

ЕЩЕ ОДНО РЕШЕНИЕ ДВУМЕРНОЙ МОДЕЛИ ИЗИНГА

*С. Н. Вергелес**

*Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау Российской академии наук
142432, Черноголовка, Московская обл., Россия*

*Московский физико-технический институт
141700, Долгопрудный, Московская обл., Россия*

Поступила в редакцию 16 октября 2008 г.

Вычислена статистическая сумма двумерной модели Изинга на регулярной решетке при помощи матричного представления алгебры Клиффорда или алгебры Дирака. Число образующих алгебры Дирака равно числу узлов решетки. Показано, что сумме замкнутых контуров с самопересечениями на плоской решетке соответствует след от некоего полинома матриц Дирака. Этот полином является элементом группы вращений в спинорном представлении. Таким образом, статистическая сумма модели является некоторой функцией характера на ортогональной группе большой размерности в спинорном представлении.

PACS: 05.50.+q

1. ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим двумерную модель Изинга на регулярной решетке, статистическая сумма которой определяется как

$$Z = \sum_{\{\sigma=\pm 1\}} \exp \left\{ \theta \sum_{m=1}^{M-1} \sum_{n=1}^{N-1} [\sigma_{m,n}(\sigma_{m+1,n} + \sigma_{m,n+1})] \right\}, \quad (1.1)$$

$$m = 1, \dots, M, \quad n = 1, \dots, N.$$

Пара чисел (m, n) нумерует узел решетки, находящийся на пересечении m -го столбца и n -й строки решетки.

Сумма (1.1) впервые была вычислена Онзагером [1] и затем — рядом других авторов, в том числе и другими методами (см. [2–12]). Перечисленные здесь решения не исчерпывают множество всех независимых решений, но, насколько известно автору, представляют основные подходы, используемые при решении двумерных решеточных статистических систем. Трансфер-матричный подход, в котором решающее значение играет нахождение максимального собственного значения трансфер-матрицы, исполь-

зуется в работах [1–6]. Комбинаторный метод вычислений применяется в работах [7–10]. В работе [7] статистическая сумма представлена в форме вычисляемого определителя, а в работах [8, 9] — в форме пфаффиана. В работе [10] изящно вычисляется сумма по замкнутым контурам (петлям) с самопересечениями. В работе [11] используется соотношение звезда–треугольник в качестве рекурсионного соотношения. Метод коммутирующих трансфер-матриц для решения двумерной модели Изинга применяется в работе [12].

Представленный здесь метод вычисления статистической суммы (1.1) отличается от упомянутых выше методов. Статистическая сумма вычисляется при помощи матричного представления алгебры Клиффорда или алгебры Дирака. Каждому узлу решетки соответствует независимая матрица Дирака, так что число образующих алгебры Дирака равно числу узлов решетки MN . Заметим, что в решении Кауфман [2] также используется алгебра Клиффорда для представления трансфер-матрицы, однако с числом образующих порядка M . Показано, что сумме петель с самопересечениями на плоской решетке соответствует след от некоего полинома матриц Дирака. Этот полином является элементом группы вращений в спинорном представлении. Таким образом, статистическая сумма модели является некоторой функцией характера на ортогональной группе

*E-mail: vergeles@itp.ac.ru

большой размерности в спинорном представлении. По нашему мнению, предлагаемый подход может быть применен к изучению статистических моделей не только на двумерной решетке, но также и на решетках бóльшей размерности. В этом заключается его привлекательность.

Учитывая, что $\sigma_{m,n}^2 = 1$, перепишем статистическую сумму следующим образом:

$$Z = \sum_{\{\sigma=\pm 1\}} \prod_{m=1}^{M-1} \prod_{n=1}^{N-1} \left[(\text{ch } \theta + \sigma_{m,n} \sigma_{m+1,n} \text{sh } \theta) \times (\text{ch } \theta + \sigma_{m,n} \sigma_{m,n+1} \text{sh } \theta) \right]. \quad (1.2)$$

Правая часть последнего равенства является полиномом по переменным $\{\sigma_{m,n}\}$, причем каждая переменная $\sigma_{m,n}$ может иметь степень не выше четвертой. Очевидно, что после вычисления суммы (1.2) все слагаемые с нечетными степенями каждой из этих переменных обращаются в нуль и учитывать следует лишь слагаемые, пропорциональные $\sigma_{m,n}^0 = \sigma_{m,n}^2 = \sigma_{m,n}^4 = 1$ для всех m и n . Назовем «связью» ребро, соединяющее две ближайшие вершины, которому приписан множитель $\text{th } \theta$. Из представления (1.2) видно, что эта сумма равна сумме всевозможных петель на решетке как непересекающихся, так и с пересечениями, причем пересекающиеся петли могут иметь лишь общие вершины, но не общие ребра. Каждому ребру каждой петли сопоставляется множитель $\text{th } \theta$, так что ребра контуров являются связями. К каждой вершине может подходить четыре, две или ни одной связи. Таким образом, статистическая сумма (1.2) может быть представлена как

$$Z = (\text{ch } \theta)^{2(M-1)(N-1)} 2^{MN} \sum_{\text{loops}} \text{th}^\nu \theta, \quad (1.3)$$

где ν есть суммарное число связей слагаемого [10].

Перейдем к изложению нашего метода.

