

БРОУНОВСКОЕ ДВИЖЕНИЕ В ГРАНУЛЯРНЫХ ГАЗАХ ВЯЗКОУПРУГИХ ЧАСТИЦ

А. С. Бодрова*, Н. В. Бриллиантов, А. Ю. Лоскутов

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
119899, Москва, Россия

Поступила в редакцию 1 августа 2009 г.

Построена теория броуновского движения в гранулярных газах — системах, состоящих из большого числа макроскопических частиц, испытывающих неупругие соударения. При этом потери энергии при диссипативных соударениях определяются коэффициентом восстановления ε . В отличие от предыдущих исследований, использовавших упрощенную модель $\varepsilon = \text{const}$, в данной работе учитывается зависимость коэффициента восстановления от относительной скорости частиц при ударе. Рассматривается случай свободного гранулярного газа в отсутствие внешних сил и газа, подверженного возмущению, играющего роль термостата. Для таких систем рассчитаны температура и коэффициент диффузии броуновских частиц, проведен анализ их зависимости от массы гранул, их размера и коэффициента восстановления. Обнаружены нарушение принципа равнораспределения энергии по степеням свободы и нарушение флуктуационно-диссипационных соотношений. Показано, что следствием этого является новый эффект «относительного нагрева» броуновских частиц за счет остывания окружающего газа.

PACS: 81.05.Rm, 05.20.Dd

1. ВВЕДЕНИЕ

Броуновское движение, обнаруженное почти два столетия назад [1], является одним из базовых процессов в природе и наблюдается в различных системах в широком диапазоне пространственно-временных масштабов. При броуновском движении происходит стохастическое перемещение крупной (броуновской) частицы под действием случайных толчков со стороны окружающих значительно более мелких частиц. Количественная теория этого явления была разработана в работах Эйнштейна [2], который впервые выразил среднеквадратичное смещение частицы, линейно растущее с течением времени, через макроскопический коэффициент переноса — коэффициент диффузии. В последующих исследованиях Ланжевена [3] и Смолуховского [4] физические идеи Эйнштейна получили дальнейшее развитие. В частности, попытки построения формальной математической теории броуновского движения послужили толчком для создания теории случайных процессов [3].

Разработка методов неравновесной термодинамики и статистической механики позволила по-новому подойти к описанию этого явления и сформулировать теорию броуновского движения *ab initio*, т. е. основываясь на микроскопических уравнениях динамики частиц [5]. Необходимо, однако, отметить, что такого рода теории используют целый ряд формальных преобразований, так что для их непосредственного применения требуются дополнительные (часто плохо контролируемые) приближения [6].

Особый интерес представляет броуновское движение в неравновесных и диссипативных средах, например, в гранулярных средах, где наблюдается целый ряд интересных явлений, например, отклонение распределения частиц по скоростям от максвелловского [7], нарушение принципа равномерного распределения энергии по степеням свободы, которое проявляется в том, что температура броуновских частиц отличается от температуры окружающей среды [8, 9] и др. Более того, в таких системах при определенных условиях может качественно меняться сам характер движения: обычное броуновское движение крупной частицы может перейти в движение, близкое к баллистическому [10].

*E-mail: bodrova@polly.phys.msu.ru

Гранулярные среды как системы, состоящие из макроскопически большого числа частиц, которые, в свою очередь, сами являются макроскопическими объектами, размерами приблизительно от 10^{-4} до 1 м, широко распространены в природе [7, 11]. К ним относятся пыль, песок, гравий, различные пудры и порошки [11]. Разреженные гранулярные среды, в которых собственный объем частиц значительно меньше полного объема системы, называются гранулярными (диссипативными) газами [7, 12–14]. Подобные системы, как правило, являются астрофизическими объектами. Наиболее известные из них — это планетные кольца (например, кольца Сатурна), протопланетные диски и межзвездные пылевые облака [15]. Из-за силы тяжести гранулярные газы не могут существовать в земных условиях без источника внешнего возбуждения. Роль такого источника в лабораториях могут выполнять, скажем, вибрирующие стенки сосуда, которые поддерживают систему в газообразном состоянии [16–20]. В естественных условиях гранулярные газы образуются при быстром движении вещества с большим градиентом скоростей, например, при сходе лавин, при быстрой транспортировке сыпучих материалов, а также при увлечении частиц пыли и песка воздушными массами, например в ядре смерча или торнадо.

В подобных системах при соударении гранул происходит потеря их механической энергии и ее трансформация во внутреннюю энергию макроскопических частиц. Количественно потерю энергии при соударении характеризуют так называемым коэффициентом восстановления

$$\varepsilon = \left| \frac{\mathbf{v}'_{12} \cdot \mathbf{e}}{\mathbf{v}_{12} \cdot \mathbf{e}} \right|,$$

где $\mathbf{v}_{12} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$ и $\mathbf{v}'_{12} = \mathbf{v}'_1 - \mathbf{v}'_2$ — относительные скорости частиц соответственно до и после соударения, а \mathbf{e} — единичный вектор, соединяющий центры частиц в момент удара. Для простоты в настоящей работе предполагается, что гранулы имеют сферическую форму и гладкую поверхность, так что можно пренебречь их вращательными степенями свободы. Условие $\varepsilon = 1$ соответствует абсолютно упругому соударению, в то время как $\varepsilon = 0$ — абсолютно неупругому.

В простейшей модели гранулярных сред коэффициент восстановления предполагается постоянным, $\varepsilon = \text{const}$. Несмотря на то что такое приближение значительно упрощает исследование и часто позволяет получить аналитические результаты, анализ ситуации, когда $\varepsilon \neq \text{const}$ представляется более реалистичным. Действительно, как эксперимен-

тальные данные [21–23], так и теоретический анализ [24, 25] процесса соударения показывают, что коэффициент восстановления должен существенно зависеть от относительной скорости частиц при ударе. Данную зависимость можно получить непосредственно, интегрируя уравнения соударяющихся частиц, если известны действующие между ними силы. При небольших деформациях и относительных скоростях материал частиц ведет себя как вязкоупругая среда [7, 26, 27] с известными вязкими и упругими силами [27]. Поэтому, решая соответствующие уравнения движения, можно получить искомую зависимость.

В настоящей работе развивается теория броуновского движения крупных и тяжелых частиц в окружении газа значительно более мелких гранул. Столкновения между частицами происходят в соответствии с законом вязкоупругого удара [7, 27]. Данная модель позволяет более реалистично описать происходящие в природе процессы и демонстрирует ряд новых и интересных эффектов, таких, как немонотонная эволюция отношения температуры броуновских частиц и температуры газа и «относительный нагрев» броуновских частиц за счет охлаждения окружающего газа.

