

МАГНИТНЫЕ СВОЙСТВА НАНОРАЗМЕРНЫХ РАЗБАВЛЕННЫХ МАГНИТНЫХ ПОЛУПРОВОДНИКОВ С ЗОННЫМ РАСЩЕПЛЕНИЕМ

Е. З. Мейлихов, Р. М. Фарзетдинова*

*Российский научный центр «Курчатовский институт»
123182, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 16 февраля 2009 г.

Рассмотрена континуальная модель неоднородного магнетизма тонких пленок и проволок из разбавленного магнитного полупроводника с учетом конечной степени спиновой поляризации и расщепления зоны носителей, ответственных за косвенное РККУ-взаимодействие магнитных примесей. Найдены описываемые нелинейным интегральным уравнением пространственные (по толщине пленки или вдоль радиуса проволоки) распределения намагниченности и концентраций носителей с различной спиновой ориентацией при различных температурах, а также температурная зависимость средней намагниченности.

PACS: 75.50.Pp

Косвенное взаимодействие магнитных примесей типа РККУ (Ruderman–Kittel–Kasuya–Yosida) считается одним из базовых механизмов магнитного упорядочения в системах со свободными носителями высокой концентрации (металлы и вырожденные полупроводники). Поскольку большинство потенциально интересных электронных устройств характеризуется наноразмерами, представляет интерес понять, как магнитные свойства соответствующих систем зависят от их конечных размеров [1, 2]. Типичный пример — тонкие пленки разбавленного магнитного полупроводника (например, $\text{Ga}_{1-x}\text{Mn}_x\text{As}$) толщиной порядка нескольких десятков постоянных решетки, которые и рассматриваются в настоящей работе. В таких системах подвижность носителей заряда (дырок) невелика (порядка $10 \text{ см}^2/\text{В}\cdot\text{с}$ [3]), а следовательно, мала и длина их пробега. В этих условиях столкновительное уширение уровней энергии дырок настолько велико, что система является трехмерной и нет необходимости учитывать какие-либо эффекты размерного квантования [4].

Намагниченность достаточно тонкой пленки разбавленного магнитного полупроводника (с толщиной L , сравнимой с характерной длиной ℓ косвенного взаимодействия магнитных примесей,

см. ниже) может быть существенно неоднородной, по крайней мере, в направлении, перпендикулярном плоскости пленки. Такую неоднородную намагниченность удобно характеризовать зависящей от координат приведенной локальной намагниченностью $j(\mathbf{r}) \equiv M(\mathbf{r})/M_s$ (M_s — намагниченность насыщения). Ненулевая локальная намагниченность ($0 \leq j \leq 1$) атомов Mn со спином $S_{\text{Mn}} = 5/2$ приводит к неоднородной локальной спиновой поляризации дырок, выражающейся в том, что локальная концентрация $p^-(\mathbf{r})$ дырок со спином, антипараллельным локальной намагниченности, превышает концентрацию $p^+(\mathbf{r})$ дырок с противоположным направлением спина. При этом локальная степень поляризации дырок

$$\xi(\mathbf{r}) = [p^-(\mathbf{r}) - p^+(\mathbf{r})]/p(\mathbf{r})$$

не равна нулю ($p(\mathbf{r}) = p^-(\mathbf{r}) + p^+(\mathbf{r})$ — полная локальная концентрация дырок). Формально поляризацию дырок можно связать с действующим на них эффективным спин-зависающим «магнитным» потенциалом [5]

$$V_{\text{mag}}(\mathbf{r}) = xN_0a^3J_{pd}\sigma S_{\text{Mn}}j(\mathbf{r}), \quad (1)$$

где $N_0 \approx 8 \cdot 10^{21} \text{ см}^{-3}$ — концентрация узлов Ga в решетке GaAs, x — доля таких узлов, занятая атомами Mn, a — постоянная решетки, $\sigma = \pm 1/2$ — спин

*E-mail: meilikhov@imp.kiae.ru

дырки, $J_{pd} = 1.2$ эВ — энергия обменного взаимодействия между подвижными дырками и локализованными d -электронами Mn [6]. В соответствии с формулой (1) основные (обладающие преимущественным направлением спина) дырки аккумулируются в областях с высокой намагниченностью, а неосновные, наоборот, выталкиваются в области с низкой намагниченностью.