Рассмотрим алгебру Клиффорда–Дирака с MN образующими в матричном представлении:

$$\gamma_x \gamma_y + \gamma_y \gamma_x = 2\delta_{xy}, \quad x, y = 1, \dots, MN. \quad (1.4)$$

Матрицы $\{\gamma_x\}$ — эрмитовы и имеют размерность $2^{MN/2}$ — минимально возможную при данном числе матриц¹⁾. Из алгебры (1.4) немедленно следует, что след от любого произведения нечетного числа γ -матриц равен нулю, и

¹⁾ Для простоты предполагается, что числа M и N — четные.

$$\begin{aligned} \text{tr } \gamma_x \gamma_y &= 2^{MN/2} \delta_{xy}, \\ \text{tr } \gamma_x \gamma_y \gamma_z \gamma_v &= 2^{MN/2} (\delta_{xy} \delta_{zv} - \delta_{xz} \delta_{yv} + \delta_{xv} \delta_{yz}) \end{aligned} \quad (1.5)$$

и т. д. Очевидно, что любое произведение γ -матриц путем их перестановок и использования равенств $\gamma_x^2 = 1$ приводится либо к числу ± 1 (в зависимости от числа перестановок), либо к произведению попарно различных γ -матриц. В последнем случае согласно (1.5) след произведения γ -матриц равен нулю, а в первом — $\pm 2^{MN/2}$.

Теория γ -матриц (1.4) в пространствах большой размерности, а также в гильбертовом пространстве, изложена в работе [13].

Далее мы будем считать, что индексы x, y и т. д. нумеруют узлы решетки и являются целочисленными векторами на плоскости: $\mathbf{x} = (m, n)$. Таким образом, каждому узлу решетки с индексом (m, n) сопоставляется матрица $\gamma_{\mathbf{x}} = \gamma_{m,n}$. На приводимых ниже рисунках подразумевается, что индекс m растет направо, а индекс n — вверх. Полезно определить также элементарные векторы — образующие решетки: $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$ и $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$.

Имеет место следующее утверждение: статистическая сумма (1.1) или (1.2) может быть записана также в виде

$$\begin{aligned} Z &= 2^{MN/2} (\text{ch } 2\theta)^{(M-1)(N-1)} \times \\ &\times \text{tr} \left\{ \overrightarrow{\prod}_n \overrightarrow{\prod}_m U_{m,n} \right\}, \quad (1.6) \\ U_{m,n} &\equiv [(\lambda + \mu \gamma_{m,n} \gamma_{m,n+1}) \times \\ &\times (\lambda + \mu \gamma_{m,n} \gamma_{m+1,n})]. \end{aligned}$$

Символ $\overrightarrow{\prod}_m$ означает упорядоченное произведение всех матриц $U_{m,n}$ при фиксированном n , так что индекс m равномерно растет слева направо:

$$U^{(n)} \equiv \overrightarrow{\prod}_m U_{m,n} \equiv \dots U_{m-1,n} U_{m,n} U_{m+1,n} \dots, \quad (1.7)$$

и аналогично:

$$U \equiv \overrightarrow{\prod}_n U^{(n)} \equiv \dots U^{(n-1)} U^{(n)} U^{(n+1)} \dots \quad (1.8)$$

При этом в фигурных скобках сначала вычисляются произведения по m при фиксированном n , и лишь затем — произведение по n .

Сформулированное утверждение справедливо, если следы от всех мономов в полиноме по γ -матрицам в фигурных скобках в формуле (1.6) неотрицательны (условие положительности, которое доказывается ниже) и

