl} \frac{\partial x_k}{\partial q_i} \frac{\partial x_l}{\partial q_j}$$

— метрический тензор, такой что $g_{ij} g^{ik} = \delta_j^k$, где $\delta_j^k = \delta_{kj}$ — символ Кронекера. Тогда [14]

$$\frac{\partial u^i}{\partial t} + u^s \frac{Du^i}{dq_s} + g^{ij} \frac{\partial}{\partial q_j} \frac{P}{\rho} = 0, \quad (\text{A.5})$$

$$\frac{\partial \omega^i}{\partial t} = \nabla \times [\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}] = \omega^j \frac{Du^i}{dq_j} - u^s \frac{D\omega^i}{dq_s}, \quad (\text{A.6})$$

$$\frac{\partial}{\partial q^i} (\sqrt{g} u^i) = 0, \quad g = \det g_{ij}, \quad (\text{A.7})$$

$$\omega^r = [\nabla \times \mathbf{u}]^r = \sqrt{g} g^{ri} g^{js} \varepsilon_{ijk} \frac{Du^k}{\partial q_s} = \frac{1}{\sqrt{g}} \varepsilon^{ijr} \frac{Du_i}{\partial q_j}, \quad (\text{A.8})$$

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} - V n^s \frac{D}{\partial q_s} + u_\tau^s \frac{D}{\partial q_s} + \lambda \omega_\tau^s \frac{D}{\partial q_s}, \quad (\text{A.9})$$

где

$$\varepsilon_{ijk} = \varepsilon^{ijr} = \begin{cases} 0, & \text{если среди } i, j, k \text{ есть два равных числа,} \\ 1, & \text{если } (ijk) \text{ — четная перестановка чисел } (123), \\ -1, & \text{если } (ijk) \text{ — нечетная перестановка чисел } (123) \end{cases}$$

— символ Леви-Чивита. Производная в направлении \mathbf{s} запишется в виде

$$s^j \frac{D}{\partial s_j}.$$

Переменные Лагранжа x_0, y_0, z_0 здесь следует рассматривать как скаляры, удовлетворяющие уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_0}{\partial t} + u^r \frac{Dx_0}{\partial q_r} &= 0, & \frac{\partial y_0}{\partial t} + u^r \frac{Dy_0}{\partial q_r} &= 0, \\ \frac{\partial z_0}{\partial t} + u^r \frac{Dz_0}{\partial q_r} &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Интегралы движения (см. Приложение Б), записанные в любой системе координат, примут вид

$$\begin{aligned} \omega^r \frac{Dx_0}{\partial q_r} &= \omega_{0x}(x_0, y_0, z_0), \\ \omega^r \frac{Dy_0}{\partial q_r} &= \omega_{0y}(x_0, y_0, z_0), \\ \omega^r \frac{Dz_0}{\partial q_r} &= \omega_{0z}(x_0, y_0, z_0), \\ \Delta &= \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial(x_0, y_0, z_0)}{\partial(q_1, q_2, q_3)} = 1. \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Отсюда легко выяснить их геометрический смысл. Перейдем в систему координат $x_i = x_i(x_0, y_0, z_0)$, где $(x, y, z) = (x_i)$ и $(q_i) = (x_0, y_0, z_0)$ — переменные Лагранжа (A.10) в некоторый момент времени t . Тогда из (A.11) получаем

$$\begin{aligned} \omega^1(x_0, y_0, z_0, t) &= \omega_{0x}(x_0, y_0, z_0), \\ \omega^2(x_0, y_0, z_0, t) &= \omega_{0y}(x_0, y_0, z_0), \\ \omega^3(x_0, y_0, z_0, t) &= \omega_{0z}(x_0, y_0, z_0). \end{aligned}$$

Это означает, что

$$\begin{aligned} \omega(x_0, y_0, z_0, t) &= \omega^1 \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_0} + \omega^2 \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y_0} + \omega^3 \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z_0} = \\ &= \omega_{0x} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_0} + \omega_{0y} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y_0} + \omega_{0z} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z_0}. \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Пусть

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{12} &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_0} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y_0}, & \mathbf{S}_{13} &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_0} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z_0}, \\ \mathbf{S}_{23} &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y_0} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z_0} \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

