

САМООРГАНИЗАЦИЯ КРИТИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ НА СЛОЖНЫХ СЕТЯХ

*С. Л. Гинзбург, А. В. Накин, Н. Е. Савицкая**

*Петербургский институт ядерной физики Российской академии наук
188300, Гатчина, Ленинградская обл., Россия*

Поступила в редакцию 27 апреля 2009 г.

Изучена критическая динамика двухпороговой системы с законом сохранения основной величины z и в отсутствие стока, помещенной на безмасштабную сеть. Показано, что в такой системе возникает критическое состояние, являющееся набором метастабильных состояний. По своей структуре метастабильные состояния представляют совокупность устойчивых кластеров узлов, значения z на которых близки к положительному и отрицательному пороговым значениям. В исследуемой системе возникают лавины, переводящие ее из одного метастабильного состояния в другое. Отсутствие стока эффективно заменяется процессом аннигиляции. Изучена статистика лавин в такой системе. Показано, что в системе возможно возникновение самоорганизованного критического состояния.

PACS: 89.75.Fb, 05.65.+b

1. ВВЕДЕНИЕ

Изучение различных динамических процессов, происходящих на сложных сетях, в настоящее время является очень актуальной задачей, поскольку рассматриваемые процессы могут служить моделями ряда важных явлений, таких как передача информации в Интернете, распространение возбуждений в коре головного мозга, дорожный трафик, развитие городов и прочее. В большей части работ, посвященных динамике на сложных сетях, в качестве модели сложной сети используется растущая, безмасштабная сеть. Такой выбор объясняется тем, что большинство сетей, природных или искусственно созданных, является растущими, т. е. количество узлов в них увеличивается со временем. В качестве примеров можно привести сеть Интернет, к которой ежедневно подключаются новые пользователи, такую социальную сеть, как сеть телефонных контактов, количество номеров в которой постоянно увеличивается, сеть цитируемых научных работ, где каждая новая работа — добавленный узел, некоторые биологические сети и т. д. Модель безмасштабной сети используется потому, что она лучше всего отражает все топологические свойства сложных природных се-

тей, такие как неравномерное распределение связей и наличие хабов (узлов с большим числом связей) (см. обзор [1] и ссылки к нему).

Одним из направлений названных выше исследований является изучение критической динамики [2], которая включает в себя, в частности, изучение самоорганизованного критического состояния на сложных сетях [3, 4].

Под самоорганизацией в данном случае понимается способность системы самостоятельно, под воздействием малых внешних возбуждений, но без точной подстройки внешних параметров, приходиться в критическое состояние, являющееся самоподдерживающимся. Такое состояние представляет собой набор метастабильных состояний, которые в процессе эволюции системы переходят друг в друга после очередного возмущения. Переход осуществляется посредством динамических процессов — лавин. Распределение размеров возникающих в системе лавин подчиняется степенному закону [5].

Общими свойствами для реальных самоорганизующихся систем (куча песка, дискретный сверхпроводник) или описывающих их математических моделей являются следующие. Системы, в которых возможно возникновение самоорганизации, представляют собой набор взаимодействующих между собой пороговых элементов и являются открытыми, т. е.

*E-mail: savitska@inbox.ru, savitska@thd.pnpi.spb.ru

основная величина (энергия, ток, песчинки) может покидать систему (процесс стока) чаще всего через граничные элементы.

Ранее мы показали, что самоорганизованное критическое состояние может реализовываться в таких физических объектах, как дискретные сверхпроводники (многоконтактные СКВИДы) [6, 7], которые можно представить как неупорядоченную решетку, состоящую из большого числа взаимодействующих джозефсоновских контактов. Лавины на ней обнаруживаются как импульсы напряжения в системе [8] или как вхождение в нее магнитного потока [7]. Мы также показали [9], что в дискретных сверхпроводниках, помещенных во внешнее магнитное поле, возможна реализация самоорганизованного критического состояния даже при закрытых граничных условиях. Это связано с тем, что у токов в контактах имеется два пороговых значения: положительное и отрицательное, и токи разных знаков могут аннигилировать между собой. Процесс аннигиляции в этом случае заменяет процесс стока. Также спецификой данной системы является то, что суммарное значение тока в решетке всегда сохраняется и равно нулю, а контакты с положительным и отрицательным значениями токов образуют на решетке устойчивые кластеры.

Также мы показали [10], что при определенных условиях дифференциальные уравнения, описывающие дискретный сверхпроводник, могут быть сведены к алгоритмам, аналогичным тем, которые описывают модель кучи песка [11] — одну из наиболее популярных моделей для изучения самоорганизации.

Целью настоящей работы является изучение динамики системы, обладающей основными чертами, присущими физическому объекту — дискретным сверхпроводникам, и помещенной на безмасштабную сеть. Наша задача — сформулировать условия, при которых в такой системе, помещенной на безмасштабную сеть, возникает самоорганизованное критическое состояние.

Рассматриваемая нами система состоит из большого числа взаимодействующих пороговых элементов, обладает закрытыми граничными условиями, и основная динамическая переменная в ней имеет два пороговых значения — положительное и отрицательное. Важно отметить, что в системе выполняется закон сохранения. Суммарное значение основной переменной по всем узлам сети сохраняется равным нулю. Критическая динамика подобной системы на безмасштабной сети ранее не рассматривалась.

Во-первых, мы покажем, что несмотря на сложную топологию сети, критическое состояние в систе-

ме возникает и представляет собой набор метастабильных состояний, переходящих друг в друга посредством лавин. Как и в случае дискретных сверхпроводников, в системе реализуется процесс аннигиляции, который и способствует существованию сложного критического состояния. Во-вторых, мы продемонстрируем, что в рассматриваемой системе возможна реализация самоорганизованного критического состояния, но для этого необходим контроль за количеством узлов, в которых происходит аннигиляция. Мы покажем, что при уменьшении доли таких узлов происходит переход от экспоненциально-степенного поведения функции плотности вероятности размеров лавин к степенному. Это свидетельствует о реализации в системе самоорганизованного критического состояния в классическом смысле [5].