Для введения основных понятий, используемых в данной работе, в разд. 2 рассматривается однокомпонентный гранулярный газ. В разд. 2.1 изложены необходимые сведения об эволюции свободно остывающего гранулярного газа в режиме однородного охлаждения. В разд. 2.2 рассмотрен газ вязкоупругих частиц в термостате — система, которая не была исследована ранее. Раздел 3 посвящен непосредственно броуновской динамике: в разд. 3.1 описан вывод уравнения Фоккера–Планка для функции распределения броуновских частиц по скоростям, а в разд. 3.2 — вывод зависимости температуры газа броуновских частиц от времени, массы, размеров частиц и диссипации. В разд. 3.3 рассмотрено броуновское движение в гранулярном газе, находящемся в термостате. В разд. 4 приводятся основные выводы работы.

2. ОДНОРОДНЫЙ ГРАНУЛЯРНЫЙ ГАЗ

В данном разделе вводятся основные понятия, необходимые для дальнейшего изложения.

2.1. Режим однородного охлаждения

Если на гранулярный газ не действуют внешние силы, то неупругие столкновения частиц приводят к

непрерывному уменьшению их механической (кинетической) энергии. Так же, как и для обычных газов, можно ввести понятие кинетической температуры (или просто температуры) $T(t)$, которая определяется через второй момент функции распределения частиц газа по скоростям $f(\mathbf{v}, t)$:

$$\frac{3}{2} nT(t) = \int d\mathbf{v} \frac{m\mathbf{v}^2}{2} f(\mathbf{v}, t), \quad (1)$$

где m — масса частиц, а n — концентрация газа, т. е. число частиц в единице объема. В состоянии однородного охлаждения, которое является базовым состоянием гранулярного газа, подобно состоянию равновесия для обычных газов [7], плотность газа не меняется, т. е. $n = \text{const}$, а температура постоянно снижается. Эволюция функции распределения по скоростям $f(\mathbf{v}, t)$ подчиняется в случае разреженных или не слишком плотных газов, рассматриваемых в настоящей работе, уравнению Энскога–Больцмана [7, 28]:

$$\frac{\partial f(\mathbf{v}, t)}{\partial t} = g_2(\sigma) I(f, f), \quad (2)$$

где σ — диаметр частиц, $g_2(\sigma)$ — контактное значение парной корреляционной функции, т. е. фактор, учитывающий увеличение частоты соударений за счет эффекта исключенного объема [7].

Интеграл столкновений Больцмана $I(f, f)$ удобно выразить через безразмерный интеграл столкновений:

$$I(f, f) = \sigma^2 n^2 v_T^{-2} \tilde{I}(\tilde{f}, \tilde{f}),$$

где $v_T = \sqrt{2T(t)/m}$ — термическая скорость, а $\tilde{I}(\tilde{f}, \tilde{f})$ является функционалом безразмерной функции распределения

$$\tilde{f}(\mathbf{c}, t) = \frac{v_T^3}{n} f(\mathbf{v}, t)$$

по приведенным скоростям $\mathbf{c} = \mathbf{v}/v_T$ [7, 29]:

$$\begin{aligned} \tilde{I}(\tilde{f}, \tilde{f}) = & \int d\mathbf{c}_2 \int d\mathbf{e} \Theta(-\mathbf{c}_{12} \cdot \mathbf{e}) |\mathbf{c}_{12} \cdot \mathbf{e}| \times \\ & \times \left(\chi \tilde{f}(\mathbf{c}'_1, t) \tilde{f}(\mathbf{c}'_2, t) - \tilde{f}(\mathbf{c}_1, t) \tilde{f}(\mathbf{c}_2, t) \right). \quad (3) \end{aligned}$$

Здесь $\mathbf{c}_{12} = \mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_2$ — относительная скорость, отвечающая длине «цилиндра соударения», объем которого, равный $\sigma^2 |\mathbf{c}_{12}|$, определяет число соударений в единицу времени [7]; $\Theta(x)$ — функция Хевисайда, учитывающая, что частицы должны сближаться перед соударением, наконец, \mathbf{c}'_1 и \mathbf{c}'_2 — приведенные скорости частиц для так называемого «обратного

соударения», результатом которого являются скорости \mathbf{c}_1 и \mathbf{c}_2 [7, 29]:

$$\mathbf{c}'_1 = \mathbf{c}_1 - \frac{(1 + \varepsilon)}{2\varepsilon} (\mathbf{c}_{12} \cdot \mathbf{e}) \mathbf{e},$$

$$\mathbf{c}'_2 = \mathbf{c}_2 + \frac{(1 + \varepsilon)}{2\varepsilon} (\mathbf{c}_{12} \cdot \mathbf{e}) \mathbf{e}.$$

Здесь, как и прежде, \mathbf{e} — единичный вектор, соединяющий центры частиц в момент соударения. Множитель χ в уравнении (3) учитывает отношение длин цилиндра соударений при прямом и обратном соударениях и якобиан преобразования между скоростями этих соударений [7, 29].

Коэффициент восстановления, который входит в приведенные выше выражения, для вязкоупругих частиц зависит от скорости их относительного движения при ударе. Расчеты дают следующее выражение для этой зависимости [7, 29]:

$$\begin{aligned} \varepsilon = & 1 - C_1 \delta (2u(t))^{1/10} |(\mathbf{c}_{12} \cdot \mathbf{e})|^{1/5} + \\ & + C_2 \delta^2 (2u(t))^{1/5} |(\mathbf{c}_{12} \cdot \mathbf{e})|^{2/5} \pm \dots \quad (4) \end{aligned}$$

Здесь $C_1 \approx 1.15$, $C_2 \approx 0.798$ — численные коэффициенты, $u(t) = T(t)/T(0)$ — безразмерная температура, δ — малый параметр, характеризующий величину диссипации и зависящий от массы, размеров, коэффициентов вязкости и упругости соударяющихся частиц [7, 29].

