

# О ДИФФУЗИИ И КЛАСТЕРИЗАЦИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ В СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЯХ СКОРОСТЕЙ

*В. И. Кляцкин<sup>a\*</sup>, О. Г. Чхетиани<sup>a,b\*\*</sup>*

<sup>a</sup> *Институт физики атмосферы им. А. М. Обухова Российской академии наук  
109017, Москва, Россия*

<sup>b</sup> *Институт космических исследований Российской академии наук  
117810, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 10 марта 2009 г.

Получено уравнение для плотности вероятности энергии магнитного поля в случайном гауссовом, дельта-коррелированном во времени, дивергентном поле скоростей в отсутствие эффекта молекулярной диффузии. С помощью этого уравнения вычислены основные статистические характеристики энергии. На основе идей статистической топографии изучены процессы усиления магнитного поля в пространстве и, в частности, условия возникновения кластерной структуры. Эти явления являются когерентными, осуществляются с вероятностью единица и, следовательно, проявляются почти во всех отдельных реализациях процесса. Эффект кластеризации продемонстрирован на точном решении для динамики магнитного поля для простейшей модели случайного дивергентного поля скоростей.

PACS: 05.40.-a, 05.45.-a, 46.65.+g, 47.27.-i

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Диффузия таких пассивных полей, как поле плотности примеси (концентрация частиц) и магнитного поля, является одной из важных проблем теории турбулентности в магнитной гидродинамике. Исходными стохастическими уравнениями для поля плотности примеси  $\rho(\mathbf{r}, t)$  и магнитного поля  $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$  являются уравнение непрерывности

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)\right) \rho(\mathbf{r}, t) = \mu_\rho \Delta \rho(\mathbf{r}, t), \quad (1)$$

$$\rho(\mathbf{r}, 0) = \rho_0(\mathbf{r})$$

и уравнение индукции [1]

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times [\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)] + \mu_{\mathbf{H}} \Delta \mathbf{H}(\mathbf{r}, t), \quad (2)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, 0) = \mathbf{H}_0(\mathbf{r}),$$

где  $\mu_\rho$  и  $\mu_{\mathbf{H}}$  — молекулярные коэффициенты диффузии соответственно для плотности и магнитного поля. Последнее уравнение можно переписать в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)\right) \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \left(\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right) \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) + \mu_{\mathbf{H}} \Delta \mathbf{H}(\mathbf{r}, t). \quad (3)$$

Здесь  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  — поле турбулентных скоростей, которое мы считаем однородным и изотропным в пространстве и стационарным во времени, с заданными статистическими свойствами. Поле  $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$  при этом бездивергентно, т. е.  $\text{div } \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = 0$ .

Нас интересует эволюция полей в пространстве и во времени из заданных гладких начальных распределений и, в частности, просто однородных —  $\rho_0(\mathbf{r}) = \rho_0$  и  $\mathbf{H}_0(\mathbf{r}) = \mathbf{H}_0$ . Ясно, что на начальных этапах развития процесса эффекты действия молекулярной диффузии не существенны и соответствующие члены в уравнениях (1) и (2) могут быть опущены. Таким образом мы переходим к стохастическим уравнениям в частных производных первого порядка:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)\right) \rho(\mathbf{r}, t) = 0, \quad \rho(\mathbf{r}, 0) = \rho_0(\mathbf{r}), \quad (4)$$

\*E-mail: klyatskin@yandex.ru

\*\*E-mail: ochkheti@rssi.ru

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \right) \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \\ = \left( \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \mathbf{u}(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}, 0) = \mathbf{H}_0(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (5)$$

Динамические системы (4) и (5) консервативны и в процессе эволюции сохраняются как общая масса примеси  $M = \int d\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}, t)$ , так и поток магнитного поля  $\int d\mathbf{r} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ . Для однородных начальных условий следствием консервативности динамических систем (4) и (5) являются равенства

$$\langle \rho(\mathbf{r}, t) \rangle = \rho_0, \quad \langle \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \rangle = \mathbf{H}_0,$$