Структура настоящей работы следующая. В разд. 2 кратко рассмотрен процесс построения безмасштабной сети, введены дифференциальные уравнения, описывающие закрытую систему на сети, обсуждаются их особенности и представлена система связанных отображений, к которым сводятся эти уравнения. Физические обоснования возможности такого упрощения системы, а также технические особенности перехода к системе связанных отображений обсуждаются в Приложении. В разд. 3 описана процедура изучения динамики системы, помещенной на безмасштабную сеть, и показано, что в системе реализуется критическое состояние. В разд. 4 введена основная характеристика системы — размер лавины — и рассмотрена статистика этой величины. Раздел 5 посвящен изучению статистики размеров лавин при различном количестве точек аннигиляции в системе. В Заключении сформулированы основные выводы работы, а также намечены дальнейшие перспективы исследований.

2. ЗАКРЫТАЯ СИСТЕМА НА БЕЗМАСШТАБНОЙ СЕТИ. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Любая сеть представляет собой совокупность узлов, соединенных связями. Число связей узла в сети равно k (degree). Будем рассматривать растущие (неравновесные) сети. Новый узел может быть присоединен к уже существующей сети различными способами. В настоящей работе будем рассматривать сети, построенные путем линейного преимущественного присоединения. Это означает, что узел для присоединения новой связи к уже существующей сети в

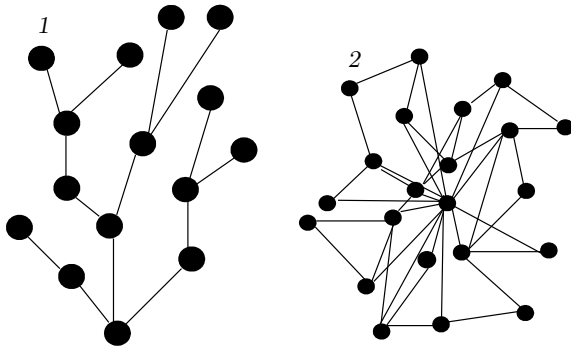


Рис. 1. Фрагменты сетей с различными значениями параметра m . Слева сеть древовидной структуры ($m = 1$). Справа сеть с $m = 2$, на которой возможно существование замкнутых траекторий

момент времени t выбирался с вероятностью, пропорциональной функции $f(k, t) = k/2t$. Мы также рассматривали сети с различным значением параметра m — числа связей, принадлежащих узлу в момент рождения.

Сеть, построенная в результате применения линейного преимущественного присоединения, является безмасштабной сетью, для нее функция распределения k имеет вид [12]

$$P(k) = \begin{cases} \frac{2m(m+1)}{k(k+1)(k+2)}, & \text{точное решение,} \\ \frac{2m^2}{k^3}, & \text{континуальное приближение.} \end{cases}$$

Если не будет оговорено особо, то будем рассматривать сети размером $N = 10000$ с различными значениями m . Сеть с $m = 1$ отличается от сетей с $m > 1$ древовидной структурой, на которой невозможно существование замкнутых траекторий (рис. 1). Топология сети, как мы увидим далее, существенно влияет на динамические процессы на ней.

Перейдем теперь к описанию нашей модели закрытой системы на безмасштабной сети. С каждым узлом сети свяжем переменную φ_i , где i — номер узла, к которому привязана данная переменная. Узлы нумеруются в порядке присоединения к сети. В качестве гамильтониана, описывающего нашу систему, выбираем следующий:

$$U(\varphi_i) = \sum_i [V(1 - \cos \varphi_i) - 2\pi F_i \varphi_i] + \frac{1}{2} \sum_{ij} J_{ij}(\varphi_i - \varphi_j)^2. \quad (1)$$

Здесь J_{ij} — матрица связности; $J_{ij} = 1$, если i -й и j -й узлы связаны, $J_{ij} = 0$, если не связаны. Описанная модель является закрытой системой. Заметим, что открытая система не является гамильтоновой. Гамильтониан вида (1) может описывать не только многоконтактный СКВИД, о котором говорилось во Введении, но также, например, волны зарядовой плотности [13].

Динамика переменной φ_i описывается следующими дифференциальными уравнениями:

$$\frac{d\varphi_i}{dt} = -\frac{1}{\tau} \frac{\partial U(\varphi_i)}{\partial \varphi_i},$$

$$V \sin \varphi_i + \tau \frac{d\varphi_i}{dt} = \sum_j J_{ij}(\varphi_j - \varphi_i) + 2\pi F_i. \quad (2)$$

Здесь V и τ — параметры системы, коэффициенты J_{ij} , как сказано выше, характеризуют наличие или отсутствие в сети связи между i -м и j -м узлами. В нашем случае $J_{ij} = J_{ji}$. При этом сумма всех связей, имеющихся у узла под номером i , равна k_i , т. е. $\sum_j J_{ij} = k_i$. Тогда имеем

$$V \sin \varphi_i + \tau \frac{d\varphi_i}{dt} = \sum_j J_{ij} \varphi_j - k_i \varphi_i + 2\pi F_i. \quad (3)$$

Величины F_i описывают внешнее воздействие на систему. Будем рассматривать случай, когда внешнее возмущение происходит в определенных узлах, находящихся на «границе» сети. Определим границу сети, как узлы, в которых $k = m$. Именно на этих узлах мы будем изменять величины F_i , чтобы возбудить в системе динамический процесс. Ниже процесс возмущения будет обсужден более подробно. Заметим, что рассматриваемые ранее равновесные сети, такие как классический случайный граф, не имеют границ, однако для безмасштабной сети определение границы как совокупности узлов, у которых число связей в сети равно числу связей при рождении узла, является вполне естественным. Это узлы, к которым не было осуществлено присоединение. Логичность данного определения видна из схематического рисунка сети (рис. 1), где очевидно, что узлы 1 и 2 являются граничными.

Рассмотрим случай, когда параметр $V \gg 1$. В этой ситуации в системе можно ввести дискретное время и перейти к рассмотрению более удобной переменной

$$z_i = \frac{V}{2\pi} \sin \varphi_i + \frac{\tau}{2\pi} \frac{d\varphi_i}{dt},$$

динамика которой будет описываться не системой дифференциальных уравнений, а системой отображений или алгоритмами, подобными таковым для

модели кучи песка [11]. Подробное описание техники перехода к дискретному времени и системе отображений, а также его физическое обоснование, дано в Приложении, см. также [8].