Важным свойством гранулярных газов является отклонение функции распределения по скоростям от распределения Максвелла. Это отклонение можно описать количественно с помощью разложения $\tilde{f}(\mathbf{c}, t)$ в ряд по ортогональным полиномам Сонина $S_p(x)$ [30–32]:

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\mathbf{c}, t) = & \frac{1}{\pi\sqrt{\pi}} \exp(-c^2) \times \\ & \times \left(1 + \sum_{p=1}^{\infty} a_p(t) S_p(c^2) (c^2) \right). \quad (5) \end{aligned}$$

Полиномы Сонина $S_p(x)$ представляют собой частный случай присоединенных полиномов Лагерра $L_p^m(x)$ при $m = d/2 - 1$, где d — размерность пространства (в данной работе мы рассматриваем трехмерное пространство $d = 3$):

$$S_p(x) = L_p^m(x) = \sum_{n=0}^p \frac{(-1)^n (m+p)!}{(m+n)! (p-n)! n!} x^n. \quad (6)$$

Они широко используются в литературе по кинетической теории газов [7, 33]. Удобство их применения

связано с тем, что они ортогональны с весом, отвечающим распределению Максвелла:

$$\frac{1}{\pi\sqrt{\pi}} \int dc \exp(-c^2) S_p(c^2) S_p'(c^2) = \frac{2\left(p + \frac{1}{2}\right)!}{\sqrt{\pi} p!} \delta_{pp'}. \quad (7)$$

Таким образом, функция распределения гранулярных частиц по безразмерным скоростям $\tilde{f}(\mathbf{c}, t)$ полностью определяется коэффициентами $a_i(t)$. Первый член $a_1(t)$ в разложении (5) равен нулю [7]. Для исследования макроскопических свойств гранулярного газа, таких как гранулярная температура, достаточно ограничиться учетом второго члена a_2 [34, 35].

После подстановки функции распределения (5) в уравнение Больцмана (2), оно сводится к следующей системе [7, 29]:

$$\begin{aligned} \frac{du}{d\tau} &= -\frac{\sqrt{2}\mu_2}{6\sqrt{\pi}} u^{3/2}, \\ \frac{da_2}{d\tau} &= \frac{\sqrt{2}u}{3\sqrt{\pi}} \mu_2 (1 + a_2) - \frac{\sqrt{2}}{15\sqrt{\pi}} \mu_4 \sqrt{u}. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь

$$\mu_p = - \int d\mathbf{c} c^p \tilde{I}(\tilde{f}, \tilde{f})$$

— моменты интеграла соударений. Их можно получить аналитически [7, 29], в том числе, с помощью символьных вычислений [7]. Здесь мы приводим их выражение в первом приближении по малому диссипативному параметру δ :

$$\begin{aligned} \mu_2 &= \left(1 + \frac{6}{25}a_2\right) (2u)^{1/10} \omega_0 \delta + \dots, \\ \mu_4 &= 4\sqrt{2\pi}a_2 + \frac{28}{5} \left(1 + \frac{129}{100}a_2\right) (2u)^{1/10} \omega_0 \delta + \dots, \\ \omega_0 &= 2\sqrt{2\pi}2^{1/10} \Gamma(21/10) C_1 \approx 6.485. \end{aligned}$$

Значения коэффициента $a_2(t)$ и безразмерной температуры $u(t)$ можно найти путем численного решения системы (8). Аналитическое решение получается в пределе $t \rightarrow \infty$ с помощью теории возмущений, через разложение $a_2(t)$ и $u(t)$ в ряд по δ [7, 29]:

$$\begin{aligned} u(t) &= \left(\frac{t}{\tau_0}\right)^{-5/3} + T_1 \delta \left(\frac{t}{\tau_0}\right)^{-11/6}, \\ a_2(t) &= -a_{21} \delta \left(\frac{t}{\tau_0}\right)^{-1/6}, \end{aligned}$$

где

$$T_1 \approx 3.27, \quad a_{21} = \frac{3}{10} 2^{1/5} \Gamma\left(\frac{21}{10}\right) \approx 0.415 \quad (9)$$

— численные константы, $\tau_0^{-1} \approx 0.55\delta\tau_c^{-1}(0)$ — характерное время охлаждения системы,

$$\tau_c^{-1}(0) = 4\sqrt{\pi}g_2\sigma^2 n \sqrt{\frac{T(0)}{m}}$$

— обратное время свободного пробега в начальный момент времени.

2.2. Диссипативный газ в термостате

В экспериментах, как правило, изучается гранулярный газ не в состоянии однородного охлаждения, а под воздействием внешнего возмущения, например, вибрации стенок сосуда, в котором находятся гранулярные частицы [16–20]. Энергия, поступающая в систему за счет столкновения частиц газа со стенками, поддерживает не зависящую от времени температуру системы. В теории гранулярных газов используются и другие, более простые для анализа модели термостата [36]. Мы выберем простейшую из них: будем считать, что на частицы газа действует (помимо сил, возникающих при контакте) случайная сила $\mathbf{F}(t)$, причем

$$\langle F_i(t) F_j(t') \rangle = \delta_{ij} \delta(t - t') m^2 \xi_0^2. \quad (10)$$

Уравнение Больцмана для диссипативного газа в термостате с указанным стохастическим воздействием имеет вид [30]

$$\frac{\partial f(\mathbf{v}, t)}{\partial t} = g_2(\sigma) I(f, f) + \frac{\xi_0^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{v}^2} f(\mathbf{v}, t). \quad (11)$$

Это уравнение может быть записано для безразмерной функции распределения $\tilde{f}(\mathbf{c}, t)$ как

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial t} - \frac{1}{v_T} \frac{dv_T}{dt} \left(3\tilde{f} + c \frac{\partial \tilde{f}}{\partial c}\right) &= \\ &= g_2 \sigma^2 n v_T \tilde{I} + \frac{1}{v_T^2} \frac{\xi_0^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial c^2} \tilde{f}. \end{aligned}$$

Умножение его на c^2 и c^4 и последующее интегрирование по приведенной скорости \mathbf{c} приводит к результатам:

$$\frac{\partial \langle c^2 \rangle}{\partial t} + \frac{1}{T} \frac{dT}{dt} \langle c^2 \rangle = -\sqrt{\frac{2T}{m}} g_2(\sigma) \sigma^2 n \mu_2 + \frac{3m\xi_0^2}{2T},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle c^4 \rangle}{\partial t} + \frac{2}{T} \frac{dT}{dt} \langle c^4 \rangle = \\ = -\sqrt{\frac{2T}{m}} g_2(\sigma) \sigma^2 n \mu_4 + 10 \langle c^2 \rangle \frac{m \xi_0^2}{2T}. \end{aligned}$$

Учитывая, что газ находится в стационарном состоянии и все его временные производные равны нулю, можно получить следующее выражение для равновесной температуры системы:

$$T = \left(\frac{3}{2\sqrt{2}} \frac{\xi_0^2 m \sqrt{m}}{\mu_2 g_2(\sigma) n} \right)^{2/3}.$$

Коэффициент a_2 также сохраняет постоянное значение, определяемое путем численного решения уравнения

$$\mu_4 = 5\mu_2, \tag{12}$$

которое вытекает из последних двух уравнений. В линейном приближении $a_2 = -a_{21}\delta$, где численный коэффициент a_{21} такой же, как и в случае асимптотического решения для остывающего газа (9).