— элементы площадей, образованные соответствующими координатными векторами локального базиса $(\partial \mathbf{r} / \partial x_0, \partial \mathbf{r} / \partial y_0, \partial \mathbf{r} / \partial z_0)$. Поскольку в лагранжевых координатах элемент объема

$$V = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_0} \cdot \left[\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y_0} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z_0} \right] = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(x_0, y_0, z_0)} = 1,$$

умножив скалярно левую и правую части (A.13) на элементы площадей (A.14), найдем, что при движении частицы жидкости сохраняются величины

$$\begin{aligned} \omega \cdot \mathbf{S}_{12} &= \omega_{0z}(x_0, y_0, z_0), & \omega \cdot \mathbf{S}_{13} &= -\omega_{0y}(x_0, y_0, z_0), \\ \omega \cdot \mathbf{S}_{23} &= \omega_{0x}(x_0, y_0, z_0), \end{aligned}$$

что есть следствие теоремы Томпсона [1]. Удобно использовать следующие криволинейные координаты. Пусть $(m - 1)$ -мерная поверхность $F(x_1, \dots, x_m, t) = 0$, каждая точка которой движется со скоростью $-V \mathbf{n}$, проходит через каждую точку пространства только один раз. Введем в момент времени $t = 0$ на этой поверхности произвольные координаты (q_1, \dots, q_{m-1}) . Каждой точке (x_1, \dots, x_m) евклидова пространства поставим в соответствие набор чисел q_1, \dots, q_m , где q_1, \dots, q_{m-1} — координаты той точки поверхности в момент $t = 0$, которая через время $q_m = t$ пройдет через нее. В новых переменных (q_1, \dots, q_m) поверхность $F(x_1, \dots, x_m, t) = 0$ в любой момент времени t совпадает с координатной поверхностью $q_m = t$. Вектору $\mathbf{n} = -\nabla g / |\nabla g|$ в системе координат (q_1, \dots, q_m) соответствуют два простых представления:

$$n_i = -|\nabla g|^{-1} \partial g / \partial q_i = (0 \dots 1)^T, \quad n^i = g^{ij} n_j.$$

При движении любой точки поверхности со скоростью $-V\mathbf{n}$ ее координаты (q_1, \dots, q_{m-1}) по определению не меняются, и соотношения

$$x_i = x_i(q_1, \dots, q_m), \quad \frac{dx_i}{dt} = -Vn_{x_i} = \frac{\partial x_i}{\partial q_m},$$

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = -\frac{dV}{dt}n_{x_i} - V\frac{dn_{x_i}}{dt} = \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_m^2},$$

где m зафиксировано, позволяют легко выразить метрический тензор g_{ij} и символ Кристоффеля $\Gamma_{r,s}^k$ через известные поверхностные величины $x_i = x_i(q_1, \dots, q_m)$, n^i , V и dV/dt . Докажем одно полезное утверждение. Пусть векторное поле u^i претерпевает разрыв гладкости $[u^i] = \mu n^i$ на поверхности $F(x_1, \dots, x_3, t) = 0$ (см. рис. 4). Тогда скачок нормальной завихренности этого поля через нее равен нулю, т. е. $[[\nabla \times \mathbf{u}]_n] = 0$. Действительно, рассмотрим непрерывное векторное поле $w^i = u^i - \nabla^i \varphi$, где

$$\varphi(r) = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{\mu}{|\mathbf{r}_\xi - \mathbf{r}|} dS_\xi. \quad (\text{A.15})$$

Тогда из непрерывности w^i и (A.8) следуют равенства

$$\begin{aligned} [[\nabla \times \mathbf{u}]_n] &= [[\nabla \times \mathbf{w}]_n] = [n_r [\nabla \times \mathbf{w}]^r] = \\ &= \left[\frac{1}{\sqrt{g}} n_r \varepsilon^{ijr} \frac{Dw_i}{\partial q_j} \right] = \frac{1}{\sqrt{g}} \varepsilon^{ij3} \left[\frac{Dw_i}{\partial q_j} \right] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{g}} \varepsilon^{ij3} \left[\frac{\partial w_i}{\partial q_j} \right] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\left[\frac{\partial w_1}{\partial q_2} \right] - \left[\frac{\partial w_2}{\partial q_1} \right] \right) = 0, \quad (\text{A.16}) \end{aligned}$$

что и требовалось доказать. Таким образом, используя соотношения (A.5)–(A.11), можно построить теорию движения гидродинамических разрывов и для строго нелинейных поверхностей.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Интегралы движения