Возникающая в результате перехода к дискретному времени система отображений выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} z_i(n+1) - z_i(n) &= \\ &= \sum_j J_{ij} \Psi(z_j(n)) - k_i \Psi(z_i(n)), \\ z_i(n+1) - z_i(n) &= \sum_j J_{ij} \Psi(z_j(n)) - \\ &- k_i \Psi(z_i(n)) + [F_i(n+1) - F_i(n)]. \end{aligned} \quad (4)$$

Первое уравнение данной системы справедливо для внутренних узлов сети, второе — для узлов на границе, где происходит добавление.

Функция $\Psi(z)$ имеет вид

$$\Psi(z_i(n)) = \theta[z_i - z_c^+] - \theta[-z_i - z_c^-],$$

где z_c^+ и $(-z_c^-)$ — положительное и отрицательное критические значения для z ($z_c^\pm > 0$).

Из уравнений (4) видно, что изменение во времени суммарного значения переменной z_i выражается через сумму изменений внешних воздействий:

$$\sum_i [z_i(n+1) - z_i(n)] = \sum_i [F_i(n+1) - F_i(n)]. \quad (5)$$

Обсудим теперь особенности возмущения нашей системы. Для того чтобы соблюдалось поставленное нами условие сохранения и равенства нулю суммарного значения основной динамической переменной z , выберем для системы следующие начальные условия: $z_i = F_i = 0$. Далее разделим границу на «положительную» и «отрицательную» части. Для этого выберем случайно n_b^+ «положительных» узлов границы, остальные n_b^- узлов будут «отрицательными». На «отрицательных» узлах величины будут получать отрицательные приращения, на «положительных» — положительные. Количество узлов в «положительной» и «отрицательной» частях границ и величина изменения F_i будут выбираться так, чтобы выполнялось равенство

$$\sum_i [F_i(n+1) - F_i(n)] = 0.$$

Тогда мы получим, что суммарное изменение величины z будет равно нулю.

Таким образом, мы описали безмасштабную сеть, определили ее границу и поместили на данную сеть

закрытую систему, которую будем изучать. Система отображений (4) на безмасштабной сети сохраняет основные свойства, которыми обладала система уравнений, описывающая многоконтактный СКВИД. У нее закрытые граничные условия, суммарная величина основной динамической переменной сохраняется и равна нулю и сама динамическая величина z имеет два пороговых значения: положительное и отрицательное.

3. МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ ДИНАМИКИ ЗАКРЫТОЙ СИСТЕМЫ. КРИТИЧЕСКОЕ СОСТОЯНИЕ

Рассмотрим теперь процесс моделирования динамики описанной нами закрытой системы на сети.

Мы выбираем начальное состояние системы таковым, что все $z_i = F_i = 0$.

Далее, возмущаем сеть, добавляя величину $+\Delta h$ к F_i в случайно выбранном i -м узле «положительной» части границы сети и величину $-\Delta h$ к величине F_j в случайно выбранном j -м узле «отрицательной» части границы сети. Если не будет оговорено особо, то $\Delta h = 1$. В результате, суммарное добавление равняется нулю, как и в случае многоконтактного СКВИДа. Таким образом, шаг за шагом мы проводим «накачку» переменной z в сеть.

Как только в одном из узлов сети переменная z_i выйдет из интервала значений $-z_c^- < z_i < z_c^+$, то согласно отображениям (4) произойдет сброс нескольких единиц с этого узла на соседние узлы z_j , связанные с ним k_i связями. Заметим, что этот процесс можно описать алгоритмом, что является более привычным описанием динамики при изучении систем с самоорганизацией:

$$\begin{aligned} z_i > z_c^+ &\Rightarrow z_i \rightarrow z_i - k_i, \\ &z_j \rightarrow z_j + 1, \\ z_i < -z_c^- &\Rightarrow z_i \rightarrow z_i + k_i, \\ &z_j \rightarrow z_j - 1. \end{aligned} \quad (6)$$

Мы видим, что данный алгоритм аналогичен алгоритму, описывающему, например, модель кучи песка [11], с той разницей, что перераспределение величины z происходит не по четырем соседним контактам, а по k связям данного узла, и основная переменная имеет два пороговых значения: положительное и отрицательное.

Изменение z в одном из узлов (осыпание) может вызвать осыпание соседних, запуская таким образом лавинообразный процесс. В этом случае мы ожидаем окончания динамического процесса, т. е.

ситуации, когда для всех z выполнено неравенство $-z_c^- < z_i < z_c^+$, а затем вновь возмущаем систему на границе способом, описанным выше.

По прошествии некоторого переходного периода в системе устанавливается критическое состояние. Уникальность этого явления состоит в том, что, несмотря на сложную топологию сети и условие сохранения нулевого суммарного значения динамической переменной, в системе не происходит полной аннигиляции положительных и отрицательных величин, а образуются устойчивые кластеры узлов, в которых величина z имеет положительное или отрицательное значение.

Процесс аннигиляции в системе способствует возникновению и поддержанию критического состояния, которое состоит из набора метастабильных состояний. Во время переходов из одного метастабильного состояния в другое, согласно алгоритму (6), значения z на узлах несколько флуктуируют, но не меняют знака в процессе эволюции системы. Переход между метастабильными состояниями осуществляется посредством лавин, которые обнаруживаются как каскад изменений z на узлах.

Структура метастабильных состояний, составляющих возникающее критическое состояние, безусловно, зависит от разделения границы сети на «положительную» и «отрицательную» части. Напомним, что мы называем границей узлы с $k = m$ и делим границу на n_b^+ узлов, которые называем «положительными», и n_b^- узлов, которые называем «отрицательными».

Сначала рассмотрим случай, когда «положительная» и «отрицательная» части границы одинаковы по количеству принадлежащих к ним узлов ($n_b^+ = n_b^-$), а положительное и отрицательное пороговые значения для z равны ($z_c^+ = z_c^-$). Величина критического значения выбиралась таким образом, чтобы $z_c^\pm \gg k_{max}$. Так мы отсекали возможность возникновения динамических циклов в системе, т. е. ситуаций, когда в одном узле возникли бы циклические «перевороты» величины z следующего типа: $z_i > z_c^+$, $z_i - k_i < -z_c^-$. Размер сети $N = 10000$.

На рис. 2 представлена функция распределения величины z в одном из метастабильных состояний, составляющих критическое состояние рассматриваемой системы. Из рис. 2 видно, что примерно половина узлов решетки имеют z близкое к положительному критическому порогу, и также примерно половина узлов имеют z близкое к отрицательному порогу. Некоторое незначительное число узлов имеют z близкое к нулю.