Указанное спиновое разделение носителей в пространстве может, в принципе, сопровождаться и изменением пространственного распределения дырок, приводящим к нарушению локальной электрической нейтральности. Чтобы понять, возможно ли это в рассматриваемом случае, заметим, что при характерном смещении «центра тяжести» заряда дырок на длину δL возникает электрический потенциал, равный

$$V_{el} \sim \frac{4\pi\rho e^2}{\kappa}(\delta L)^2, \quad (2)$$

где $\kappa \sim 10$ — диэлектрическая постоянная полупроводника. Из выражений (1), (2) получаем

$$V_{el}/|V_{mag}| \sim e^2 L^2/a^3 J_{pd}.$$

Отсюда следует, что $V_{el}/|V_{mag}| \gg 1$ при $\delta L \gtrsim 10 \text{ \AA}$. Это означает, что для пленок толщиной $L \gg 10 \text{ \AA}$ нарушением электрической нейтральности можно пренебречь и считать $p(\mathbf{r}) = p^-(\mathbf{r}) + p^+(\mathbf{r}) = \text{const}$. Рассмотрением именно этого случая мы ограничимся в настоящей работе.

Пусть в отсутствие намагниченности ($j = 0$) фермиевская энергия носителей заряда равна ε_F . Появляющийся при возникновении намагниченности магнитный потенциал (1) приводит к расщеплению дырочной зоны на две спиновые подзоны с эффективными фермиевскими энергиями (отсчитываемыми от дна этих подзон) $\varepsilon_F + V_{mag}(\mathbf{r})$ и $\varepsilon_F - V_{mag}(\mathbf{r})$, которым соответствуют эффективные фермиевские импульсы

$$k_F^\pm(\mathbf{r}) = k_F \left(1 \pm \frac{V_{mag}(\mathbf{r})}{\varepsilon_F} \right)^{1/2}, \quad (3)$$

где $k_F = (2m^*\varepsilon_F/\hbar^2)^{1/2}$, $m^* \approx 0.5m_0$ — эффективная масса дырок (при $V_{mag}(\mathbf{r})/\varepsilon_F > 1$ величина $k_F^-(\mathbf{r}) = 0$).

Концентрации носителей в подзонах определяются системой простых уравнений:

$$\begin{aligned} p^-(\mathbf{r}) &\propto [\varepsilon_F + V_{mag}(\mathbf{r})]^{3/2}, \\ p^+(\mathbf{r}) &\propto [\varepsilon_F - V_{mag}(\mathbf{r})]^{3/2}, \quad p^-(\mathbf{r}) + p^+(\mathbf{r}) = p, \end{aligned} \quad (4)$$

из которых следует

$$p^-(\mathbf{r}) = \frac{p}{2} [1 + \xi(\mathbf{r})], \quad p^+(\mathbf{r}) = \frac{p}{2} [1 - \xi(\mathbf{r})], \quad (5)$$

где

$$\xi(\mathbf{r}) = \frac{u(\mathbf{r}) - 1}{u(\mathbf{r}) + 1} \quad (6)$$

— степень спиновой поляризации дырок,

$$u(\mathbf{r}) = \left\{ \frac{1 + V_{mag}(\mathbf{r})/\varepsilon_F}{1 - V_{mag}(\mathbf{r})/\varepsilon_F} \right\}^{3/2}$$

(если $V_{mag}(\mathbf{r})/\varepsilon_F > 1$, то $p^- = p$, $p^+ = 0$, $\xi = 1$).