Рассмотрим уравнения идеальной несжимаемой жидкости в трехмерном случае:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} = \nabla \times [\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}], \quad (\text{B.1})$$

$$\text{div } \mathbf{u} = 0. \quad (\text{B.2})$$

Рассмотрим также лагранжевы переменные (т. е. разметку) (20). Умножим обе части уравнения (B.1) на ∇x_0 . Тогда

$$\begin{aligned} \nabla x_0 \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} &= \nabla x_0 \cdot \nabla \times [\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}] = -\text{div}(\nabla x_0 \times [\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}]) = \\ &= -\text{div}(\mathbf{u}(\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla x_0)) + \text{div}(\boldsymbol{\omega}(\mathbf{u} \cdot \nabla x_0)) = \\ &= -\mathbf{u} \cdot \nabla(\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla x_0) + \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla(\mathbf{u} \cdot \nabla x_0) = \\ &= -\mathbf{u} \cdot \nabla(\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla x_0) - \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \frac{\partial x_0}{\partial t}. \end{aligned}$$

При этом использовано свойство переменных Лагранжа:

$$\frac{\partial x_0}{\partial t} + u_x \frac{\partial x_0}{\partial x} + u_y \frac{\partial x_0}{\partial y} + u_z \frac{\partial x_0}{\partial z} = 0.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla x_0) + \mathbf{u} \cdot \nabla(\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla x_0) &= \frac{d}{dt}(\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla x_0) = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla x_0 = \omega_{0x}(x_0, y_0, z_0), \end{aligned}$$

где d/dt — производная по времени в лагранжевых переменных, $\boldsymbol{\omega}_0(x_0, y_0, z_0)$ — начальное распределение завихренности $\boldsymbol{\omega}$. Аналогично

$$\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla y_0 = \omega_{0y}(x_0, y_0, z_0), \quad \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla z_0 = \omega_{0z}(x_0, y_0, z_0).$$

Из уравнения неразрывности (B.2) следует [11], что

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{u} = 0 \Rightarrow \frac{\partial(u_x, y, z)}{\partial(x, y, z)} + \frac{\partial(x, u_y, z)}{\partial(x, y, z)} + \\ + \frac{\partial(x, y, u_z)}{\partial(x, y, z)} = 0, \quad \frac{1}{\Delta} \frac{d\Delta}{dt} = 0, \quad (\text{B.3}) \end{aligned}$$

т. е.

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(x_0, y_0, z_0)} = 1.$$

Выражая $\boldsymbol{\omega}$ с помощью (B.3), получим также [1]

$$\omega_x(x_0, y_0, z_0, t) = \boldsymbol{\omega}_0 \cdot \nabla_0 x,$$

$$\omega_y(x_0, y_0, z_0, t) = \boldsymbol{\omega}_0 \cdot \nabla_0 y,$$

$$\omega_z(x_0, y_0, z_0, t) = \boldsymbol{\omega}_0 \cdot \nabla_0 z.$$

Рассмотрим еще общее уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho + \rho \text{div } \mathbf{u} = 0. \quad (\text{B.4})$$

Переходя в нем к переменным Лагранжа, находим [15]

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \left(\frac{\partial(u_x, y, z)}{\partial(x, y, z)} + \frac{\partial(x, u_y, z)}{\partial(x, y, z)} + \frac{\partial(x, y, u_z)}{\partial(x, y, z)} \right) = 0,$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \frac{\rho}{\Delta} \frac{d\Delta}{dt} = 0,$$

т. е.

$$\rho\Delta = \rho \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(x_0, y_0, z_0)} = \rho_0(x_0, y_0, z_0)$$

— интеграл движения. В случае, если $\rho \neq \text{const}$, но $s = \text{const}$ (т. е. существует однозначная связь между давлением и плотностью $P = P_S(\rho)$), соответствующими интегралами будут

$$\frac{\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla x_0}{\rho}, \quad \frac{\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla y_0}{\rho}, \quad \frac{\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla z_0}{\rho}.$$