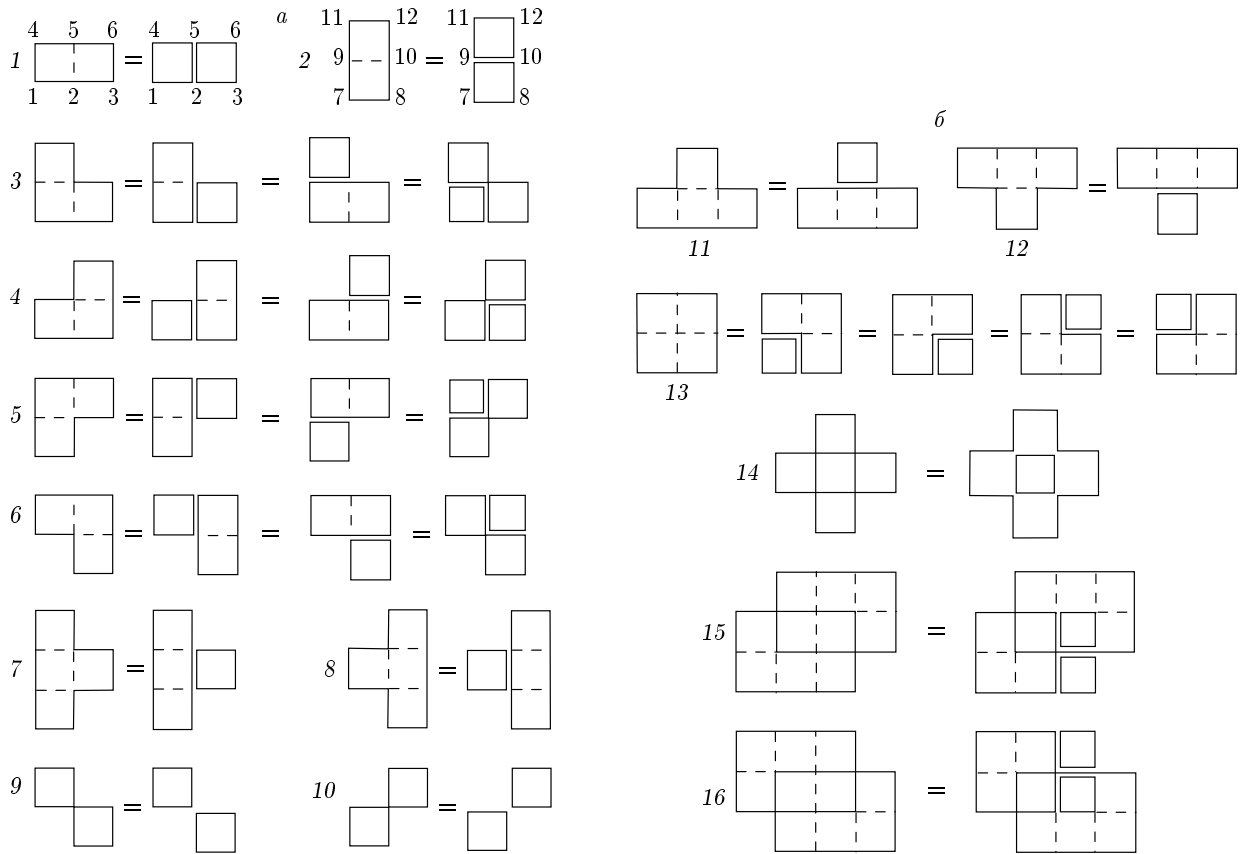


Рис. 1. Каждой петле (замкнутому контуру, возможно, с самопересечениями) соответствует матричный фактор, полученный путем произведений γ -матриц в соответствии с указанными в тексте правилами. Каждому графу в правых частях равенств приписывается произведение факторов, соответствующих отдельным замкнутым контурам. Каждое равенство на рисунке означает равенство фактора, соответствующего петле в левой части, произведению факторов отдельных замкнутых петель в правой части

$$\lambda \equiv \cos \frac{\psi}{2} = \frac{\text{ch } \theta}{\sqrt{\text{ch } 2\theta}}, \quad (1.9)$$

$$\mu \equiv \sin \frac{\psi}{2} = \frac{\text{sh } \theta}{\sqrt{\text{ch } 2\theta}} \rightarrow \sin \psi = \frac{2 \text{th } \theta}{1 + \text{th}^2 \theta}.$$

Заметим, что выражение в квадратных скобках (1.6) получается из выражения в квадратных скобках (1.2) путем замен

$$\sigma_{m,n} \rightarrow \gamma_{m,n}, \quad \sum_{\{\sigma=\pm 1\}} \rightarrow 2^{MN/2} \text{tr}$$

и вынесения множителя $\text{ch } 2\theta$. Однако, если в случае (1.2) порядок сомножителей не имеет значения, то в случае представления статистической суммы согласно (1.6) порядок расстановки сомножителей, а также их вид имеют ключевое значение.

Чтобы установить совпадение правых частей (1.6) и (1.3), достаточно учесть условие положитель-

ности и тот факт, что под знаком следа в (1.6) «выживают» лишь те полиномы по γ -матрицам, которые содержат каждую из них в степенях 0, 2 или 4 (так же, как и в случае переменных σ), и воспользоваться обозначениями (1.9).

Докажем условие положительности, используя метод математической индукции. В процессе вычислений числовые множители игнорируются, поскольку существенным является лишь вопрос о знаке.

Начнем вычисление с проверки того, что матричный фактор элементарной ячейки, соответствующий элементарной петле, ограничивающей элементарную ячейку с вершинами

$$\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} + \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{x} + \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{x} + \mathbf{e}_2, \quad (1.10)$$

равен единице. Действительно, согласно (1.6) этот матричный фактор равен

$$(\gamma_{\mathbf{x}} \gamma_{\mathbf{x}+\mathbf{e}_2})(\gamma_{\mathbf{x}} \gamma_{\mathbf{x}+\mathbf{e}_1}) \times \\ \times (\gamma_{\mathbf{x}+\mathbf{e}_1} \gamma_{\mathbf{x}+\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2})(\gamma_{\mathbf{x}+\mathbf{e}_2} \gamma_{\mathbf{x}+\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2}) = 1. \quad (1.11)$$

Дальнейшее продвижение основано на возможности представления матричного фактора петли в виде произведения матричного фактора меньшей петли, ограничивающей на одну или более элементарных ячеек меньше, чем исходная петля, и матричных факторов элементарных ячеек, дополняющих меньшую петлю до исходной. Каждое из равенств на рис. 1 графически представляет равенство матричного фактора петли в левой части равенства и произведения матричного фактора уменьшенной петли на матричные факторы элементарных ячеек. Все матричные факторы вычисляются в соответствии с упорядоченным произведением в соотношении (1.6). На рис. 1 сплошными линиями изображаются петли, а пунктирные линии разделяют внутренности петель на элементарные ячейки. Равенства на рис. 1 легко устанавливаются непосредственной проверкой. Например, для равенств 1 и 2 на рис. 1а имеем

$$[(\gamma_1 \gamma_4)(\gamma_1 \gamma_2)(\gamma_2 \gamma_3)(\gamma_3 \gamma_6)(\gamma_4 \gamma_5)(\gamma_5 \gamma_6)] = \\ = [(\gamma_1 \gamma_4)(\gamma_1 \gamma_2)(\gamma_2 \gamma_5)(\gamma_4 \gamma_5)] \times \\ \times [(\gamma_2 \gamma_5)(\gamma_2 \gamma_3)(\gamma_3 \gamma_6)(\gamma_5 \gamma_6)], \\ [(\gamma_7 \gamma_9)(\gamma_7 \gamma_8)(\gamma_8 \gamma_{10}) \times \\ \times (\gamma_9 \gamma_{11})(\gamma_{10} \gamma_{12})(\gamma_{11} \gamma_{12})] = \\ = [(\gamma_7 \gamma_9)(\gamma_7 \gamma_8)(\gamma_8 \gamma_{10})(\gamma_9 \gamma_{10})] \times \\ \times [(\gamma_9 \gamma_{11})(\gamma_9 \gamma_{10})(\gamma_{10} \gamma_{12})(\gamma_{11} \gamma_{12})]$$

и т. д. Нарастивая петли и их матричные факторы в соответствии со схемами на рис. 1, можно представить матричные факторы любых петель как произведение матричных факторов элементарных ячеек, равных единице согласно соотношению (1.11). Таким образом индуктивно доказывается равенство единице матричных факторов любых петель. Тем самым устанавливается условие положительности.