Таким образом, в нашей закрытой системе на без-

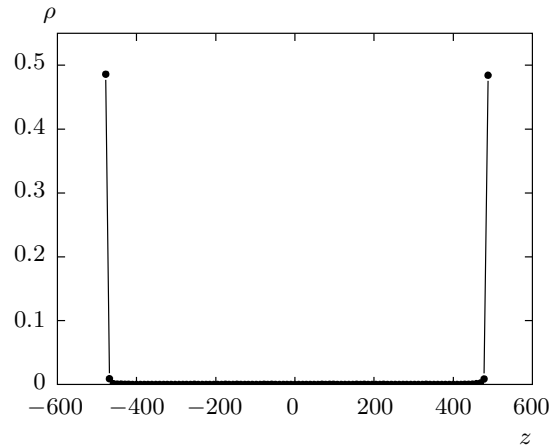


Рис. 2. Функция распределения величины z в одном из метастабильных состояний, составляющих критическое состояние системы при $n_b^- = n_b^+$, $z_c^+ = z_c^-$. Функция имеет два пика примерно одинаковой высоты. Это говорит о том, что полной аннигиляции положительных и отрицательных значений z_i не происходит, а на сети формируются устойчивые кластеры узлов с положительными и отрицательными значениями z_i

масштабной сети возникло состояние, по структуре подобное самоорганизованному критическому состоянию. Теперь необходимо проверить, каким образом распределены размеры возникающих в нем лавин.

4. СТАТИСТИКА ЛАВИН В КРИТИЧЕСКОМ СОСТОЯНИИ

Основной характеристикой самоорганизованного критического состояния является размер лавины, а критерием наличия в системе самоорганизации — степенное распределение размеров возникающих в ней лавин [5]. В данном разделе рассмотрим статистику лавин в закрытой системе, помещенной на безмасштабную сеть.

Размером лавины s будем называть полное число «осыпаний», т. е. актов, в которых величина z вышла за пределы интервала $-z_c^- < z_i < z_c^+$ за время лавины. Моменты времени в течение лавины с номером a будем обозначать n_a , где a — номер лавины или возмущения, который является фиктивным временем в нашем процессе моделирования [8]. Будем нормировать эту величину на размер сети N :

$$s = \frac{1}{N} \sum_{i, n_a} \{ \theta[z_i(n_a) - z_c^+] + \theta[-z_i(n_a) - z_c^-] \}. \quad (7)$$

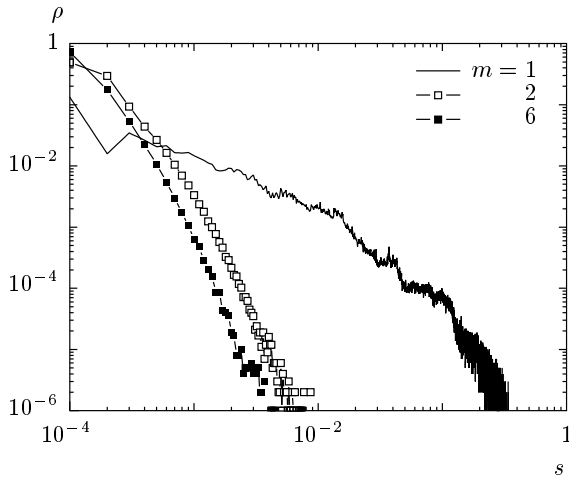


Рис. 3. Плотности вероятности размеров лавин $\rho(s)$ для сетей с различным значением параметра m . Вид функции плотности вероятности в случае $m = 1$ отличается от остальных в связи с тем, что в сети с $m = 1$ невозможно образование замкнутых траекторий. В результате лавины становятся значительно больше по размеру

Мы по-прежнему сохраняем разделение границы на «положительную» и «отрицательную», при этом $n_b^+ = n_b^-$, $z_c^+ = z_c^-$, $\Delta h = 1$, $N = 10000$. После прихода системы в критическое состояние мы рассчитывали размер каждой возникающей лавины по формуле (7), а затем вычисляли плотность вероятности размеров лавин. Расчеты делались по количеству лавин, равному примерно 10^6 – 10^7 .

Мы рассмотрели плотности вероятности для размеров лавин на сетях с различной величиной m ($m = 1, 2, 6$). Результаты представлены на рис. 3. Здесь мы впервые столкнулись с влиянием топологии сети на динамику на ней. При $m = 1$, когда сеть имеет древовидную структуру без замкнутых траекторий размеры возникающих лавин гораздо больше, чем при $m > 1$. Это можно объяснить тем, что на древовидной структуре величинам противоположных знаков необходимо «пройти» больший путь до момента аннигиляции, в то время как наличие в системе циклических траекторий этот путь укорачивает. В случаях же, когда $m > 1$, плотности вероятности размеров лавин почти не отличаются друг от друга не только качественным поведением, но и количественно (см. рис. 3).

Далее мы провели анализ полученных данных, подбирая функцию, которая наилучшим образом описывала бы полученное распределение лавин. Оказалось, что плотность вероятности размеров лавин

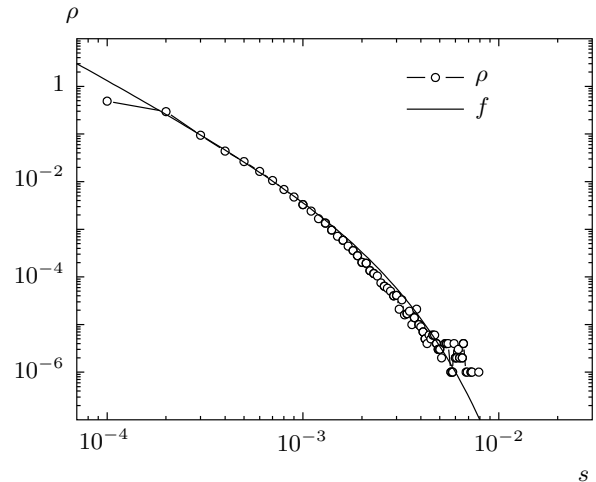


Рис. 4. Плотность вероятности размеров лавин $\rho(s)$ для сети с $m = 2$. Полученные путем компьютерного моделирования данные $\rho(s)$ хорошо описываются функцией $f(s) \sim s^{-2.2} \exp(-s/0.001)$

как для $m = 1$, так и для $m > 1$ наиболее точно описывается функцией вида [4]

$$\rho(s) \sim s^{-\alpha} \exp(-s/s_c). \tag{8}$$

Это видно из рис. 4.