Такие же результаты можно получить, если вместо лагранжеских переменных использовать более общее преобразование переменных:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= u_x(x, y, z, t) + \lambda(t)\omega_x(x, y, z, t), \\ x &= x(x_0, y_0, z_0, t), \quad x_0 = x_0(x, y, z, t), \end{aligned} \quad (\text{Б.5})$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= u_y(x, y, z, t) + \lambda(t)\omega_y(x, y, z, t), \\ y &= y(x_0, y_0, z_0, t), \quad y_0 = y_0(x, y, z, t), \end{aligned} \quad (\text{Б.6})$$

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= u_z(x, y, z, t) + \lambda(t)\omega_z(x, y, z, t), \\ z &= z(x_0, y_0, z_0, t), \quad z_0 = z_0(x, y, z, t), \end{aligned} \quad (\text{Б.7})$$

где $x_0|_{t=0} = x$, $y_0|_{t=0} = y$, $z_0|_{t=0} = z$, а $\lambda(t)$ — некоторая функция от t . Аналогичными рассуждениями можно установить, что в идеальной жидкости в этих переменных величины $\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla x_0$, $\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla y_0$, $\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla z_0$ и якобиан этого преобразования Δ не зависят явно от времени. Вместо $\lambda(t)$ можно взять $\lambda(x, y, z, t)$, так что

$$\boldsymbol{\omega}(x, y, z, t) \cdot \nabla \lambda(x, y, z, t) = 0,$$

чтобы выполнялось условие $\text{div}(\mathbf{u} + \lambda\boldsymbol{\omega}) = 0$. Выражая также $\boldsymbol{\omega}$, получим

$$\omega_x(x_0, y_0, z_0, t) = \boldsymbol{\omega}_0 \cdot \nabla_0 x, \quad \omega_y(x_0, y_0, z_0, t) = \boldsymbol{\omega}_0 \cdot \nabla_0 y,$$

$$\omega_z(x_0, y_0, z_0, t) = \boldsymbol{\omega}_0 \cdot \nabla_0 z,$$

где $\nabla_0 = (\partial/\partial x_0, \partial/\partial y_0, \partial/\partial z_0)$. Аналогично, если $\rho \neq \text{const}$, но $s = \text{const}$ (т. е. опять же существует однозначная связь между давлением и плотностью $P = P_S(\rho)$), можно в формулах (Б.5)–(Б.7) взять $\lambda(x, y, z, t)$, так что

$$\lambda\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla\rho + \rho\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla\lambda = 0.$$

Тогда для данной замены переменных соответствующими интегралами будут

$$\frac{\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla x_0}{\rho}, \quad \frac{\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla y_0}{\rho}, \quad \frac{\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla z_0}{\rho}, \quad \rho\Delta.$$

Фактически, здесь требуется не учитывать в формуле (Б.1) слагаемое $\nabla\rho \times \nabla P/\rho^2$, которое учитывает сжимаемость жидкости. При сильно дозвуковом движении фронта реакции, типичном для дефлаграции, сжимаемостью вещества обычно можно пренебречь, что делает изложенный выше анализ строгим.

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Инвариантные относительно выбора системы координат условия сшивки на фронте

В работах [18, 24] получены следующие условия на границе фронта реакции:

$$[\rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} + V_f)] = \delta K \ln \theta, \quad (\text{В.1})$$

$$\begin{aligned} [\mathbf{v} \times \mathbf{n}] &= -\delta \left\{ \text{Pr} + \frac{\theta \ln \theta}{\theta - 1} \right\} \times \\ &\times \{ [\nabla \times \mathbf{v}] + 2(\theta - 1)\nabla \times \mathbf{n} \}, \end{aligned} \quad (\text{В.2})$$

$$\begin{aligned} [p + \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} + V_f)] &= \delta \left\{ \frac{\theta \ln \theta}{\theta - 1} [\nabla p \cdot \mathbf{n}] - \right. \\ &\left. - (\theta \ln \theta + \theta - 1)\nabla \cdot \mathbf{n} - V_f K \ln \theta \right\}, \end{aligned} \quad (\text{В.3})$$

где $[\Phi]$ — скачок величины Φ на фронте, K — мера деформации фронта,

$$K = -V_f \nabla \cdot \mathbf{n} - \mathbf{n} \cdot \nabla \times [\mathbf{v} \times \mathbf{n}], \quad (\text{В.4})$$