Очевидно, что каждый сомножитель $\lambda + \mu \gamma_{\mathbf{x}} \gamma_{\mathbf{x}+\mathbf{e}}$ в произведении под знаком следа в формуле (1.6) является матрицей ортогонального поворота в спинорном представлении на угол ψ в MN -мерном вещественном пространстве в плоскости, отмеченной парой γ -матриц в этом множителе. Поэтому и все произведение \mathcal{U} (см. (1.8)) под знаком следа является матрицей некоего ортогонального поворота в спи-

норном представлении в MN -мерном вещественном пространстве. Как известно [13], эта матрица может быть представлена в виде

$$\mathcal{U} = \exp\left(\frac{1}{4} \omega_{\mathbf{x},\mathbf{y}} \gamma_{\mathbf{x}} \gamma_{\mathbf{y}}\right), \quad \omega_{\mathbf{x},\mathbf{y}} = -\omega_{\mathbf{y},\mathbf{x}}, \quad (1.13)$$

причем

$$\mathcal{U}^\dagger \gamma_{\mathbf{x}} \mathcal{U} = \mathcal{O}_{\mathbf{x},\mathbf{y}} \gamma_{\mathbf{y}}, \\ \mathcal{O}_{\mathbf{x},\mathbf{y}} \equiv (e^\omega)_{\mathbf{x},\mathbf{y}} = \delta_{\mathbf{x},\mathbf{y}} + \omega_{\mathbf{x},\mathbf{y}} + \\ + \frac{1}{2!} \omega_{\mathbf{x},\mathbf{z}} \omega_{\mathbf{z},\mathbf{y}} + \dots \quad (1.14)$$

След фигурных скобок в (1.6), т. е. след от матрицы \mathcal{U} , просто выражается через собственные значения вещественной ортогональной матрицы $\mathcal{O}_{\mathbf{x},\mathbf{y}}$. Пусть набор чисел

$$(\rho_1, \bar{\rho}_1, \rho_2, \bar{\rho}_2, \dots, \rho_{MN/2}, \bar{\rho}_{MN/2}) = \\ = \{\rho_k, \bar{\rho}_k\}, \quad k = 1, \dots, MN/2 \quad (1.15)$$

образует полный набор собственных значений матрицы $\mathcal{O}_{\mathbf{x},\mathbf{y}}$. Тогда (см. Приложение)

$$\text{tr } \mathcal{U} = \prod_{k=1}^{MN/2} \left[2 \text{ch} \frac{\ln \rho_k}{2} \right] = \prod_{k=1}^{MN/2} \left[2 \cos \frac{\phi_k}{2} \right] = \\ = \prod_{k=1}^{MN/2} \left(\sqrt{\rho_k} + \sqrt{\bar{\rho}_k} \right), \quad \rho_k = e^{i\phi_k}. \quad (1.16)$$

В статистическом пределе, когда $M, N \rightarrow \infty$, задача отыскания собственных значений матрицы $\mathcal{O}_{\mathbf{x},\mathbf{y}}$ кардинально упрощается, поскольку на относительно небольшом отдалении от границ $\mathcal{O}_{\mathbf{x},\mathbf{x}+\mathbf{z}}$ матрицы $\omega_{\mathbf{x},\mathbf{x}+\mathbf{z}}$ становятся зависящими лишь от \mathbf{z} , что эквивалентно трансляционной инвариантности. Поэтому диагонализация этих матриц осуществляется при помощи преобразования Фурье, т. е. перехода в квазиимпульсное представление. При этом используется следующий полный ортонормированный набор функций на решетке:

$$\begin{aligned}
 |p\rangle &\equiv \Psi_p(m) = \frac{1}{\sqrt{M}} e^{ipm}, \\
 |q\rangle &\equiv \Psi_q(n) = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{iqn}, \\
 p &= -\frac{\pi(M-2)}{M}, -\frac{\pi(M-4)}{M}, \dots, 0, \\
 &\quad \frac{2\pi}{M}, \dots, \pi, \\
 q &= -\frac{\pi(N-2)}{N}, -\frac{\pi(N-4)}{N}, \dots, 0, \\
 &\quad \frac{2\pi}{N}, \dots, \pi, \\
 |\mathbf{k}\rangle &\equiv \Psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) = \Psi_p(m)\Psi_q(n), \quad \mathbf{k} = (p, q), \\
 &\quad \sum_{\mathbf{x}} \bar{\Psi}_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})\Psi_{\mathbf{k}'}(\mathbf{x}) = \\
 &= \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \Leftrightarrow \sum_{\mathbf{k}} \Psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})\bar{\Psi}_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}') = \delta_{\mathbf{x}\mathbf{x}'}.
 \end{aligned} \tag{1.17}$$

2. ВЫЧИСЛЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ

Сначала решим частную задачу. Очевидно, что спиновый оператор поворота (1.7) трансформирует лишь γ -матрицы с индексами $\mathbf{x} + m'\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{x} + m'\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$, где $m' = 0, \pm 1, \dots$. Соответствующая спиновому оператору (1.7) ортогональная матрица определяется так же, как и в формуле (1.14):

$$\mathcal{U}^{(n)\dagger} \gamma_{\mathbf{y}} \mathcal{U}^{(n)} = \mathcal{O}_{\mathbf{y}, \mathbf{z}}^{(n)} \gamma_{\mathbf{z}}. \tag{2.1}$$

Согласно определениям (1.8), (1.14) и (2.1) имеем

$$\mathcal{O} = \dots \mathcal{O}^{(n-1)} \mathcal{O}^{(n)} \mathcal{O}^{(n+1)} \dots \tag{2.2}$$

Найдем явное выражение для матрицы $\mathcal{O}_{\mathbf{y}, \mathbf{z}}^{(n)}$ при помощи уравнения (2.1). Это вычисление основано на следующих простых соотношениях, которые получаются при учете (1.4) и (1.9):

$$\begin{aligned}
 (\lambda + \mu \gamma_{\mathbf{x}} \gamma_{\mathbf{x}+\mathbf{e}})^\dagger \gamma_{\mathbf{x}} (\lambda + \mu \gamma_{\mathbf{x}} \gamma_{\mathbf{x}+\mathbf{e}}) &= \\
 &= (\cos \psi) \gamma_{\mathbf{x}} + (\sin \psi) \gamma_{\mathbf{x}+\mathbf{e}}, \tag{2.3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\lambda + \mu \gamma_{\mathbf{x}} \gamma_{\mathbf{x}+\mathbf{e}})^\dagger \gamma_{\mathbf{x}+\mathbf{e}} (\lambda + \mu \gamma_{\mathbf{x}} \gamma_{\mathbf{x}+\mathbf{e}}) &= \\
 &= (\cos \psi) \gamma_{\mathbf{x}+\mathbf{e}} - (\sin \psi) \gamma_{\mathbf{x}}, \tag{2.4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\lambda + \mu \gamma_{\mathbf{x}} \gamma_{\mathbf{x}+\mathbf{e}})^\dagger \gamma_{\mathbf{z}} (\lambda + \mu \gamma_{\mathbf{x}} \gamma_{\mathbf{x}+\mathbf{e}}) &= \gamma_{\mathbf{z}}, \\
 \mathbf{z} \neq \mathbf{x}, \mathbf{x} + \mathbf{e}. \tag{2.5}
 \end{aligned}$$

Здесь в качестве \mathbf{e} может быть либо вектор \mathbf{e}_1 , либо \mathbf{e}_2 .

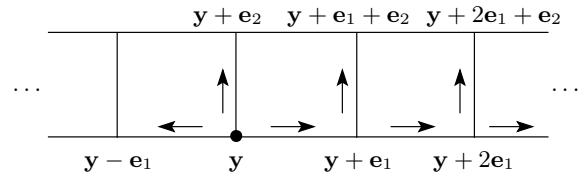


Рис. 2. Жирная точка означает положение начальной γ -матрицы, а стрелки указывают на смещения образов γ -матрицы под действием последовательности линейных преобразований вида (2.3)–(2.5)

Рассмотрим первый случай, когда $\mathbf{y} = (m, n)$. Тогда в левой части уравнения (2.1) все спиновые матрицы поворота из $\mathcal{U}^{(n)\dagger}$ и $\mathcal{U}^{(n)}$, расположенные соответственно правее и левее матриц $(\lambda + \mu \gamma_{\mathbf{y}-\mathbf{e}_1} \gamma_{\mathbf{y}})^\dagger$ и $\lambda + \mu \gamma_{\mathbf{y}-\mathbf{e}_1} \gamma_{\mathbf{y}}$, взаимно сокращаются, так как они не «зацепляются» за матрицу $\gamma_{\mathbf{y}}$. «Обкладки» же

$$(\lambda + \mu \gamma_{\mathbf{y}-\mathbf{e}_1} \gamma_{\mathbf{y}})^\dagger \dots (\lambda + \mu \gamma_{\mathbf{y}-\mathbf{e}_1} \gamma_{\mathbf{y}})$$

трансформируют $\gamma_{\mathbf{y}}$ в соответствии с уравнением (2.4), в котором следует сделать отождествления $\mathbf{e} = \mathbf{e}_1$, $\mathbf{x} + \mathbf{e} = \mathbf{y}$. При этом появляется матричный элемент

$$\mathcal{O}_{\mathbf{y}, \mathbf{y}-\mathbf{e}_1}^{(n)} = -\sin \psi, \quad \mathbf{y} = (m, n). \tag{2.6}$$

Далее в игру вступает уравнение (2.3), в котором последовательно делаются отождествления: $\mathbf{x} = \mathbf{y} + m'\mathbf{e}_1$, $m' = 0, 1, \dots$, и при каждом m' — сначала $\mathbf{e} = \mathbf{e}_2$, затем $\mathbf{e} = \mathbf{e}_1$. Этот процесс символически изображен на рис. 2, на котором жирная точка обозначает положение исходной γ -матрицы, помещенной в «обкладки» в левой части уравнения (2.1), а стрелки показывают, куда попадает ее образ под действием описанных линейных операций. Каждый раз дело сводится к добавлению множителя $\sin \psi$, если матрица переносится вверх или направо, и множителя $\cos \psi$, если матрица остается на прежнем месте. При этом матрица, перенесенная вверх, остается далее неизменной. Таким образом получается следующий результат:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{O}_{\mathbf{y}, \mathbf{y}+m'\mathbf{e}_1}^{(n)} &= [\sin \psi \cos \psi]^{m'} \cos^3 \psi, \\
 \mathcal{O}_{\mathbf{y}, \mathbf{y}+m'\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2}^{(n)} &= [\sin \psi \cos \psi]^{m'}, \\
 m' &= 0, 1, \dots, \quad \mathbf{y} = (m, n). \tag{2.7}
 \end{aligned}$$