В условиях однородной намагниченности ($j = \text{const}$) импульсы k_F^\pm не зависят от координат и выражение для энергии $w(\rho)$ РККУ-взаимодействия двух магнитных атомов, находящихся на расстоянии ρ друг от друга, с учетом спинового расщепления дырочной зоны может быть записано в виде

$$w(\rho) = -\frac{1}{2} I_0 \Phi(\rho) \exp\left(-\frac{\rho}{\ell}\right), \quad (7)$$

где [7]

$$\begin{aligned} \Phi(\rho) &= \left(\frac{a}{\rho}\right)^4 [\theta^+(\rho) \cos \theta^+(\rho) - \\ &- \sin \theta^+(\rho) + \theta^-(\rho) \cos \theta^-(\rho) - \sin \theta^-(\rho)], \end{aligned} \quad (8)$$

$$I_0 = \frac{1}{32\pi^3} \left(\frac{ma^2}{\hbar^2} J_{pd}^2 \right), \quad \theta^\pm(\rho) = 2k_F^\pm \rho. \quad (9)$$

Экспоненциальный множитель в формуле (7) учитывает конечную длину ℓ спиновой релаксации дырок [8] (в простейшем случае совпадающую с их длиной пробега).

С ростом величины магнитного потенциала (1) интенсивность взаимодействия (7) меняется. О характере этого изменения можно судить по тому, как при этом меняются значения функции $\Phi(\rho)$ для расстояний, близких к среднему расстоянию $\bar{\rho}$ между примесями. Пространственные зависимости функции $\Phi(\rho)$ при различных значениях отношения V_{mag}/ε_F приведены на рис. 1. Видно, что в диапазоне межпримесных расстояний $\bar{\rho} = 1.5a - 2a$, соответствующих концентрации примесей $x = 0.05 - 0.1$, интенсивность взаимодействия (при фиксированном значении ε_F) заметно убывает с ростом V_{mag} . Это означает, что спиновое расщепление зоны носителей должно, в конечном счете, приводить к снижению намагниченности системы.

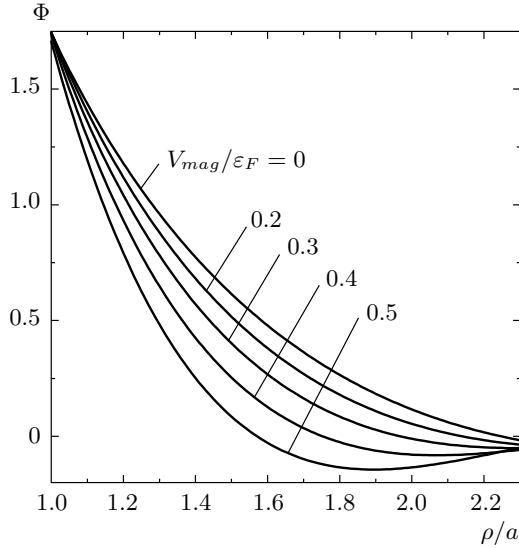


Рис. 1. Зависимости интенсивности $\Phi(\rho)$ межпримесного взаимодействия (8) при различных значениях отношения V_{mag}/ϵ_F при $k_F a = 1$

Обобщение функции (8) на случай неоднородной намагниченности осуществляется заменой фаз $\theta^\pm(\rho)$ их средними значениями

$$\theta_\pm^*(\rho) = 2 \int_0^\rho k_F^\pm(s) ds = 2k_F \int_0^\rho \sqrt{1 \pm Aj(s)} ds, \quad (10)$$

где $A = xN_0 a^3 J_{pd} \sigma S_{Mn} / \epsilon_F$, интегрирование проводится вдоль линии, соединяющей примеси. Тогда функция $\Phi(\rho)$ становится функционалом пространственно-неоднородной намагниченности:

$$\Phi(\rho) e^{-\rho/\ell} \rightarrow \hat{F}[Aj(\mathbf{r}), \rho] \equiv \left(\frac{a}{\rho}\right)^4 [\theta_+^*(\rho) \cos \theta_+^*(\rho) - \sin \theta_+^*(\rho) + \theta_-^*(\rho) \cos \theta_-^*(\rho) - \sin \theta_-^*(\rho)] e^{-\rho/\ell}. \quad (11)$$

При низкой намагниченности ($j \ll 1$) магнитный потенциал (1) также мал и выражение (11) принимает стандартный вид.