Pr — число Прандтля, $V_f = -F_t/|\nabla F|$ — скорость фронта, описываемого уравнением $F(\mathbf{x}, t) = 0$, \mathbf{n} — внутренняя нормаль к фронту. Единицами длины, скорости, времени и давления в уравнениях (В.1)–(В.4) являются соответственно R_0 , U_f , R_0/U_f и $\rho_f U_f^2$, где R_0 — характерный размер задачи, U_f — скорость плоского фронта пламени относительно топлива, ρ_f — плотность свежего топлива. При этом $\delta = \nu/\text{Pr} U_f R_0$ — приведенная к безразмерному виду толщина фронта, ν — коэффициент вязкости. К формулам (В.1)–(В.3) следует также добавить уравнение

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} + V_f = 1 - \delta \frac{\gamma}{2\theta} (l - l_0\theta)K, \quad (\text{В.5})$$

где

$$\gamma \equiv \theta \int_1^\sigma \frac{\ln s}{s-1} ds > 0, \quad l_0 = -\frac{2\theta \ln \theta}{\gamma(\theta-1)} < 0,$$

$$l \equiv \frac{E(Le - 1)}{\theta^2}, \quad \sigma = 1 - \frac{1}{\theta}.$$

Здесь $Le = Sc/Pr$ — число Льюиса, характеризующее термодиффузию D_{th} , E — энергия активации, деленная на энтальпию свежего топлива и предполагаемая достаточно большой. Преимущество этих соотношений заключается в том, что они сразу записаны в виде, инвариантном относительно изменения системы координат. Однако в них не учитывается зависимость от температуры и все физические параметры θ , ν , l и т. д. предполагаются постоянными. Современное исследование и решение этого вопроса дано в работе [25].

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика: Гидродинамика*, т. VI, Наука, Москва (1986).
2. F. A. Williams, *Combustion Theory*, Benjamin, CA (1985).
3. E. Ott, Phys. Rev. Lett. **29**, 1429 (1972).
4. D. L. Book, E. Ott, and A. L. Sulton, Phys. Fluids **17**, 676 (1974).
5. А. П. Напартович, А. Н. Старостин, *Химия плазмы*, Атомиздат, Москва (1979), вып. 6.
6. А. В. Недоспасов, В. Д. Хаит, *Колебания и неустойчивости низкотемпературной плазмы*, Наука, Москва (1979).
7. Е. П. Велихов, А. С. Ковалев, А. Т. Рахимов, *Физические явления в газоразрядной плазме*, Наука, Москва (1987).
8. Я. Б. Зельдович, Г. И. Баренблатт, В. Б. Либрович и др., *Математическая теория горения и взрыва*, Наука, Москва (1980).
9. V. V. Bychkov, Phys. Fluids **10**, 2091 (1998).
10. G. I. Sivashinsky, Acta Astronaut. **4**, 1177 (1977).
11. M. Frankel, Phys. Fluids A **2**, 1879 (1990).
12. V. Bychkov, M. Zaytsev, and V. Akkerman, Phys. Rev. E **68**, 026312 (2003).
13. А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев, *Справочник по нелинейным уравнениям математической физики: Точные решения*, Физматлит, Москва (2002).
14. Б. Е. Победря, *Лекции по тензорному анализу*, Изд-во Моск. унив., Москва (1986).
15. А. А. Самарский, Ю. П. Попов, *Разностные методы решения задач газовой динамики*, Наука, Москва (1980).
16. А. Н. Тихонов, А. А. Самарский, *Уравнения математической физики*, Наука, Москва (1966).
17. Я. А. Схоутен, *Тензорный анализ для физиков*, Наука, Москва (1965).
18. M. Matalon and B. J. Matkowsky, Combust. Sci. Technol. **34**, 295 (1983).
19. O. Yu. Travnikov, V. V. Bychkov, and M. A. Liberman, Phys. Rev. E **61**, 468 (2000).
20. S. Kadowaki, Phys. Fluids **11**, 3426 (1999).
21. V. V. Bychkov, S. M. Golberg, M. A. Liberman et al., Phys. Rev. E **54**, 3713 (1996).
22. M. Zaytsev and V. Bychkov, Phys. Rev. E **66**, 026310 (2002).
23. Г. В. Корнев, *Тензорное исчисление*, Изд-во МФТИ, Москва (1996).
24. K. Bechtold and M. Matalon, Combust. Flame **67**, 77 (1987).
25. Thije Boonkamp, J. H. M., L. P. H. de Goeij, van Oijen et al., Combust. Sci. Technol. **180**, 1449 (2008).