3. БРОУНОВСКОЕ ДВИЖЕНИЕ

Данный раздел посвящен рассмотрению броуновской динамики.

3.1. Вывод уравнения Фоккера – Планка

Рассмотрим движение частиц массы m_b и диаметра σ_b в диссипативном газе частиц массой m и диаметром σ , находящемся в состоянии однородного охлаждения. Пусть масса броуновской частицы существенно превосходит массу частиц газа, $m_b \gg m$, а концентрация броуновских частиц $n_b \ll n$ постоянна и настолько мала, что их взаимодействием друг с другом можно пренебречь. Обозначим отношение масс частицы примеси и частицы газа $\Delta = m/m_b$, (Δ — малый параметр). Пусть \mathbf{v}_b — скорость броуновской частицы, \mathbf{v} — скорость частицы газа, $\mathbf{g} = \mathbf{v}_b - \mathbf{v}$ — их относительная скорость. Коэффициент восстановления $\varepsilon_b(\mathbf{g})$, описывающий соударения броуновской частицы с частицей среды, может быть также получен из общего решения для соударяющихся вязкоупругих частиц [7]. Мы запишем его в виде аналогичном (4):

$$\begin{aligned} \varepsilon_b(\mathbf{g}) = 1 - C_1 \delta_b (2u)^{1/10} |(\mathbf{g}^* \cdot \mathbf{e})|^{1/5} + \\ + C_2 \delta_b^2 (2u)^{1/5} |(\mathbf{g}^* \cdot \mathbf{e})|^{2/5} \pm \dots \end{aligned} \tag{13}$$

Здесь δ_b — параметр диссипации, определяемый свойствами материала, массой и размерами броуновских частиц и частиц газа [7], $\mathbf{g}^* = \mathbf{g}/v_T$ — безразмерная относительная скорость большой и малой гранул.

Эволюция функции распределения броуновских частиц по скоростям $f_b(\mathbf{v}_b)$ также подчиняется уравнению Энского – Больцмана [7]:

$$\frac{\partial f_b(\mathbf{v}_b, t)}{\partial t} = I(f_b, f), \tag{14}$$

где $I(f_b, f)$ — интеграл столкновений Больцмана между тяжелой частицей и частицей газа:

$$\begin{aligned} I(f_b, f) = \sigma_0^2 g_{2b}(\sigma_0) \int d\mathbf{v} \int d\mathbf{e} \Theta(-\mathbf{g} \cdot \mathbf{e}) |\mathbf{g} \cdot \mathbf{e}| \times \\ \times (\chi_b f_b(\mathbf{v}_b'', t) f(\mathbf{v}'', t) - f_b(\mathbf{v}_b, t) f(\mathbf{v}, t)), \end{aligned}$$

$g_{2b}(\sigma_0) \equiv g_2(\sigma_0)$ — контактное значение парной корреляционной функции для броуновской частицы с частицей газа, $\sigma_0 = (\sigma_b + \sigma)/2$, χ_b имеет такой же смысл, как и в уравнении (3), а \mathbf{v}_b'' и \mathbf{v}'' — скорости броуновской частицы и частицы газа до соударения, связанные со скоростями \mathbf{v}_b и \mathbf{v} после соударения соотношениями:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_b'' = \mathbf{v}_b - \frac{\delta \mathbf{v}_b}{\varepsilon_b}, \\ \mathbf{v}'' = \mathbf{v} + \frac{\delta \mathbf{v}_b}{\varepsilon_b \Delta}, \end{aligned}$$

где

$$\delta \mathbf{v}_b = \frac{\Delta}{1 + \Delta} (1 + \varepsilon_b) (\mathbf{g} \cdot \mathbf{e}) \mathbf{e}. \tag{15}$$

Пусть $H(\mathbf{v}_b)$ — произвольная функция скорости броуновской частицы. Следуя обычному при выводе уравнения Фоккера – Планка подходу [7, 8], рассмотрим интеграл

$$I[H] = \int d\mathbf{v}_b H(\mathbf{v}_b) I(f_b, f). \tag{16}$$

После замены переменных получаем

$$\begin{aligned} I[H] = \sigma_0^2 g_2(\sigma_0) \int d\mathbf{v}_b \int d\mathbf{v} \int d\mathbf{e} \Theta(-\mathbf{g} \cdot \mathbf{e}) |\mathbf{g} \cdot \mathbf{e}| \times \\ \times f_b(\mathbf{v}_b, t) f(\mathbf{v}, t) (H(\mathbf{v}_b - \delta \mathbf{v}_b) - H(\mathbf{v}_b)). \end{aligned} \tag{17}$$

Заметим, что изменение скорости броуновской частицы при соударении мало вследствие ее большой массы. Поэтому после разложения $H(\mathbf{v}_b - \delta \mathbf{v}_b)$ по $\delta \mathbf{v}_b$ (15), подстановки его в (17), интегрирования и сравнения полученного выражения с (16), интеграл столкновений Больцмана принимает вид

$$I(f_b, f) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_b} \left(\gamma(t) \mathbf{v}_b + \tilde{\gamma}(t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_b} \right) f_b, \tag{18}$$

где

$$\gamma(t)\mathbf{v}_b = \sigma_0^2 g_2(\sigma_0) \int d\mathbf{v}_b \int d\mathbf{e} \mathbf{e} \Theta(-\mathbf{g} \cdot \mathbf{e}) |\mathbf{g} \cdot \mathbf{e}| \times (\mathbf{g} \cdot \mathbf{e}) f(\mathbf{v}, t) \frac{\Delta}{1 + \Delta} (1 + \varepsilon_b(\mathbf{g})), \quad (19)$$

$$\tilde{\gamma}(t)\delta_{ij} = \frac{1}{2} \sigma_0^2 g_2(\sigma_0) \int d\mathbf{v}_b \int d\mathbf{e} e_i e_j \Theta(-\mathbf{g} \cdot \mathbf{e}) \times |\mathbf{g} \cdot \mathbf{e}| (\mathbf{g} \cdot \mathbf{e})^2 f(\mathbf{v}, t) \left(\frac{\Delta}{1 + \Delta} (1 + \varepsilon_b(\mathbf{g})) \right)^2. \quad (20)$$