Аналогично вычисляются матричные элементы вида $\mathcal{O}_{\mathbf{y}+\mathbf{e}_2, \mathbf{z}}^{(n)}$. Процесс этого вычисления изображен на рис. 3, на котором опять жирная точка — положение γ -матрицы в начале процесса, а стрелки по-

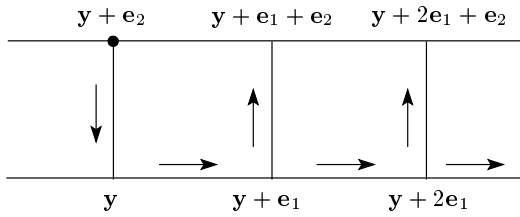


Рис. 3

казывают дальнейшее перемещение образов исходной матрицы. На первом шаге используется соотношение (2.4), в котором делаются отождествления $\mathbf{e} = \mathbf{e}_2$, $\mathbf{x} = \mathbf{y}$, а на всех последующих шагах — соотношение (2.3). В результате простых вычислений находим

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{\mathbf{y}+\mathbf{e}_2, \mathbf{y}+\mathbf{e}_2}^{(n)} &= \cos \psi, \\ \mathcal{O}_{\mathbf{y}+\mathbf{e}_2, \mathbf{y}+(m'+1)\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2}^{(n)} &= -\sin^3 \psi [\sin \psi \cos \psi]^{m'}, \\ \mathcal{O}_{\mathbf{y}+\mathbf{e}_2, \mathbf{y}+m'\mathbf{e}_1}^{(n)} &= -[\sin \psi \cos \psi]^{m'+1}, \\ m' &= 0, 1, \dots, \quad \mathbf{y} = (m, n). \end{aligned} \quad (2.8)$$

На этом этапе следует провести частичную диагонализацию ортогональной матрицы, пользуясь ее трансляционной инвариантностью. Для этого проведем над γ -матрицами частичное преобразование Фурье вдоль строк, пользуясь формулами (1.17):

$$\begin{aligned} \gamma_n(p) &= \sum_m \bar{\Psi}_p(m) \gamma_{m, n} = \gamma_n^\dagger(-p), \\ \left[\gamma_n(p), \gamma_{n'}^\dagger(p') \right]_+ &= 2\delta_{n, n'} \delta_{p, p'}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Теперь, переходя в (2.1) к преобразованию Фурье вдоль строки и пользуясь трансляционной инвариантностью, переписываем это равенство в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{U}^{(n)\dagger} \gamma_{n'}(p) \mathcal{U}^{(n)} &= \\ &= \left[\sum_{m'} \mathcal{O}_{m, n'; m+m', n'}^{(n)} e^{ipm'} \right] \gamma_{n'}(p). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Матрица в квадратных скобках в правой части равенства (2.10) обозначается как $\mathcal{O}_{p; n', n''}^{(n)}$ и вычисляется при помощи формул (2.6)–(2.8):

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{p; n', n''}^{(n)} &= \\ &= \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ \cdot & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ \cdot & 0 & 0 & a_p & b_p & 0 & \cdot \\ \cdot & 0 & 0 & -b_p & c_p & 0 & \cdot \\ \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \quad (2.11) \end{aligned}$$

$n'=n$
 $n'=n+1$

Здесь

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} a_p \\ c_p \end{Bmatrix} &= \frac{\cos \psi - e^{\mp ip} \sin \psi}{1 - e^{ip} \sin \psi \cos \psi}, \\ b_p &= \frac{\sin \psi \cos \psi}{1 - e^{ip} \sin \psi \cos \psi} \end{aligned} \quad (2.12)$$

и диагональные элементы a_p и c_p находятся соответственно на n -м и $(n+1)$ -м местах. Непосредственная проверка показывает, что матрица (2.11) унитарна.

Таким образом, согласно (2.2)

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{p; n', n''} &\equiv \left[\sum_{m'} \mathcal{O}_{m, n'; m+m', n''} e^{ipm'} \right] = \\ &= \left\{ \dots \mathcal{O}_p^{(n-1)} \mathcal{O}_p^{(n)} \mathcal{O}_p^{(n+1)} \dots \right\}_{n', n''}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Произведение (2.13) матриц вида (2.11) легко вычисляется:

$$\mathcal{O}_{p; n, n+n'} = \begin{cases} 0 & \text{при } n' < -1, \\ -b_p & \text{при } n' = -1, \\ c_p b_p^{n'} a_p & \text{при } n' \geq 0. \end{cases} \quad (2.14)$$

Для нахождения собственных значений ортогональной матрицы (1.14) следует вычислить компоненты Фурье матрицы (2.14):

$$\begin{aligned} \rho_{p, q} = \mathcal{O}_{p, q} &= \sum_{n'} \mathcal{O}_{p; n, n+n'} e^{iqn'} = \\ &= \frac{a_p c_p + b_p^2 - e^{-iq} b_p}{1 - e^{iq} b_p} = \frac{\eta_{p, q}}{\bar{\eta}_{p, q}}, \\ \eta_{p, q} &= 1 - (e^{-ip} + e^{-iq}) \sin \psi \cos \psi. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Равенство (2.15) было получено при помощи (2.12).