Таким образом, оказалось, что в тех условиях, в которых мы рассматривали систему, возникающее в ней критическое состояние не является самоорганизованным в классическом смысле [5].

Однако подобный эффект уже наблюдался ранее на модели типа кучи песка [14]. В случае, рассмотренном в работе [14], при увеличении количества точек стока в системе, (как уже говорилось, для нашего случая аналог стока — процесс аннигиляции) функция распределения размеров лавин отклонялась от степенной и переходила сначала в экспоненциально-степенную, а затем и в экспоненциальную. Соответственно в нашем случае отклонение от степенной зависимости может быть обусловлено наличием процесса аннигиляции, который может происходить практически в любом узле.

Процесс аннигиляции в нашей системе может быть двух видов. Первый вариант аннигиляции реализуется, когда в один и тот же узел с соседних узлов приходят положительная и отрицательная единицы. Тогда значение z на этом узле не изменяется. Но возможен и другой вариант, когда на узел с большим положительным значением z приходит отрицательная единица. Значение z на узле уменьшается за счет аннигиляции этой единицы с положитель-

ной, находящейся на узле. Такой тип аннигиляции может реализовываться на любом узле, т. е. в процесс аннигиляции может быть вовлечена практически вся сеть.

Таким образом, мы предполагаем, что при уменьшении числа узлов, на которых происходит аннигиляция, возможно, получим степенное распределение размеров лавин. Для этого нам необходимо научиться изменять число узлов, в которых происходит аннигиляция, чему и будет посвящен следующий раздел.

5. УПРАВЛЕНИЕ ПРОЦЕССОМ АННИГИЛЯЦИИ. САМООРГАНИЗАЦИЯ КРИТИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ

Одним из методов управления числом узлов, в которых происходит аннигиляция, может быть создание асимметричной системы. Асимметризацию можно осуществить, взяв различные пороговые значения для положительных и отрицательных значений z , например, $z_c^- \gg z_c^+$. В этом случае аннигиляция будет происходить на узлах с большими отрицательными значениями z . Таким образом, предполагается, что функция распределения величин z будет иметь следующий вид:

$$P(z) = A\delta(z + z_c^-) + B\delta(z - z_c^+). \quad (9)$$

Ее график представлен на рис. 5.

Согласно нормировке функции вероятности, $A + B = 1$, а согласно свойствам нашей системы, $\langle z \rangle = 0$, поэтому мы должны получить в критическом состоянии

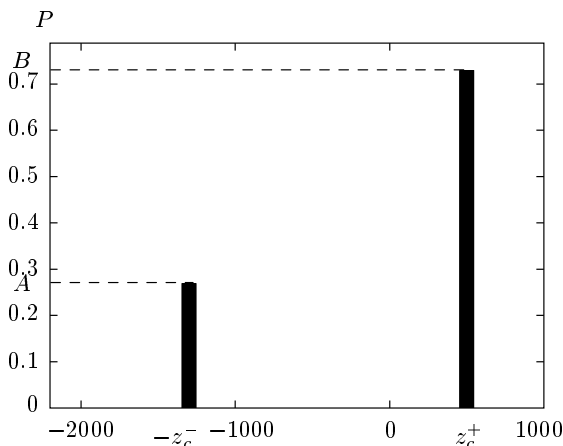


Рис. 5. Функция распределения (9)

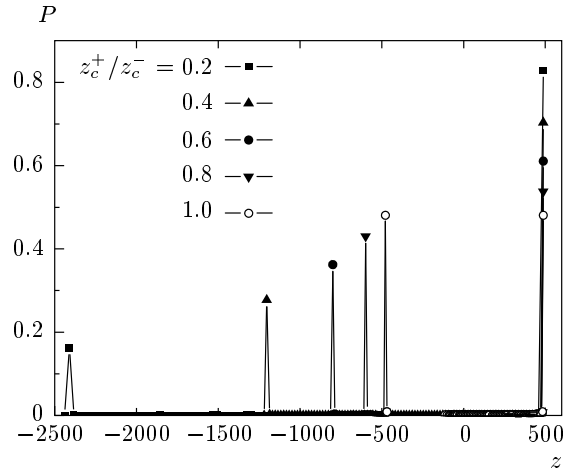


Рис. 6. Функции распределения величины z в одном из метастабильных критических состояний для различных соотношений z_c^+/z_c^- и $n_b^-/n_b^+ = z_c^+/z_c^-$. Величины пиков соотносятся между собой как $A/B = z_c^+/z_c^-$, что согласуется с проведенными расчетами

$$A = \frac{z_c^+}{z_c^+ + z_c^-}, \quad B = \frac{z_c^-}{z_c^+ + z_c^-}. \quad (10)$$

Далее мы проверим такой способ управления процессом аннигиляции. Рассмотрим систему сначала в случае, когда граница поделена на «положительную» и «отрицательную» части таким образом, чтобы выполнялось соотношение $n_b^-/n_b^+ = z_c^+/z_c^-$.

Мы рассматриваем динамику системы в прежнем режиме (см. (4)). В результате после некоторого переходного периода система, как и ранее, приходит в критическое состояние. Важным фактом является то, что полученное распределение z в этом случае подчиняется формуле (9) с величинами A и B , совпадающими с вычисленными выше (рис. 6).

Аналогичный результат получится и в случае, если мы, как и ранее, поделим границу пополам, т. е. положим $n_b^-/n_b^+ = 1$ (рис. 7).

Перейдем теперь к изучению статистики лавин в случае асимметричной системы. Размер лавины вычисляется по прежней формуле. Рассмотрим сначала случай $n_b^-/n_b^+ = z_c^+/z_c^-$.

Как видно из рис. 8, при уменьшении соотношения z_c^+/z_c^- происходит плавное увеличение характерного значения s_c и переход от экспоненциально-степенного вида функции плотности вероятности к степенному.