где через  $\langle \dots \rangle$  обозначено усреднение по ансамблю реализаций случайного поля  $\{\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)\}$ . В них происходят такие нестационарные и стохастические явления, как перемешивание и кластеризация в фазовом и физическом пространствах. Кластеризация какого-либо поля (плотности, энергии магнитного поля и т. п.) есть возникновение компактных областей повышенного содержания этого поля, окруженных областями с относительно пониженным содержанием этих полей. Время жизни кластеров ограничено. Пространственный узор их постоянно меняется. Поэтому ясно, что многочисленные попытки описать сложные динамические процессы в отдельных реализациях случайных полей  $\rho(\mathbf{r}, t)$  и  $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$  типа кластеризации в рамках вычисления «турбулентных» коэффициентов диффузии в  $\mathbf{r}$ -пространстве с помощью уравнений как для средних полей, так и для других моментных и корреляционных функций, не вполне состоятельны. При этом рост во времени таких, например, средних как  $\langle \rho^2(\mathbf{r}, t) \rangle$  и средней энергии магнитного поля  $\langle E(\mathbf{r}, t) \rangle = \langle \mathbf{H}^2(\mathbf{r}, t) \rangle$  к кластеризации этих полей никакого отношения не имеют. Стохастическое уравнение (5) интенсивно изучается в связи с проблемой мелкомасштабного динамо магнитного поля — усиления флуктуаций последнего случайными движениями среды с заданными корреляционными свойствами [2]. Здесь следует отметить работы [3–5], в которых в рамках такой кинематической постановки рассматривается эволюция двухточечной корреляционной функции флуктуаций магнитного поля. Заметим также, что решение полной системы уравнений магнитной гидродинамики с учетом действия обратного влияния поля на движение [5] демонстрирует применимость результатов кинематического подхода до области, плотно примыкающей к области режима нелинейного насыщения.

Отметим, что стохастические уравнения (1) и (2) изучались также в работах [6, 7]. Продemonстрированный экспоненциальный рост во времени средних

значений квадрата плотности  $\langle \rho^2(\mathbf{r}, t) \rangle$  и магнитной энергии  $\langle \mathbf{H}^2(\mathbf{r}, t) \rangle$  для дельта-коррелированных во времени флуктуаций поля  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  в отсутствие эффектов молекулярной диффузии отождествлялся в работах [6, 7] со свойством кластеризации. На самом деле все эти упомянутые статистические характеристики не содержат никакой информации о кластеризации, так как в одних реализациях случайных полей, если кластеризация, конечно, осуществляется, она происходит в какой-то области пространства; в других реализациях — в другой области пространства и т. д., а в среднем никакого эффекта не возникает. Рост моментных функций во времени обусловлен совсем другими причинами. Моментные функции могут расти во времени во всех точках пространства, но кластеризации при этом может и не быть.

Рассмотрим эффекты кластеризации для поля плотности. Так, для уравнения (4) можно построить простейшую статистическую модель дивергентного поля скоростей

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{v}(t) \sin(2\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}), \quad (6)$$

где  $\mathbf{v}(t)$  — гауссов случайный стационарный векторный процесс с корреляционным тензором

$$\langle v_i(t) v_j(t') \rangle = 2\sigma^2 \delta_{ij} \tau_0 \delta(t - t'),$$

$\sigma^2$  — дисперсия каждой компоненты скорости,  $\tau_0$  — ее временной радиус корреляции. Эта модель допускает аналитическое решение (см., например, работы [8, 9] и монографии [10–13]). Отметим, что такой вид поля  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  соответствует первому члену разложения гидродинамического поля скоростей по гармоническим составляющим, обычно используемому при численном моделировании задачи. Выбирая ось  $x$  в направлении вектора  $\mathbf{k}$ , видим, что эта модель соответствует зависимости поля скоростей только от одной пространственной переменной и, следовательно, поле скоростей является дивергентным. Для однородного начального условия  $\rho(\mathbf{r}, 0) = \rho_0$  поле плотности зависит только от  $x$  и для этой модели описывается формулой

$$\frac{\rho(x, t)}{\rho_0} = \left\{ e^{T(t)} \cos^2(kx) + e^{-T(t)} \sin^2(kx) \right\}^{-1}, \quad (7)$$

где

$$T(t) = 2k \int_0^t d\tau v_x(\tau) \quad (8)$$

— винеровский случайный процесс.