Нетрудно видеть, что уравнение Больцмана (14) с интегралом столкновений в виде (18) представляет собой уравнение Фоккера–Планка:

$$\frac{\partial f_b}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_b} \left(\gamma(t)\mathbf{v}_b + \tilde{\gamma}(t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_b} \right) f_b. \quad (21)$$

Теперь, учитывая, что коэффициент восстановления имеет вид (13), раскладывая (19) и (20) по параметру $((T_b/T)\Delta)^{1/2}$, который предполагается малым, и проводя интегрирование, получим окончательное выражение для коэффициентов γ и $\tilde{\gamma}$:

$$\gamma(t) = \gamma_0 u^{1/2} \left[\left(1 - \frac{1}{8} a_2 \right) - \gamma_1 \delta_b u^{1/10} \left(1 - \frac{3}{25} a_2 \right) + \gamma_2 \delta_b^2 u^{1/5} \left(1 - \frac{21}{200} a_2 \right) - \dots \right], \quad (22)$$

$$\tilde{\gamma}(t) = \tilde{\gamma}_0 u^{3/2} \left[\left(1 + \frac{3}{8} a_2 \right) - \tilde{\gamma}_1 \delta_b u^{1/10} \left(1 + \frac{12}{25} a_2 \right) + \tilde{\gamma}_2 \delta_b^2 u^{1/5} \left(1 + \frac{119}{200} a_2 \right) - \dots \right]. \quad (23)$$

Здесь γ_0 и $\tilde{\gamma}_0$ — коэффициенты в уравнении Фоккера–Планка для функции распределения газа упругих броуновских частиц:

$$\gamma_0 = \frac{2}{3} \sqrt{2} \Delta \frac{\sigma_0^2 g_2(\sigma_0)}{\sigma^2 g_2(\sigma)} \tau_c^{-1}(0),$$

$$\tilde{\gamma}_0 = \frac{T(0)}{m_b} \gamma_0.$$

Входящие сюда численные константы имеют следующие значения:

$$\gamma_1 = \frac{11}{200} \Gamma \left(\frac{1}{10} \right) C_1 2^{1/10} \approx 0.647,$$

$$\gamma_2 = \frac{3}{25} \Gamma \left(\frac{1}{5} \right) C_2 2^{1/5} \approx 0.505,$$

$$\tilde{\gamma}_1 = 2\gamma_1 \approx 1.294,$$

$$\tilde{\gamma}_2 = \frac{1}{2} \frac{C_1^2 + 4C_2}{C_2} \gamma_2 \approx 1.431.$$

При $t \gg \tau_c(0)$ коэффициенты γ и $\tilde{\gamma}$ имеют следующую зависимость от времени:

$$\gamma(t) = \gamma_0 \left(\frac{t}{\tau_0} \right)^{-5/6} \left(1 + \left(\frac{t}{\tau_0} \right)^{-1/6} \times \left(\frac{1}{2} T_1 \delta + \frac{1}{8} a_{21} \delta - \gamma_1 \delta_b \right) + \dots \right), \quad (24)$$

$$\tilde{\gamma}(t) = \tilde{\gamma}_0 \left(\frac{t}{\tau_0} \right)^{-5/2} \left(1 + \left(\frac{t}{\tau_0} \right)^{-1/6} \times \left(\frac{3}{2} T_1 \delta - \frac{3}{8} a_{21} \delta - \tilde{\gamma}_1 \delta_b \right) + \dots \right). \quad (25)$$

Как следует из полученных результатов, для газа в режиме однородного охлаждения наблюдается нарушение флуктуационно-диссипационного соотношения (теоремы), связывающего коэффициенты $\gamma(t)$ и $\tilde{\gamma}(t)$. В равновесной системе должно быть справедливо равенство [7, 37]

$$\tilde{\gamma} = (T/m_b)\gamma,$$

которое, очевидно, нарушается, если $\delta \neq 0$. В то же время, как следует из приведенных выше уравнений, флуктуационно-диссипационные соотношения остаются справедливыми в пределе $\delta = 0$ и $\delta_b = 0$.

3.2. Эволюция температуры броуновских частиц

Уравнение, описывающее эволюцию температуры броуновской частицы в газе, находящемся в состоянии однородного охлаждения, можно получить, умножая обе части уравнения Фоккера–Планка (21) на $m v_b^2/2$, интегрируя по \mathbf{v}_b и учитывая определение гранулярной температуры (1):

$$\frac{dT_b}{dt} = -2\gamma(t)T_b(t) + 2\tilde{\gamma}(t)m_b. \quad (26)$$

Решение этого линейного уравнения имеет вид

$$T_b(t) = T_b(t_0) \exp \left(- \int_{t_0}^t 2\gamma(\tau) d\tau \right) + 2m_b \int_{t_0}^t dt_1 \tilde{\gamma}(t_1) \exp \left(- \int_{t_1}^t 2\gamma(\tau) d\tau \right). \quad (27)$$

Асимптотическую зависимость температуры броуновских частиц от времени при $t \gg \tau_0$ можно получить для малых значений δ , подставляя в (27) асимптотические значения $\gamma(t)$ (24) и $\tilde{\gamma}(t)$ (25) и учитывая, что первое слагаемое, содержащее экспоненциальную зависимость от времени, убывает значительно быстрее по сравнению со степенной функцией. Несложные вычисления показывают, что

$$\frac{T_b(t)}{T(0)} = \left(\frac{t}{\tau_0}\right)^{-5/3} + T_{b1}\delta \left(\frac{t}{\tau_0}\right)^{-11/6} + \dots, \quad (28)$$

где

$$T_{b1} = T_1 - \frac{1}{2}a_{21} + (\gamma_1 - \tilde{\gamma}_1) \frac{\delta_b}{\delta}.$$

Предположим для простоты, что диссипативные свойства броуновской частицы и частицы среды одинаковы, т. е. $\delta_b = \delta$. В этом случае $T_{b1} \approx 2.413$.