Для наглядности приведем два графика (рис. 9), которые иллюстрируют увеличение значения величины s_c . При $z_c^+/z_c^- = 0.4$ имеем $s_c = 0.01$, а при

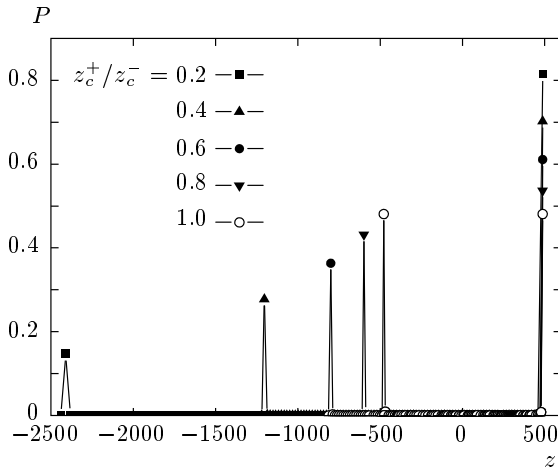


Рис. 7. То же, что на рис. 6, для случая $n_b^- / n_b^+ = 1$

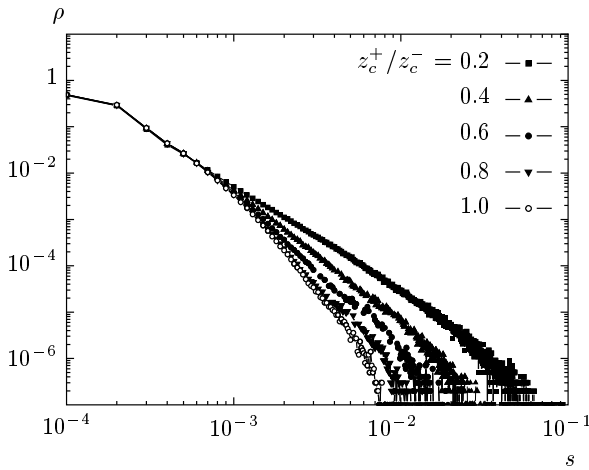


Рис. 8. Плотности вероятности размеров лавин $\rho(s)$ для системы с различными соотношениями z_c^+ / z_c^- и $n_b^- / n_b^+ = z_c^+ / z_c^-$

$z_c^+ / z_c^- = 0.2$ значение s_c уже настолько велико, что поведение плотности вероятности можно считать степенным.

Особенно четко изменения видны, если сравнить плотности вероятности размеров лавин для $z_c^+ / z_c^- = 1$ и $z_c^+ / z_c^- = 0.01$, которые представлены на рис. 10. Если для $z_c^+ / z_c^- = 1$ величина $s_c = 0.001$, то для случая $z_c^+ / z_c^- = 0.01$ плотность вероятности размеров лавин может быть описана степенной функцией вплоть до величины $s = 0.2$ (см. рис. 10).

К сожалению, при делении границы сети пополам, подобной яркой картины не возникает, а происходит лишь изменение величины характерного раз-

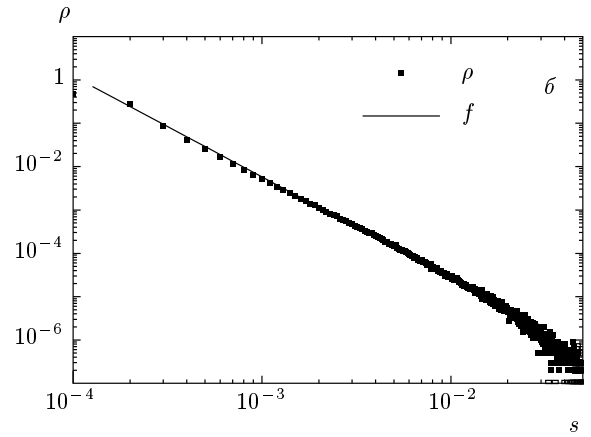
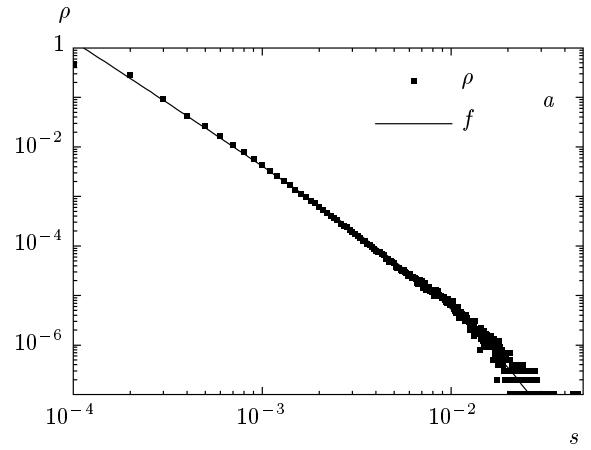


Рис. 9. Плотности вероятности размеров лавин $\rho(s)$ для случаев: а — $z_c^+ / z_c^- = 0.4$, функция $f(s) \sim s^{-2.5} \exp(-s/0.01)$ является произведением степенной и экспоненциальной функций; б — $z_c^+ / z_c^- = 0.2$, функция $f(s) \sim s^{-2.4}$ является степенной

мера лавины s_c . Функция плотности вероятности остается по-прежнему произведением степенной и экспоненциальной функций, как видно из рис. 11.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе изучена динамика закрытой системы, помещенной на безмасштабную сеть. Система представляет собой набор взаимодействующих пороговых элементов. Взаимодействие осуществляется по связям между узлами сети, а основная динамическая переменная z имеет два пороговых значения: положительное и отрицательное. Суммарное значение основной динамической переменной сохраняется в процессе эволюции системы и равно нулю. Все эти свойства унаследованы рассмотренной системой от ее физического аналога — многокон-

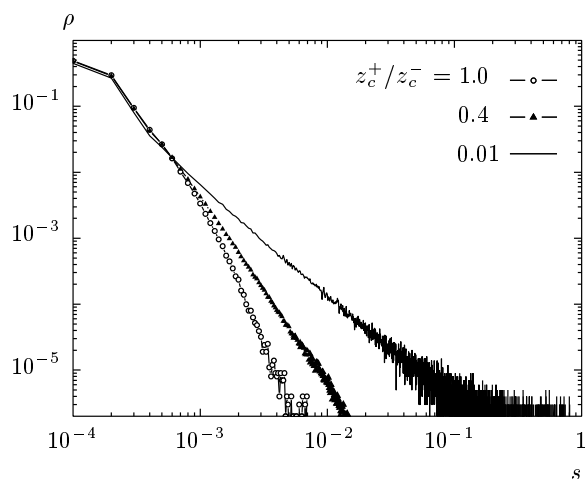


Рис. 10. Плотности вероятности размеров лавин $\rho(s)$ для предельных значений отношения z_c^+/z_c^- , которые мы рассматривали. Четко виден переход от экспоненциально-степенного распределения к степенному

тактного СКВИДа, помещенного во внешнее магнитное поле [6], которое не может индуцировать в системе ненулевой суммарный ток.