На рис. 1 представлен кусок реализации случайного процесса  $T(t)$ , полученный путем численного

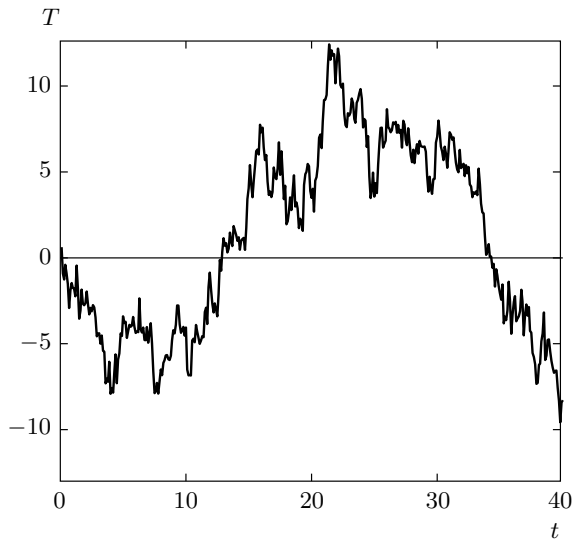


Рис. 1. Кусок реализации случайного процесса  $T(t)$

интегрирования равенства (8) для одной реализации случайного процесса  $v_x(t)$ , с помощью которого рассчитывалось поле  $\rho(x, t)$  по формуле (7).

Результаты расчета пространственно-временной эволюции реализации эйлерова поля плотности  $1 + \rho(x, t)/\rho_0$  в безразмерных переменных

$$\begin{aligned} t &\rightarrow k^2 \sigma^2 \tau_0 t, & x &\rightarrow kx, \\ \langle v_i(t)v_j(t') \rangle &\rightarrow 2\delta_{ij}\delta(t-t') \end{aligned} \quad (9)$$

представлены на рис. 2 (единица добавлена, чтобы не иметь проблем с близкими к нулю значениями плотности в логарифмическом масштабе). Из этих рисунков наглядно видно последовательное перетекание поля плотности к узким окрестностям точек  $x \approx 0$  и  $x \approx \pi/2$ , т. е. образование кластеров, где относительное значение плотности достигает значений порядка  $10^3$ – $10^4$ , а во всем остальном пространстве имеет практически нулевые значения. Отметим, что в моменты времени  $t$ , в которые  $T(t) = 0$ , реализация поля плотности проходит через начальное однородное состояние. При этом разумеется, что  $\langle \rho(x, t) \rangle = \rho_0$ , а высшие моментные функции экспоненциально растут во времени. Моментные же функции поля  $\rho^{-1}(x, t)$  также экспоненциально растут во времени в любой точке пространства, но никакой кластеризации для этого поля не осуществляется.

Проявления эффектов кластеризации магнитного поля хорошо известны. Так, весь объем плазменного шнура в стеллараторе заполнен стохастическими плазменными структурами с большими значе-

ниями полей с негауссовыми распределениями [14]. Аналогичная картина наблюдается и в плазме токамака [15]. Грануляция в солнечной фотосфере с локальными большими значениями магнитных полей, связываемая с действием турбулентных движений, представляет собой, возможно, другой пример явления кластеризации [16, 17].

Диффузия и кластеризация частиц и поля плотности в рамках динамического уравнения (4) в общем случае хорошо изучены [12]. Принципиальной особенностью такой диффузии в дивергентных гидродинамических потоках является кластеризация поля плотности (в эйлеровом описании) и в ряде случаев самих частиц (в лагранжевом описании). Это явление является когерентным, осуществляется с вероятностью единица и должно иметь место почти во всех реализациях динамики процесса. Описать это явление удастся только в  $\rho$ -пространстве, т. е. на основе одноточечной плотности вероятности поля  $\rho(\mathbf{r}, t)$ , изучая не моментные функции, а другие статистические величины, связанные с функционалами рассматриваемых случайных полей. Для магнитного поля  $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$  подобных исследований не проводилось. В данной работе мы восполняем этот пробел.