Таким образом, в нулевом приближении температура броуновской частицы совпадает с температурой окружающей среды. Данный факт вполне согласуется с известным свойством гранулярного газа вязкоупругих частиц: характеристики такого газа стремятся с течением времени к пределу, отвечающему газу упругих частиц [7, 29, 34]. Однако, как видно из (28), уже в первом приближении по δ величины T и T_b оказываются различными, что соответствует нарушению равнораспределения энергии по степеням свободы, аналогично случаю газа с постоянным коэффициентом восстановления [8, 10].

Эволюция температуры броуновской частицы во всем временном диапазоне может быть получена при численном решении уравнения (26). Она показана на рис. 1, где сплошная кривая соответствует температуре броуновских частиц, а штриховая — температуре окружающей среды. На графике, построенном в двойном логарифмическом масштабе, видно, что на больших временах обе зависимости имеют один и тот же наклон, что соответствует следующей из теории степенной асимптотике (28), $T_b(t) \propto t^{-5/3}$. Интересно отметить, что частицы примеси остывают медленнее, чем частицы окружающей среды, что приводит к относительному «нагреванию» броуновских частиц.

Этот эффект иллюстрируется на рис. 2 и 3, где показана эволюция отношения температур примеси и среды. В начальный момент времени распределение по скоростям как малых частиц газа, так и крупных массивных частиц является максвелловским и температуры одинаковы. С течением времени температура броуновских частиц становится больше температуры окружающей среды, затем отношение достигает максимума, после чего температуры вырав-

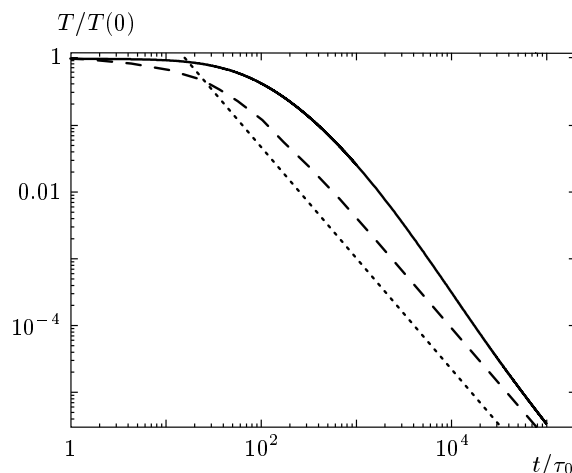


Рис. 1. Эволюция температуры броуновской частицы $T_b(t)$ (сплошная кривая) и температуры частиц газа $T(t)$ (штриховая кривая) в гранулярном газе без внешнего воздействия. Пунктирной кривой показана асимптотическая зависимость $t^{-5/3}$. Отношение масс броуновской частицы и газа $m_b/m = 5000$; характеризующий величину диссипации в системе параметр $\delta = 0.05$. Концентрацию окружающего газа и броуновских частиц для простоты принимаем малой, что позволяет использовать приближение $g_2(\sigma) \approx g_2(\sigma_0) \approx 1$

ниваются, поскольку соударения между частицами становятся все более и более упругими. Разница температур для различных частиц зависит от величины энергии, теряемой при соударениях: чем больше диссипация в системе, тем сильнее разница в температурах. Это связано с тем, что в системах с более сильной диссипацией газ быстрее остывает, тогда как газ броуновских частиц вследствие их массивности и инерционности не успевает остывать так же быстро.

Зависимость этого эффекта от массы проиллюстрирована на рис. 3: чем больше масса, тем сильнее выражен эффект нарушения равнораспределения энергии по степеням свободы. Чем меньше масса, тем раньше происходит выравнивание температур. Следует отметить, что изменение массы броуновской частицы слабее влияет на зависимость отношения температур, чем изменение диссипативного параметра. Этот факт можно объяснить наличием двух противоположных эффектов: с одной стороны, чем больше масса примеси, тем более она инертна и тем более явно выражена разница в температурах. С другой стороны, при увеличении массы частицы при постоянной плотности возрастают ее размеры, что приводит к увеличению количества контактов

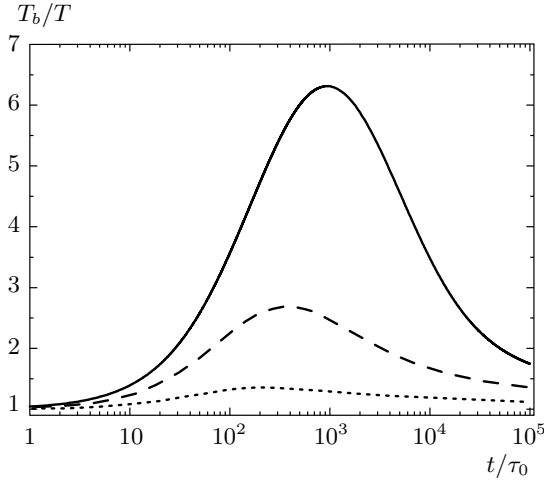


Рис. 2. Эволюция отношения температуры броуновской частицы $T_b(t)$ к температуре окружающего газа $T(t)$. Кривые соответствуют различным значениям диссипативного параметра $\delta = 0.05$ (сплошная кривая), 0.03 (штриховая кривая), 0.01 (пунктирная кривая) при фиксированном отношении масс, $m_b/m = 5000$. Концентрацию окружающего газа и броуновских частиц для простоты принимаем малой, что позволяет использовать приближение $g_2(\sigma) \approx g_2(\sigma_0) \approx 1$

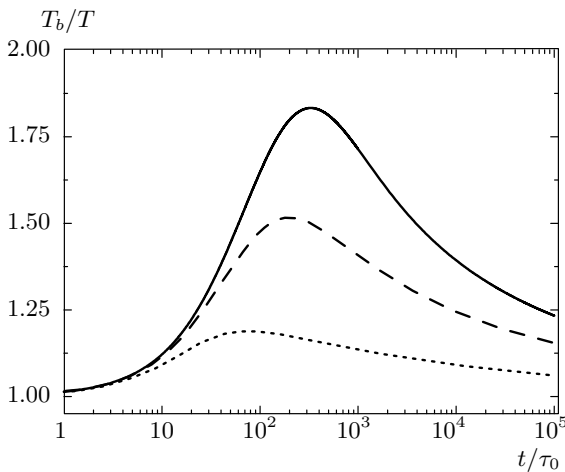


Рис. 3. Эволюция отношения температур $T_b(t)/T(t)$ для броуновских частиц различной массы $m_b/m = 500$ (пунктирная кривая), 4000 (штриховая кривая), 10000 (сплошная кривая) для фиксированного параметра диссипации $\delta = 0.015$. Как и выше, использовано приближение $g_2(\sigma) \approx g_2(\sigma_0) \approx 1$

между частицами газа и примеси и более эффективному обмену энергией между ними.