Целью работы было обнаружение в изучаемой системе самоорганизованного критического состояния. Такое состояние представляет собой набор метастабильных состояний, которые в процессе эволюции системы переходят друг в друга после очередного возмущения системы. Переход осуществляется посредством динамических процессов — лавин. Распределение размеров возникающих в системе лавин подчиняется степенному закону.

Система рассматривалась в режиме, который обычно используется для изучения систем с самоорганизованным критическим состоянием. Она подвергалась внешним воздействиям через граничные точки сети, в которых $k = m$, при этом за каждый шаг в систему добавляется нулевое суммарное значение z . Это обеспечивалось тем фактом, что n_b^+ узлов на границе сети объявлялись «положительными» и в один из них, выбранный случайно, добавлялась положительная величина z , а остальные n_b^- узлов объявлялись «отрицательными» и в один из них добавлялась такая же, но отрицательная величина z . Изменение z порождало лавину. После прохождения лавины система возбуждалась вновь и так далее. Были получены следующие неординарные результаты.

1. После переходного периода закрытая система достигала критического состояния, в котором на

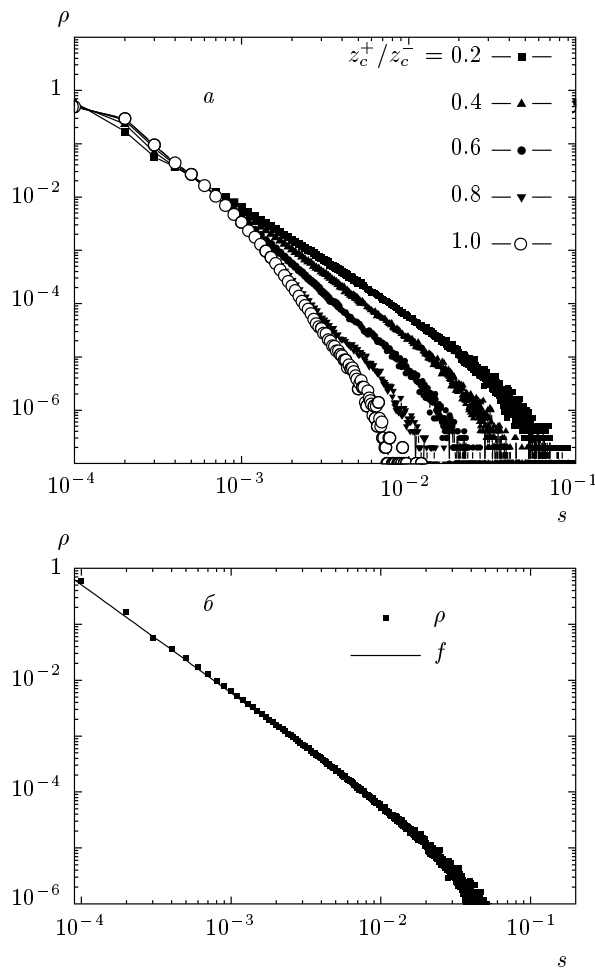


Рис. 11. Плотности вероятности размеров лавин $\rho(s)$ для систем с различными отношениями z_c^+/z_c^- и $n_b^+ = n_b^-$. На рис. б видно, что даже при $z_c^+/z_c^- = 0.2$ плотность вероятности не является степенной функцией. Функция $f(s) \sim s^{-1.9} \exp(-s/0.03)$

определенной части узлов системы основная динамическая переменная z была близка к положительному пороговому значению, а на оставшейся части — к отрицательному. Примечательным фактом является то, что благодаря нелинейности системы не происходило полной аннигиляции положительных и отрицательных величин, а образовывались группы узлов с положительными и отрицательными значениями z . Распределение положительных и отрицательных величин z зависело от соотношения значений положительного и отрицательного порогов следующим образом: $n^-/n^+ \sim z_c^+/z_c^-$, где n^\pm — количество узлов сети с положительным и отрицательным значением z .

2. В процессе эволюции система мигрировала по большому числу метастабильных критических состояний. При переходе от одного метастабильного состояния к другому значения z на узлах флуктуировали, но разрушения критического состояния не происходило.

Таким образом, в закрытой системе возникло состояние, подобное самоорганизованному. Его реализация стала возможной благодаря наличию процесса аннигиляции, который заменил процесс стока основной величины, обеспечивающий существование самоорганизованного критического состояния в открытых системах.

3. В результате изучения статистики лавин, возникающих в изучаемой системе, было установлено, что размеры возникающих лавин могут демонстрировать степенное распределение только в случае асимметричной по величине порогов ($z_c^+ \neq z_c^-$) системе. Это означает, что реализация самоорганизованного критического состояния происходит при условии, что один из порогов по абсолютному значению на порядок больше или меньше другого (например, $z_c^+ / z_c^- < 0.1$). Кроме того, количество «положительных» и «отрицательных» узлов границы также должно подчиняться соотношению $n_b^- / n_b^+ = z_c^+ / z_c^-$.

4. В случае другого разбиения границы или иных соотношений пороговых значений функция распределения размеров лавин представляет собой произведение степенной и экспоненциальной функций:

$$\rho(s) \sim s^{-\alpha} \exp(-s/s_c). \quad (11)$$

Таким образом, мы показали, что в закрытой системе на безмасштабной сети возможна реализация самоорганизованного критического состояния в его классическом определении [5].

Для дальнейшего изучения перспективным является вопрос о влиянии топологии сети на реализацию самоорганизованного критического состояния в ней.

Работа выполнена при финансовой поддержке Государственной программы «Квантовая макрофизика», Государственной программы «Сильно коррелированные электроны в полупроводниках, металлах, сверхпроводниках и магнитных материалах», Государственной программы «Нейтронная физика» и РФФИ (грант № 08-02-00314-а).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Чтобы совершить переход к дискретному времени при $V \gg 1$, введем новую переменную

$$z_i = \frac{V}{2\pi} \sin \varphi_i + \frac{\tau}{2\pi} \frac{d\varphi_i}{dt}.$$

Для нее система уравнений (3) переписется в следующем виде:

$$\begin{aligned} z_i &= z_c \sin \varphi_i + \frac{\tau}{2\pi} \frac{d\varphi_i}{dt}, \\ z_i &= \sum_j J_{ij} \frac{\varphi_j}{2\pi} - k_i \frac{\varphi_i}{2\pi} + F_i, \end{aligned} \quad (A.1)$$

где $z_c = V/2\pi$.