Конечная поляризация носителей существенна только в том случае, когда магнитный потенциал и фермиевская энергия дырок сравнимы друг с другом, т.е. при $Aj \sim 1$. Оценим параметр A для магнитного полупроводника $Ga_{1-x}Mn_xAs$. Благодаря компенсации, концентрация p дырок всегда меньше концентрации xN_0 атомов Mn (акцепторов), находящихся в узлах Ga. Тем не менее $p/(xN_0) \gtrsim 0.3$ при $x = 0.05$ [9]. Оценка для этого случая дает $A \gtrsim 1$. Если, кроме того, локальная намагничен-

ность в каких-то областях системы близка к насыщению ($j \sim 1$), то $Aj \sim 1$ и учет конечной поляризации носителей может быть важным.

Для проверки справедливости этого вывода мы провели расчет пространственного распределения намагниченности тонкой пленки магнитного полупроводника, в которой она (за счет анизотропии формы) везде параллельна поверхности пленки. При этом использовался подход, развитый ранее [4].

Энергия W_{RKKY} косвенного взаимодействия данного спина S_i со своим окружением определяется соотношением

$$W_{RKKY} = \sum_{j=1}^{\infty} w(\rho_{ij}).$$

Расстояние ρ_{ij} не может быть меньше расстояния r_{min} между двумя соседними узлами решетки, доступными для магнитных примесей (для разбавленного полупроводника $Ga_{1-x}Mn_xAs$ имеем $r_{min} = a/\sqrt{2}$, где $a \approx 5 \text{ \AA}$ — постоянная решетки). В континуальном приближении сумму можно заменить интегралом

$$W_{RKKY}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{2} n_\mu I_0 \int \hat{F}[Aj(\mathbf{r}'), |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|] j(\mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}', \quad (12)$$

где интегрирование проводится по объему, занятому примесями.

В отличие от бесконечной системы, величина этого интеграла зависит от конкретной геометрии системы и положения выбранной точки. Ниже рассмотрено магнитное взаимодействие в пленке толщиной L (в направлении оси z), настолько тонкой, что локальная намагниченность $j(h)$ внутри нее везде параллельна поверхности и зависит лишь от расстояния h от выбранной точки до средней плоскости пластины¹⁾. В этом случае из формулы (12) следует

$$W_{RKKY}(h) = -\pi n_\mu I_0 \times \int_{z=-L/2}^{L/2} \left(\int_{\rho_{min}(z,h)}^{\infty} \hat{F}[Aj(z), \rho] \rho d\rho \right) j(z) dz, \quad (13)$$

где

$$\rho_{min}(z, h) = \max[|h - z|, r_{min}]. \quad (14)$$

Соотношение (13), определяющее локальную энергию $W_{RKKY}(h)$ в любой точке пластины,

¹⁾ Это, означает, что мы рассматриваем системы с достаточно слабой поверхностной магнитной анизотропией [10].

нелокально: эта энергия является функционалом локальной намагниченности $j(\rho)$ и определяется всеми точками пленки.

Самосогласованное уравнение

$$j(h) = \text{th}[W_{RKKY}(h)/kT],$$

определяющее локальную намагниченность, записывается теперь следующим образом:

$$j(h) = \text{th} \left[-\frac{\pi n_\mu I_0}{kT} \int_{z=-L/2}^{L/2} \left(\int_{\rho_{\min}(z,h)}^{\infty} \hat{F}[Aj(z), \rho] \rho d\rho \right) \times \right. \\ \left. \times j(z) dz \right], \quad (15)$$

где фигурирующие в формуле (11) фазы определяются соотношениями

$$\theta_{\pm}^*(\rho, z, h) = 2k_F \times \\ \times \int_{\rho_{\min}(z,h)}^{\rho} \sqrt{1 \pm Aj \left[h - \left(\frac{\rho'}{\rho} \right) (h - z) \right]} d\rho'. \quad (16)$$

Вводя для «внутреннего» интеграла в уравнении (15) обозначение

$$-\pi n_\mu \int_{\rho_{\min}(z,h)}^{\infty} \hat{F}[Aj(z), \rho] \rho d\rho = K(z, h), \quad (17)$$

запишем это уравнение в виде

$$j(h) = \text{th} \left[\frac{1}{\tau} \int_{z=-L/2}^{L/2} K(z, h) j(z) dz \right], \quad (18)$$

где $\tau = kT/I_0$ — приведенная температура.