Детальный анализ также показывает, что существует диапазон параметров системы, когда происходит не только «относительный» но и «абсолютный» нагрев броуновских частиц. Это соответствует потоку тепла от более холодной подсистемы к более горячей. Разумеется, ни о каком нарушении второго закона термодинамики речь не идет, так как гранулярные газы — это открытая в термодинамическом смысле система.

3.3. Броуновское движение в стационарном гранулярном газе

Перейдем к рассмотрению броуновского движения в диссипативном газе, находящемся в стационарном состоянии, которое обеспечивается воздействием случайной силы (10) на частицы газа и силы $\mathbf{F}_b(t)$ с коррелятором

$$\langle F_{bi}(t)F_{bj}(t') \rangle = \delta_{ij}\delta(t-t')m_b^2\xi_b^2$$

на частицы примеси. Уравнение эволюции функции распределения броуновских частиц по скоростям будет содержать в этом случае в правой части дополнительное слагаемое, обусловленное действием силы $\mathbf{F}_b(t)$:

$$\frac{\partial f_b}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_b} \left(\gamma \mathbf{v}_b + \Gamma \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_b} \right) f_b, \quad (29)$$

где

$$\Gamma = \left(\tilde{\gamma} + \frac{\xi_b^2}{2} \right),$$

а коэффициенты γ и $\tilde{\gamma}$ имеют вид (22) и (23), как и для остывающего газа. Необходимо, однако, учесть, что в стационарном случае они постоянны. При этом $u = 1$, а коэффициент a_2 определяется путем решения уравнения (12). В стационарном состоянии временные производные всех характеристик системы равны нулю, что приводит к следующему выражению для равновесной температуры броуновской частицы:

$$T_b = m_b \left(\frac{\Gamma}{\gamma} \right) = m_b \frac{\tilde{\gamma} + \xi_b^2/2}{\gamma}. \quad (30)$$

Это соотношение получается аналогично выражению (26) для газа, находящегося в состоянии однородного охлаждения. Оно показывает, что в случае газа в термостате флуктуационно-диссипационное соотношение выполняется. Интересно отметить, что справедливость последнего далеко не очевидна, так

как речь идет не о равновесном, а только о *стационарном* состоянии. Более того, в этом состоянии температуры броуновских частиц и газа могут сильно различаться (см. ниже).

Асимптотическое выражение для температуры частиц примеси в случае малой диссипации можно получить путем разложения (30) по δ и δ_b :

$$T_b = T \left(1 - (\tilde{\gamma}_1 - \gamma_1) \delta_b - \frac{1}{2} a_{21} \delta \right) + \frac{3}{16} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times \\ \times \frac{m_b^2}{m} \frac{1}{\sigma_0^2 g_2(\sigma_0)} \sqrt{\frac{m}{T}} \frac{\xi_b^2}{n} \left(1 - \frac{1}{8} a_{21} \delta + \gamma_1 \delta_b \right).$$

Если ускорение, действующее на большую частицу со стороны термостата, совпадает с ускорением, действующим на частицу газа, т. е. $\xi_b = \xi_0$, и диссипативные свойства примеси и среды одинаковы ($\delta_b = \delta$), то температура броуновских частиц принимает вид

$$\frac{T_b}{T} = 1 + \left(-\gamma_1 - \frac{1}{2} a_{21} + \right. \\ \left. + \frac{2^{1/10}}{8\sqrt{\pi}} \left(\frac{m_b}{m} \right)^2 \frac{g_2(\sigma) \sigma^2}{g_2(\sigma_0) \sigma_0^2} \omega_0 \right) \delta + \dots \quad (31)$$

Нарушение равнораспределения энергии по степеням свободы для стационарного гранулярного газа под воздействием стохастической силы, сообщающей одинаковое ускорение всем частицам системы выражено существенно сильнее, чем для газа в состоянии однородного охлаждения. Температура броуновских частиц T_b быстро растет с увеличением массы большой частицы и величины диссипации при соударениях, что проиллюстрировано на рис. 4.

Из уравнения (29) легко рассчитать коэффициент диффузии. Действительно, это уравнение имеет вид обычного уравнения Фоккера–Планка с постоянными коэффициентами, которому соответствует уравнение Ланжевена [7, 37]:

$$\frac{d\mathbf{v}_b}{dt} = -\gamma \mathbf{v}_b + \mathcal{F}(t),$$

$$\langle \mathcal{F}(t) \rangle = 0, \quad \langle \mathcal{F}(t) \mathcal{F}(t') \rangle = \Gamma \delta(t' - t).$$

Из этих уравнений легко определить функцию корреляции скорости броуновской частицы, $\langle \mathbf{v}_b(0) \mathbf{v}_b(t) \rangle$, интегрируя которую, т. е. используя соотношения Грина–Кубо, находим коэффициент диффузии [7]:

$$D_b = \frac{T_b}{m_b \gamma}. \quad (32)$$

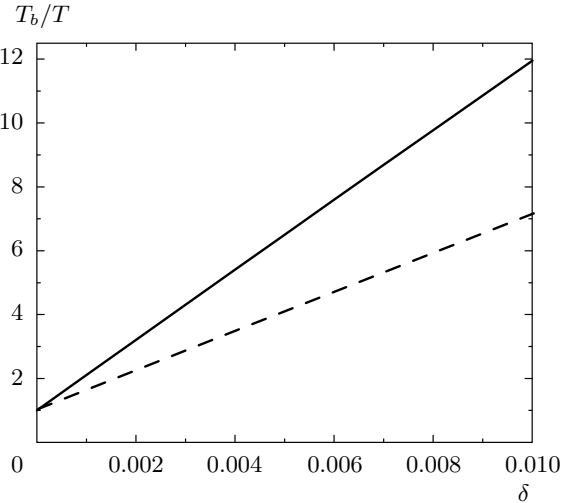


Рис. 4. Зависимости отношения температур броуновской частицы и частицы среды (уравнение (31)) от диссипативного параметра δ для диссипативного газа в термостате для различных значений $m_b/m = 100$ (штриховая кривая), 150 (сплошная кривая). Как и выше, использовано приближение $g_2(\sigma) \approx g_2(\sigma_0) \approx 1$

Полученный результат (32) совпадает с выражением для коэффициента диффузии для случая равновесного молекулярного газа. Важным отличием, однако, является то, что температура броуновских частиц не равна температуре газа, которая устанавливается за счет компенсации потери энергии при диссипативных соударениях энергией, получаемой частицами от термостата.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе рассмотрена динамика гранулярного газа, состоящего из большого числа мелких гранул с редкими включениями крупных (броуновских) частиц. В отличие от предыдущих исследований, где использовалась упрощенная модель постоянного коэффициента восстановления, мы исследовали случай реалистичного коэффициента восстановления, который получается из решения задачи о соударении двух вязкоупругих частиц.