## 2. ПРОСТЕЙШАЯ МОДЕЛЬ МАГНИТНОГО ДИНАМО

Прежде всего отметим, что для модели поля скоростей вида (6) также можно получить явные выражения для магнитного поля, аналогично случаю плотности примеси. Для этой модели уравнение индукции для однородного начального условия (5) принимает вид

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial t} + v_x(t) \sin(2kx) \frac{\partial}{\partial x} \right) \mathbf{H}(x, t) = \\ = 2k \cos(2kx) [\mathbf{v}(t)H_x(x, t) - v_x(t)\mathbf{H}(x, t)], \end{aligned}$$

$$\mathbf{H}(x, 0) = \mathbf{H}_0,$$

откуда видно, что  $x$ -компонента магнитного поля сохраняется (т. е.  $H_x(x, t) = H_{x0}$ ), а в поперечной ( $yz$ ) плоскости появляется дополнительный источник (генерация) магнитного поля из-за наличия  $H_{x0}$ :

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial t} + v_x(t) \sin(2kx) \frac{\partial}{\partial x} \right) \mathbf{H}_\perp(\mathbf{r}, t) = \\ = 2k \cos(2kx) [\mathbf{v}_\perp(t)H_{x0} - v_x(t)\mathbf{H}_\perp(x, t)], \end{aligned} \quad (10)$$