Нелинейное интегральное уравнение (18) определяет пространственное распределение намагниченности в рассматриваемой системе при заданной температуре. Оно отличается от рассмотренного нами ранее [4] тем, что (вследствие конечной степени поляризации носителей) само его ядро является функционалом неоднородной намагниченности. Решение полученного уравнения находилось, как и в работе [4], методом последовательных приближений.

Пространственные распределения намагниченности в пленке толщиной $L = 20a$ при различных температурах τ показаны на рис. 2. Выбранное значение $k_F a = 1$ соответствует концентрации дырок

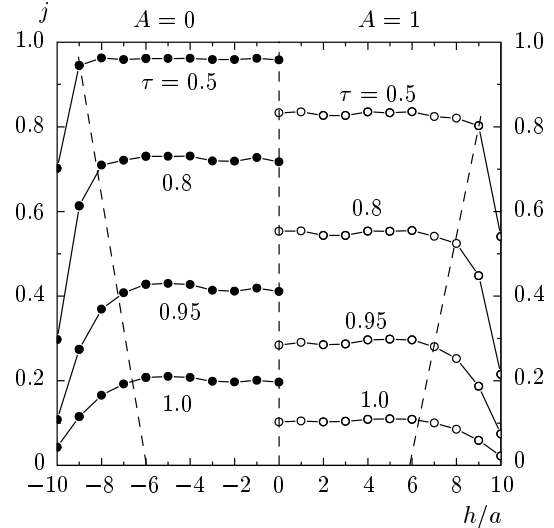


Рис. 2. Пространственные распределения локальной намагниченности в пленке толщиной $L = 20a$ при различных температурах τ с учетом ($A = 1$) и без учета ($A = 0$) расщепления зоны при $\ell = 3a$, $k_F a = 1$, $4\pi n_\mu = 1$. Области пониженной приповерхностной намагниченности обозначены штриховыми линиями

$p \approx 2 \cdot 10^{20} \text{ см}^{-3}$, характерной для $\text{Ga}_{1-x}\text{Mn}_x\text{As}$ с $x = 0.05$. Видно, что учет расщепления зоны, приводящего к конечной спиновой поляризации носителей, как и ожидалось, заметно снижает намагниченность системы. Вблизи поверхности пленки намагниченность быстро убывает, причем толщина соответствующих приповерхностных областей $\Delta h \sim \ell$ почти линейно растет с повышением температуры (см. рис. 2).

Намагниченность «толстых» пленок ($L \rightarrow \infty$) почти однородна (за исключением «тонких» приповерхностных областей, где она вдвое ниже, чем в объеме). Эффект зонного расщепления, выражаемый для этого случая отношением $j(A = 1, L \rightarrow \infty)/j(A = 0, L \rightarrow \infty)$, иллюстрируется рис. 3, где представлена его температурная зависимость. Видно, что при $\tau \gtrsim 0.2\tau_C$ эффект весьма осязателен.

Неоднородно намагниченную пленку удобно характеризовать ее средней намагниченностью

$$\langle j \rangle = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} j(z) dz. \quad (19)$$

Температурные зависимости этой величины для пленки толщиной $L = 20a$ приведены на рис. 4. Они