Полученные результаты непосредственно указывают на нарушение принципа равнораспределения энергии по степеням свободы, проявляющееся в значительном отличии температуры броуновских частиц от температуры окружающего газа. Этот эффект наблюдается как для свободного газа, так и для газа в термостате. В то же время флуктуаци-

онно-диссипативное соотношение, связывающее эффективный коэффициент трения и амплитуду случайной силы, которое всегда нарушается в свободном газе, остается справедливым для газа в термостате, несмотря на то что температуры броуновских частиц и газа различны.

Одним из интересных результатов, полученных в работе, является новый эффект — «относительный нагрев» броуновских частиц за счет остывания окружающего газа: температура более горячего газа крупных частиц становится выше температуры холодного газа мелких частиц. Этот процесс имеет, однако, переходной характер, так как асимптотически температуры броуновских частиц и частиц газа выравниваются. Данный эффект, в известном смысле, напоминает явление «остывания» частиц в бильярдных системах [38], когда за счет движения бесконечно тяжелых стенок бильярда возможно понижение скорости быстрых частиц.

Необходимо также отметить, что описанный эффект не означает нарушения второго закона термодинамики, так как в термодинамическом смысле гранулярные газы являются открытыми системами. Действительно, за счет неупругих соударений происходит постоянный переход (механической) энергии степеней свободы, которые явно рассматриваются при анализе системы (координаты и скорости частиц), в энергию микроскопических степеней свободы, отвечающих атомарной структуре частиц, которые неявно учитываются в диссипативных параметрах материала гранул.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. Brown, *Phil. Mag.* **4**, 161 (1828).
2. A. Einstein, *Ann. der Physik* **17**, 549 (1905).
3. M. Smoluchowski, *Ann. der Physik* **21**, 756 (1906).
4. P. Langevin, *C. R. Acad. Sci. (Paris)* **146**, 530 (1908).
5. J. L. Lebowitz and P. Resibois, *Phys. Rev. A* **139**, 1101 (1965).
6. L. Bocquet and J.-P. Hansen, *NATO ASI Series* **371**, 1 (2000).
7. N. V. Brilliantov and T. Pöschel, *Kinetic Theory of Granular Gases*, Oxford Univ. Press, Oxford (2004).
8. J. J. Brey, M. J. Ruiz-Montero, R. Garcia-Rojo, and J. W. Dufty, *Phys. Rev. E* **60**, 7174 (1999).
9. J. W. Dufty and J. J. Brey, *New J. Phys. Rev. E* **7**, 20 (2005).
10. A. Santos and J. W. Dufty, *Phys. Rev. E* **64**, 051305 (2001).
11. H. Hinrichsen and D. E. Wolf, *The Physics of Granular Media*, Wiley, Berlin (2004).
12. I. Goldhirsch, *Ann. Rev. Fluid Mech.* **35**, 267 (2003).
13. T. Pöschel and S. Luding, *Lect. Notes in Phys.* **564**, Springer, Berlin (2001).
14. T. Pöschel and N. V. Brilliantov, *Lect. Notes in Phys.* **624**, Springer, Berlin (2003).
15. R. Greenberg and A. Brahic, *Planetary Rings*, The University of Arizona Press (1984).
16. R. D. Wildman and D. J. Parker, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 064301 (2002).
17. K. Feitosa and N. Menon, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 198301 (2002).
18. I. S. Aranson and J. S. Olafsen, *Phys. Rev. E* **66**, 061302 (2002).
19. F. Rouyer and N. Menon, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 3676 (2000).
20. W. Losert, D. G. W. Cooper, J. Delour, A. Kudrolli, and J. P. Gollub, *Chaos* **9**, 682 (1999).
21. W. Goldsmit, *The Theory and Physical Behavior of Colliding Solids*, Arnold, London (1960).
22. F. G. Bridges, A. Hatzes, and D. N. C. Lin, *Nature* **309**, 333 (1984).
23. G. Kuwabara and K. Kono, *J. Appl. Phys. Part 1* **26**, 1230 (1987).
24. T. Tanaka, T. Ishida, and Y. Tsuji, *Trans. Jap. Soc. Mech. Eng.* **57**, 456 (1991).
25. R. Ramirez, T. Pöschel, N. V. Brilliantov, and T. Schwager, *Phys. Rev. E* **60**, 4465 (1999).
26. L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Theory of Elasticity*, Oxford Univ. Press, Oxford (1965).
27. N. V. Brilliantov, F. Spahn, J.-M. Hertzsch, and T. Poeschel, *Phys. Rev. E* **53**, 5382 (1996).
28. T. C. van Noije, M. H. Ernst, and R. Brito, *Physica A* **251**, 266 (1998).
29. N. V. Brilliantov and T. Pöschel, *Phys. Rev. E* **61**, 5573 (2000).
30. T. P. C. van Noije and M. H. Ernst, *Granular Matter* **1**, 57 (1998).
31. A. Goldshtein and M. Shapiro, *J. Fluid. Mech.* **282**, 75 (1995).

- 32.** S.H. Noskowicz, O. Bar-Lev, D. Serero, and I. Goldhirsch, *Europhys. Lett.* **79**, 60001 (2007).
- 33.** S. Chapman and T. G. Cowling, *The Mathematical Theory of Nonuniform Gases*, Cambridge Univ. Press, New York (1970).
- 34.** А. С. Бодрова, Н. В. Бриллиантов, *Вестник МГУ. Физика. Астрономия*, № 2, 25 (2009).
- 35.** A. S. Bodrova and N. V. Brilliantov, *Physica A* **388**, 3315 (2009).
- 36.** J. M. Montanero and A. Santos, *Granular Matter* **2**, 53 (1998).
- 37.** N. van Kampen, *Stochastic Processes in Physics and Chemistry*, Elsevier, Amsterdam (1992).
- 38.** A. Loskutov and A. Ryabov, *J. Stat. Phys.* **108**, 995 (2002).