3. СТАТИСТИЧЕСКАЯ СУММА

Из формул (1.16), (1.17) и (2.15) следует, что свободная энергия пропорциональна интегралу

$$\begin{aligned} \ln \left\{ \prod_{p,q} (\sqrt{\rho_{p,q}} + \sqrt{\bar{\rho}_{p,q}}) \right\} &= \\ &= \frac{MN}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} dp \int_{-\pi}^{\pi} dq \ln (\sqrt{\rho_{p,q}} + \sqrt{\bar{\rho}_{p,q}}) = \\ &= \frac{MN}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} dp \int_{-\pi}^{\pi} dq \ln \frac{\eta_{p,q} + \bar{\eta}_{p,q}}{\sqrt{\eta_{p,q}\bar{\eta}_{p,q}}} = \\ &= \frac{MN}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} dp \int_{-\pi}^{\pi} dq \ln (\eta_{p,q} + \bar{\eta}_{p,q}). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Последнее равенство в формуле (3.1) справедливо, в силу того что

$$\int_{-\pi}^{\pi} dp \int_{-\pi}^{\pi} dq \ln \eta_{p,q} = \int_{-\pi}^{\pi} dp \int_{-\pi}^{\pi} dq \ln \bar{\eta}_{p,q} = 0. \quad (3.2)$$

Проверим равенства (3.2). Согласно (2.15)

$$\begin{aligned} \eta_{p,q} &= (1 - \alpha e^{-ip})(1 - \beta_p e^{-iq}), \\ \alpha &= \frac{1}{2} \sin 2\psi, \quad \beta_p = \frac{\sin 2\psi}{2 - e^{-ip} \sin 2\psi}, \\ |\alpha| &\leq \frac{1}{2}, \quad |\beta_p| \leq 1, \end{aligned} \quad (3.3)$$

причем $\beta_p e^{-iq} = 1$ лишь в случае, когда $\sin 2\psi = 1$, $p = q = 0$. Поэтому

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} dp \int_{-\pi}^{\pi} dq \ln \eta_{p,q} &= \int_{-\pi}^{\pi} dq \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} dp \ln (1 - \alpha e^{-ip}) \right\} + \\ &+ \int_{-\pi}^{\pi} dp \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} dq \ln (1 - \beta_p e^{-iq}) \right\} = \\ &= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left\{ \alpha^n \int_{-\pi}^{\pi} dq \int_{-\pi}^{\pi} dp e^{-inp} + \right. \\ &\quad \left. + \int_{-\pi}^{\pi} dp \beta_p^n \int_{-\pi}^{\pi} dq e^{-inq} \right\} = 0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Аналогично доказывается второе равенство в (3.2).

Наконец, при помощи формул (1.6), (1.9), (1.16), (2.15) и (3.1) мы можем выписать свободную энергию:

$$\begin{aligned} F = -T \ln Z = -MNT \left\{ \ln 2 + \frac{1}{8\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} dp \times \right. \\ \left. \times \int_{-\pi}^{\pi} dq \ln [\operatorname{ch}^2 2\theta - \operatorname{sh} 2\theta (\cos p + \cos q)] \right\} = \\ = -MNT \left\{ \ln 2 - \ln(1 - x^2) + \frac{1}{8\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} dp \times \right. \\ \left. \times \int_{-\pi}^{\pi} dq \ln [(1 + x^2)^2 - 2x(1 - x^2)(\cos p + \cos q)] \right\}, \\ x = \operatorname{th} \theta. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Правая часть (3.5) совпадает с выражением для свободной энергии двумерной модели Изинга из работы [3].

Температура фазового перехода получается непосредственно из соотношений (3.1) и (2.15). Действительно, в точке фазового перехода свободная энергия статистической суммы имеет особенность. Из (3.1) видно, что это происходит тогда, когда $(\eta_{p,q} + \bar{\eta}_{p,q}) \rightarrow 0$ для некоторой части квазиимпульсов, что имеет место лишь в случае (см. (2.15)), когда

$$\sin \psi_c = \cos \psi_c = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad p \rightarrow 0, \quad q \rightarrow 0. \quad (3.6)$$

При помощи условий (3.6) и (1.9) находим, что критическая температура θ_c определяется из равенства (см. [1-3])

$$\operatorname{th} \theta_c = \frac{1 - \cos \psi_c}{\sin \psi_c} = \sqrt{2} - 1. \quad (3.7)$$

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, статистическая сумма двумерной модели Изинга на регулярной решетке равна (с точностью до множителя, который является гладкой функцией температуры) следу некоего элемента группы $\operatorname{Spin}(MN)$ в матричном представлении. Множество этих элементов находится на некоторой гладкой кривой в группе $\operatorname{Spin}(MN)$, причем температура является параметром на кривой. Эта кривая не является однопараметрической подгруппой в группе $\operatorname{Spin}(MN)$. Однако при $M \rightarrow \infty, N \rightarrow \infty$ эта кривая становится кусочно гладкой.

Возникает интересный вопрос: содержит ли группа $\operatorname{Spin}(N)$ другие кривые, описывающие статистические суммы дискретных систем, отличных от двумерной модели Изинга, включая трехмерные? Ответ на этот вопрос автору представляется позитивным.

Работа выполнена при финансовой поддержке программы НШ-3472.2008.2.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Докажем формулу (1.16).