Заметим, что первое из уравнений системы (A.1) обладает рядом интересных свойств. В случае, когда $z_i \leq z_c$, переменная φ_i не изменяется ($d\varphi_i/dt = 0$). В случае же, когда $z_i > z_c$, если $V \gg 1$ и $|z_i - z_c| \ll z_c$, то переменная φ_i сначала медленно меняется на интервале времени $T \gg \tau$ на величину, примерно равную $1/V$, а затем делает резкий скачок за время τ . Пренебрегая малым изменением этой переменной, можно аппроксимировать ее ступенчатой функцией $\varphi_i \approx 2\pi q_i + \pi/2$, где q_i — целое число. Тогда уравнения примут вид

$$\begin{aligned} z_i &= z_c \sin \varphi_i + \frac{\tau}{2\pi} \frac{d\varphi_i}{dt}, \\ z_i &= \sum_j J_{ij} q_j - k_i q_i + F_i, \\ q_i &= \text{Int} \left(\frac{\varphi_i}{2\pi} + \frac{1}{4} \right), \end{aligned} \quad (A.2)$$

где $\text{Int}(x)$ — целая часть x .

Уравнения (A.2) проще, чем уравнения (A.1), поскольку в них переменные φ_i не взаимодействуют. Рассмотрим решение полученной упрощенной системы уравнений. Для начала проследим за эволюцией переменной φ_{i_0} на конкретном узле i_0 . Пусть начальные условия таковы, что $F_i = \text{Int}(z_c) = K < z_c$ и переменные на всех узлах

$$\varphi_0 = \arcsin \frac{2\pi K}{V} \approx \frac{\pi}{2} - \sqrt{2 \left(1 - \frac{2\pi K}{V} \right)},$$

тогда все $q_i = 0$.

Далее, пусть на выбранном нами узле i_0 величина F увеличится на единицу, т. е. $F_{i_0} = K + 1$. Тогда получим, что $z_{i_0} \rightarrow z_{i_0} + 1$, т. е. z превысило критическое значение, а значит, $d\varphi_{i_0}/dt > 0$. Теперь решение

для φ_{i_0} может быть найдено из системы (А.2). Примечательным свойством данного решения является то, что переменная φ за время

$$T = \frac{2\pi\tau}{\sqrt{2\left(\frac{K+1}{z_c} - 1\right)}} \gg \tau$$

остаётся практически постоянной, а затем резко меняется на 2π за время τ . В момент скачка происходит изменение $q_{i_0} \rightarrow q_{i_0} + 1$ и, следовательно,

$$z_{i_0} \rightarrow z_{i_0} - k_{i_0}, \quad z_{j_0} \rightarrow z_{j_0} + 1, \quad (\text{А.3})$$

где индекс j_0 обозначает все узлы, с которыми связан узел i_0 .

Перейдем теперь от одного узла ко всей сети. Имеется некоторая сложность при переходе к дискретному времени. Дело в том, что время медленного изменения переменной φ , обозначаемое T , различно для различных узлов, поскольку зависит от состояния самой переменной на данном узле и на тех, с которыми этот узел связан. Однако мы сделаем предположение, что это время одинаково для всей сети. В этом случае мы можем ввести в системе дискретное время $t_n = Tn$. Тогда для переменной z_i можно будет записать следующую систему связанных отображений:

$$\begin{aligned} z_i(n+1) - z_i(n) &= \sum_j J_{ij} \Psi(z_j(n)) - \\ &- k_i \Psi(z_i(n)) + [F_i(n+1) - F_i(n)], \\ \Psi(z_i(n)) &= \theta[z_i - z_c^+] - \theta[-z_i - z_c^-]. \end{aligned} \quad (\text{А.4})$$

Заметим, что мы ввели еще одно обобщение, а именно, в функции $\Psi(z)$ учли, что переменная z согласно определению имеет два пороговых значения: положительное и отрицательное, и переменная φ будет изменяться уже описанным путем, как при превышении положительного порога, так и в случае, если $z_i < -z_c^-$. Однако в этом случае в отображениях знак «плюс» изменится на «минус».

Правомерность введения единого времени для всех узлов сети была неоднократно доказана в случае дискретных сверхпроводников путем сравнения результатов, полученных при описании системы дифференциальными уравнениями и системой отображений, которую мы вывели с помощью редукции системы дифференциальных уравнений.

ЛИТЕРАТУРА

1. S. N. Dorogovtsev and J. F. F. Mendes, *Adv. Phys.* **51**, 1079 (2002).
2. S. N. Dorogovtsev, F. V. Goltsev, and J. F. F. Mendes, *Rev. Mod. Phys.* **80**, 1275 (2008).
3. R. Karmakar and S. S. Manna, *J. Phys. A* **38**, L78 (2005).
4. K.-L. Goh, D.-S. Lee, D. Kahng, and D. Kim, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 148701 (2003).
5. P. Bak, C. Tang, and K. Wiesenfeld, *Phys. Rev. Lett.* **59**, 381 (1987).
6. С. Л. Гинзбург, В. А. Накин, Н. Е. Савицкая, *ЖЭТФ* **130**, 862 (2006).
7. S. L. Ginzburg, A. V. Nakin, and N. E. Savitskaya, *Physica C* **436**, 7 (2006).
8. S. L. Ginzburg, M. A. Pustovoi, and N. E. Savitskaya, *Phys. Rev. E* **57**, 1319 (1998).
9. S. L. Ginzburg and N. E. Savitskaya, *Phys. Rev. E* **66**, 026128 (2002).
10. С. Л. Гинзбург, *ЖЭТФ* **106**, 607 (1994).
11. D. Dhar, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 1613 (1990).
12. A.-L. Barabasi and R. Albert, *Science* **286**, 509 (1999).
13. J. P. Sethna and C. R. Meyers, *Phys. Rev. B* **47**, 11171 (1993).
14. B. Tadić, U. Nowak, K. D. Usadel, R. Ramaswamy, and S. Padlewski, *Phys. Rev. A* **45**, 8536 (1992).