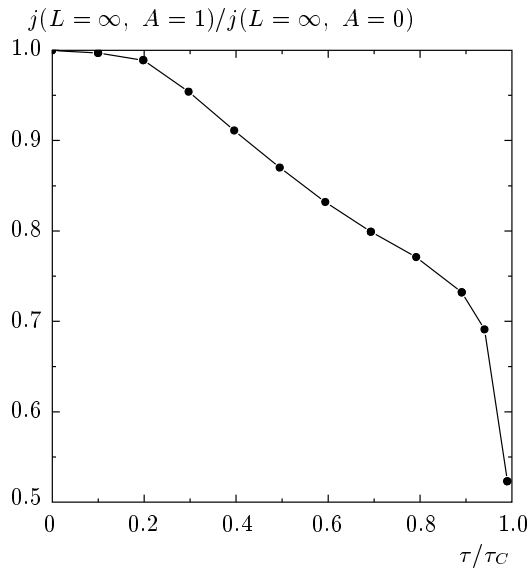


Рис. 3. Температурная зависимость эффекта расщепления зоны, приводящего к значительному снижению намагниченности «толстой» ($L \rightarrow \infty$) пленки при $\ell = 3a$, $k_F a = 1$, $4\pi n_\mu = 1$

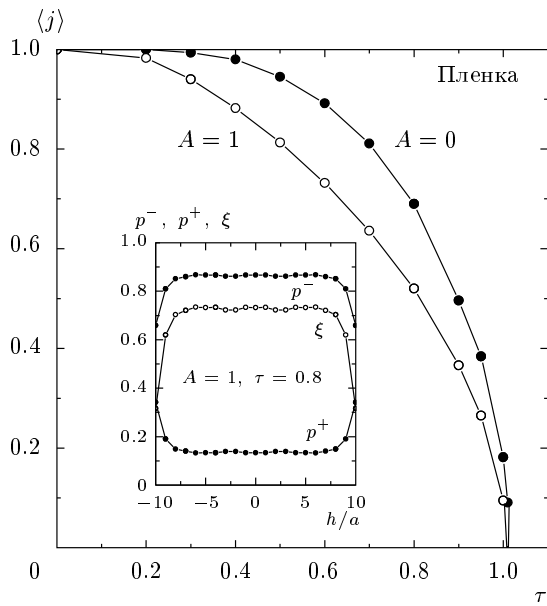


Рис. 4. Температурные зависимости средней намагниченности $\langle j \rangle$ пленки толщиной $L = 20a$ с учетом ($A = 1$) и без учета ($A = 0$) расщепления зоны. На вставке: пространственные распределения степени поляризации ξ носителей, а также концентраций основных (p^-) и неосновных (p^+) носителей при $A = 1$, $\tau = 0.8$, $\ell = 3a$, $k_F a = 1$, $4\pi n_\mu = 1$

позволяют найти температуру Кюри T_C , определяемую как температура, при которой $\langle j \rangle \rightarrow 0$. При температурах, близких к температуре Кюри, $j \rightarrow 0$ и, следовательно, учет конечной спиновой поляризации не изменяет значения T_C . Это непосредственно видно и на рис. 4, где обе зависимости $\langle j \rangle(\tau)$ (для $A = 0$ и $A = 1$) дают одно и то же значение $\tau_C \approx 1$.

В рамках рассмотренной схемы легко найти пространственные зависимости спиновой поляризации носителей, а также концентраций основных и неосновных дырок. Соответствующие зависимости, полученные с помощью соотношений (5), (6), приведены на вставке рис. 4. Из них следует, что поляризация дырок ξ в центральной части пленки существенно выше, чем на периферии. Это связано с пространственным разделением носителей различной спиновой ориентации: основные носители концентрируются вдали от поверхности пленки, а неосновные — в приграничных областях. (В этих областях возможно нарушение электрической нейтральности, поэтому полученные для них результаты следует рассматривать как качественные.)

При $T \rightarrow T_C$ уравнение (18) упрощается, превращаясь в однородное линейное интегральное уравнение:

$$j(h) = \frac{1}{\tau_C} \int_{z=-L/2}^{L/2} K(z, h) j(z) dz, \quad (20)$$

из которого следует, что температура τ_C есть не что иное как собственное значение ядра этого уравнения. В силу симметричности ядра ($K(z, h) = K(h, z)$, см. (17)) такое собственное значение всегда существует [11]. Для его определения годится любой из известных численных методов [12]. Однако практически проще найти приближенное значение τ_C описанным выше методом.