Пусть $\{v_{\mathbf{x}}^{(k)}, \overline{v_{\mathbf{x}}^{(k)}}\}$, $k = 1, \dots, MN/2$ — полный ортонормированный набор собственных векторов матрицы $\mathcal{O}_{\mathbf{x},\mathbf{y}}$, причем собственному значению ρ_k ($\overline{\rho}_k$) соответствует вектор $v_{\mathbf{x}}^{(k)}$ ($\overline{v_{\mathbf{x}}^{(k)}}$). Далее используется обозначение

$$\{v_{\mathbf{x}}^{(k)}, \overline{v_{\mathbf{x}}^{(k)}}\} \equiv \{v_{\mathbf{x}}^a\}, \quad a = 1, \dots, MN.$$

Будем считать введенные векторы векторами-столбцами и верхние индексы « T » и « \dagger » обозначают транспонирование и эрмитово сопряжение векторов и матриц. По определению

$$\begin{aligned} v^{(k)T} v^{(k')} &\equiv \sum_{\mathbf{x}} v_{\mathbf{x}}^{(k)} v_{\mathbf{x}}^{(k')}, \\ v^{(k)\dagger} v^{(k')} &\equiv \sum_{\mathbf{x}} \overline{v_{\mathbf{x}}^{(k)}} v_{\mathbf{x}}^{(k')}. \end{aligned} \quad (\text{П.1})$$

Данные определения означают справедливость следующих формул:

$$v^{(k)T} v^{(k')} = 0, \quad v^{(k)\dagger} v^{(k')} = \delta_{kk'}, \quad (\text{П.2})$$

$$U_{\mathbf{x}a} \equiv v_{\mathbf{x}}^a, \quad U \equiv \left(v^{(1)}, \overline{v^{(1)}}, v^{(2)}, \overline{v^{(2)}}, \dots \right), \quad (\text{П.3})$$

$$(U^\dagger U)_{ab} = \delta_{ab},$$

$$(U^\dagger \mathcal{O} U)_{ab} = \text{diag}(\rho_1, \overline{\rho}_1, \rho_2, \overline{\rho}_2, \dots) \equiv D_{ab}. \quad (\text{П.4})$$

В работе [13] показано, что

$$\begin{aligned} (U^\dagger \omega U)_{ab} &= \\ &= \text{diag}(\ln \rho_1, -\ln \rho_1, \ln \rho_2, -\ln \rho_2, \dots) \equiv \Delta_{ab}. \end{aligned} \quad (\text{П.5})$$

При помощи формул (П.3) и (П.5) получаем

$$\frac{1}{4} \gamma_{\mathbf{x}} \omega_{\mathbf{x},\mathbf{y}} \gamma_{\mathbf{y}} = \frac{1}{4} \gamma_{\mathbf{x}} U_{\mathbf{x}a} \Delta_{ab} \left(U_{b\mathbf{y}}^\dagger \gamma_{\mathbf{y}} \right). \quad (\text{П.6})$$

$2^{MN/2} \times 2^{MN/2}$ -матрицы

$$c_k^\dagger \equiv \gamma_{\mathbf{x}} v_{\mathbf{x}}^{(k)}, \quad c_k \equiv \overline{\gamma_{\mathbf{x}} v_{\mathbf{x}}^{(k)}} \quad (\text{П.7})$$

обладают всеми свойствами фермионных операторов рождения и уничтожения. Действительно, вследствие (1.4) и (П.2)

$$[c_k, c_{k'}^\dagger]_+ = \delta_{kk'}, \quad [c_k, c_{k'}]_+ = [c_k^\dagger, c_{k'}^\dagger]_+ = 0. \quad (\text{П.8})$$

Согласно определениям (П.3) и (П.7) имеем

$$\gamma_{\mathbf{x}} U_{\mathbf{x}a} = \left(c_1^\dagger, c_1, \dots, c_{MN/2}^\dagger, c_{MN/2} \right). \quad (\text{П.9})$$

При помощи (П.5), (П.8) и (П.9) величина (П.6) переписывается в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \gamma_{\mathbf{x}} \omega_{\mathbf{x},\mathbf{y}} \gamma_{\mathbf{y}} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{MN/2} \left[\ln \rho_k \left(c_k^\dagger c_k - c_k c_k^\dagger \right) \right] = \\ &= \sum_{k=1}^{MN/2} \left[\ln \rho_k c_k^\dagger c_k - \frac{1}{2} \ln \rho_k \right]. \end{aligned} \quad (\text{П.10})$$

Поскольку вычисление следа в терминах γ -матриц эквивалентно вычислению следа в терминах соответствующих фермиевских операторов (П.7), равенство (1.16) немедленно вытекает из представления (П.10).

ЛИТЕРАТУРА

1. L. Onsager, Phys. Rev. **65**, 117 (1944).
2. B. Kaufmann, Phys. Rev. **76**, 1232 (1949).
3. R. J. Baxter, Ann. Phys. (N. Y.) **70**, 193 (1972).
4. T. D. Schultz, D. C. Mattis, and E. H. Lieb, Rev. Mod. Phys. **36**, 856 (1964).
5. M. J. Stephen and L. Mittag, J. Math. Phys. **13**, 1944 (1972).
6. C. J. Thompson, J. Math. Phys. **6**, 1392 (1965).
7. M. Кас and J. C. Ward, Phys. Rev. **88**, 1332 (1952).
8. C. A. Hurst and H. S. Green, J. Chem. Phys. **33**, 1059 (1960).
9. P. W. Kasteleyn, J. Math. Phys. **4**, 287 (1963).
10. Н. В. Вдовиченко, ЖЭТФ **7**, 715 (1964); Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Статистическая физика*, ч. 1, Наука, Москва (1976), § 151.
11. R. J. Baxter and I. J. Enting, J. Phys. A: Math. Gen. **11**, 2463 (1978).
12. R. J. Baxter, *Exactly Solved Models in Statistical Mechanics*, Acad. Press (1982).
13. P. A. M. Dirac, *Spinors in Hilbert Space*, Plenum Press, New York, London (1974).