Аналогично можно рассмотреть и магнитные свойства тонкой проволоки. Обобщение соответствующего интегрального уравнения [13] для случая, когда локальная намагниченность всюду направлена вдоль оси проволоки и зависит только от расстояния h до нее, имеет вид

$$j(h) = \text{th} \left[\frac{1}{\tau} \int_0^R K(r, h) j(r) dr \right], \quad (21)$$

где R — радиус проволоки,

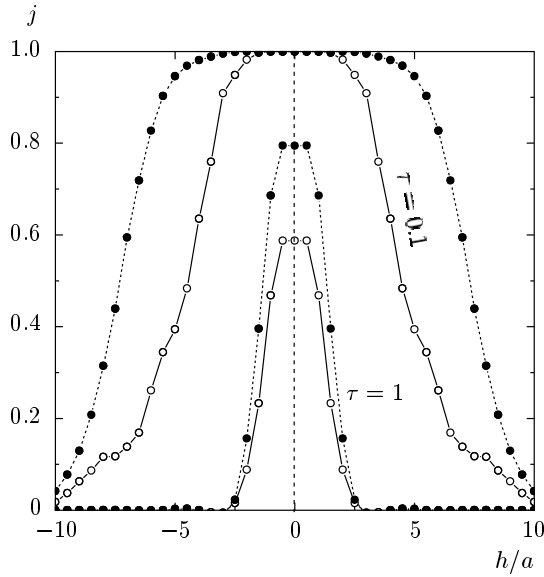


Рис. 5. Пространственные распределения локальной намагниченности в проволоке диаметром $2R = 20a$ при температурах $\tau = 1$ и $\tau = 0.1$ с учетом ($A = 1$, сплошные кривые) и без учета ($A = 0$, штриховые кривые) степени спиновой поляризации носителей при $\ell = 3a$, $k_F a = 1$, $4\pi n_\mu = 1$

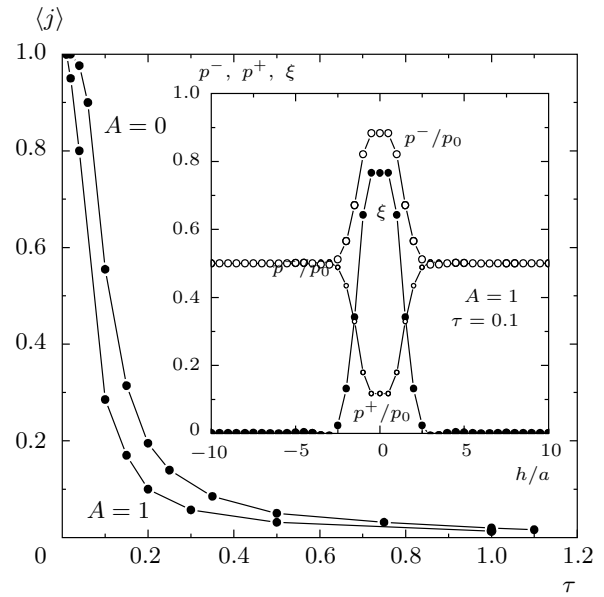


Рис. 6. Температурные зависимости средней намагниченности $\langle j \rangle$ проволоки диаметром $2R = 20a$ с учетом ($A = 1$) и без учета ($A = 0$) расщепления зоны. На вставке: пространственные распределения степени поляризации ξ носителей, а также концентраций основных (p^-) и неосновных (p^+) носителей при $A = 1$, $\tau = 1$, $\ell = 3a$, $k_F a = 1$, $4\pi n_\mu = 1$

$$K(r, h) = -n_\mu r \times \int_0^{2\pi} \left(\int_{\rho_{min}}^{\infty} \frac{\rho \hat{F}[Aj(r), \rho]}{\sqrt{\rho^2 - r^2 - h^2 + 2rh \cos \phi}} d\rho \right) d\phi, \quad (22)$$

$\rho_{min} = \rho_{min}(r, h, \phi) = \max[(r^2 + h^2 - 2rh \cos \phi)^{1/2}, r_{min}]$. Фигурирующие в формуле (11) фазы определяются в данном случае соотношениями

$$\theta_{\pm}^* = 2k_F \int_0^{\rho} \left\{ 1 \pm Aj \left[\left[h \left(1 - \frac{\rho'}{\rho} \right) - r \left(\frac{\rho'}{\rho} \right) \right]^2 + 2rh \left(\frac{\rho'}{\rho} \right) \left(1 - \frac{\rho'}{\rho} \right) (1 - \cos \phi) \right]^{1/2} \right\}^{1/2} d\rho'. \quad (23)$$

На рис. 5 приведены пространственные распределения локальной намагниченности в проволоке диаметром $2R = 20a$, где при $\tau \sim 1$ намагниченной оказывается лишь ее приосевая область. Так же, как и для пленки, расщепление зоны носителей приводит к заметному снижению намагниченности системы. Так, при $\tau \sim 0.1$ намагниченность в точках, находящихся на расстоянии $h = R/2$ от оси, уменьшается за счет этого эффекта в 2.5 раза.

Сильная неоднородность локальной намагниченности приводит к тому, что температурные зависимости средней намагниченности проволоки, представленные на рис. 6, имеют необычный вогнутый вид. На вставке к рис. 6 приведены пространственные распределения концентраций p^- , p^+ основных и неосновных (по спине) носителей, а также степени их поляризации. Из них следует, что заметная поляризация ξ дырок имеется только в приосевой области проволоки и (при $\tau = 0.1$) достигает примерно 80%.

Итак, мы рассмотрели континуальную модель неоднородного магнетизма тонких пленок и проволок из разбавленного магнитного полупроводника при конечной степени спиновой поляризации носителей, ответственных за косвенное РККУ-взаимодействие магнитных примесей. Пространственные распределения намагниченности, описываемые нелинейным интегральным уравнением, удается найти с помощью достаточно быстро сходящейся итерационной процедуры. Они оказываются существенно неоднородными и сильно зависящими от расщепления зоны носителей, осуществляющих косвенное взаимодействие между магнитными

примесями. Результаты могут быть использованы для описания свойств наноразмерных систем из разбавленных магнитных полупроводников.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 09-02-00579) и Международного научно-технического центра (грант № G-1335).

ЛИТЕРАТУРА

1. E. Z. Meilikhov and R. M. Farzetdinova, *Phys. Rev. B* **75**, 052402 (2007).
2. T. Balcerzak, *J. Magn. Magn. Mat.* **310**, 1651 (2007).
3. D. Neumaier, M. Schlapps, U. Wurstbauer, J. Sadowski, M. Reinwald, W. Wegscheider, and D. Weiss, arXiv:0711.3278v2.
4. E. Z. Meilikhov and R. M. Farzetdinova, *IEEE Trans. Mag.* **44**, 2871 (2008).
5. M. A. Boselli, I. C. da Cunha Lima, and A. Ghazali, *Phys. Rev. B* **68**, 085319 (2003).
6. F. Matsukura, H. Ohno, A. Shn, and Y. Sugawara, *Phys. Rev. B* **57**, R2037 (1998).
7. A. M. Werpachowska and Z. Wilamowski, *Mater. Sci. Poland* **24**, 675 (2006).
8. P. G. de Gennes, *J. Phys. Rad.* **23**, 630 (1962).
9. G. Bouzerar, T. Ziman, and J. Kudrnovsky, *Phys. Rev. B* **72**, 125207 (2005).
10. K. C. O'Handley and J. P. Woods, *Phys. Rev. B* **42**, 6568 (1990).
11. E. T. Whittaker and G. N. Watson, *A Course of Modern Analysis*, Part 1, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1996).
12. G. A. Korn and T. M. Korn, *Mathematical Handbook*, McGraw-Hill Co. (1968).
13. E. Z. Meilikhov and R. M. Farzetdinova, *Phys. Lett. A* **372**, 5484 (2008).