$$\mathbf{H}_\perp(x, 0) = \mathbf{H}_{\perp 0}.$$

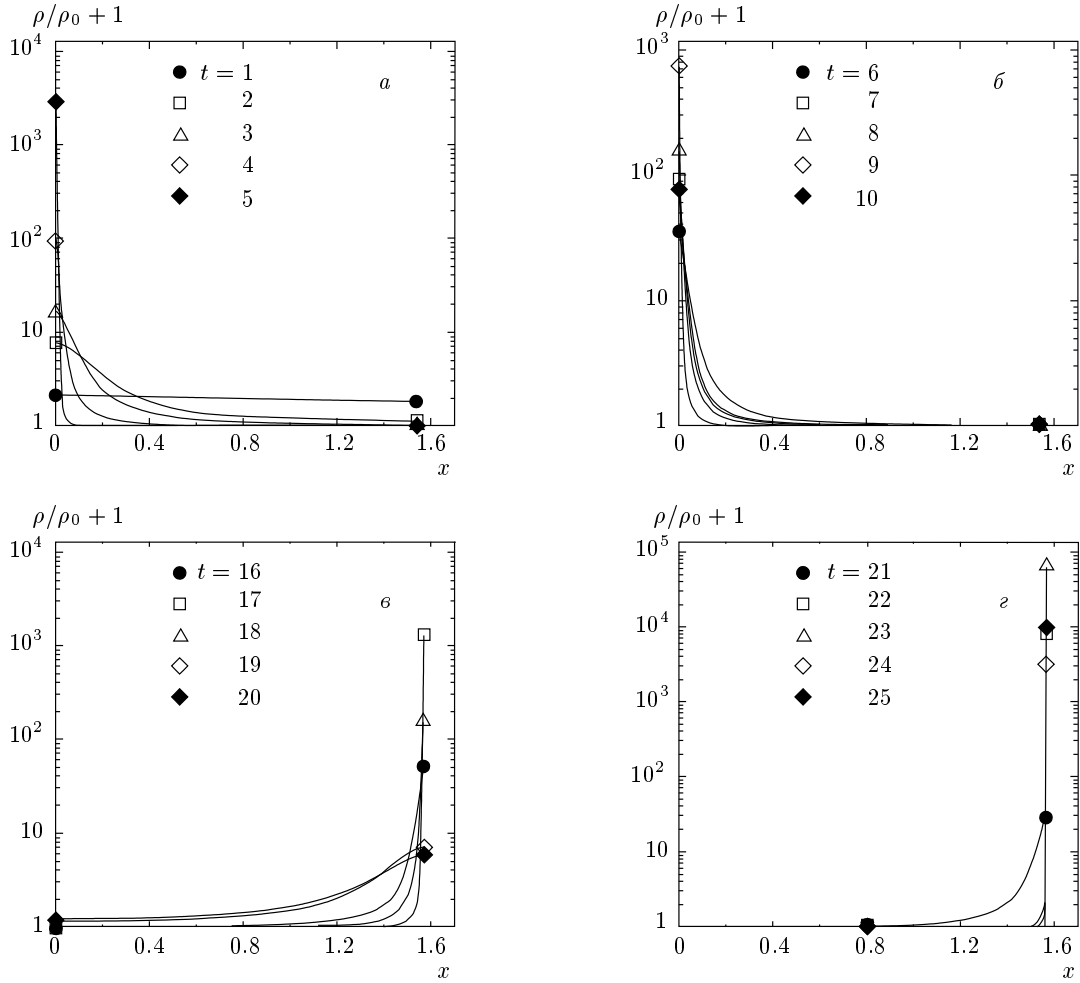


Рис. 2. Пространственно-временная эволюция эйлерового поля плотности

Уравнение (10) является уравнением в частных производных и его можно решать методом характеристик (лагранжево описание). Уравнения для характеристик имеют вид

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}x(t|x_0) &= v_x(t) \sin(2kx(t|x_0)), \\
 x(0|x_0) &= x_0, \\
 \frac{d}{dt}\mathbf{H}_\perp(t|x_0) &= \\
 &= 2k \cos(2kx|x_0) [\mathbf{v}_\perp(t)H_{x_0} - v_x(t)\mathbf{H}_\perp(t|x_0)], \\
 \mathbf{H}_\perp(0|x_0) &= \mathbf{H}_\perp 0,
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

где вертикальной чертой указана зависимость от характеристического параметра  $x_0$ .

Первое уравнение в (11) описывает диффузию частиц и его решение имеет вид

$$x(t|x_0) = \frac{1}{k} \arctg \left[ e^{T(t)} \operatorname{tg}(kx_0) \right],$$

где функция  $T(t)$  описывается формулой (8). Решение уравнения для магнитного поля имеет вид

$$\begin{aligned}
 \mathbf{H}_\perp(t|x_0) &= \left[ e^{-T(t)} \cos^2(kx_0) + e^{T(t)} \sin^2(kx_0) \right] \mathbf{H}_\perp 0 + \\
 &+ 2k \left[ e^{-T(t)} \cos^2(kx_0) + e^{T(t)} \sin^2(kx_0) \right] \times \\
 &\times \int_0^t d\tau \frac{[e^{-T(\tau)} \cos^2(kx_0) - e^{T(\tau)} \sin^2(kx_0)]}{[e^{-T(\tau)} \cos^2(kx_0) + e^{T(\tau)} \sin^2(kx_0)]^2} \times \\
 &\times v_x(\tau) \mathbf{v}_\perp(\tau) H_{x_0}.
 \end{aligned}$$

Исключая теперь характеристический параметр  $x_0$  с помощью равенств

$$\begin{aligned}
 \sin^2(kx_0) &= \frac{e^{-T(t)} \sin^2(kx(t))}{e^{T(t)} \cos^2(kx(t)) + e^{-T(t)} \sin^2(kx(t))}, \\
 \cos^2(kx_0) &= \frac{e^{T(t)} \cos^2(kx(t))}{e^{T(t)} \cos^2(kx(t)) + e^{-T(t)} \sin^2(kx(t))},
 \end{aligned}$$

переходим к эйлерову описанию (см., например, [10–12]):

$$\mathbf{H}_\perp(x, t) = \frac{\rho(x, t)}{\rho_0} \mathbf{H}_{\perp 0} + 2kH_{x0} \times \int_0^t d\tau \frac{e^{T(t)-T(\tau)} \cos^2(kx) - e^{-T(t)+T(\tau)} \sin^2(kx)}{\left[ e^{T(t)-T(\tau)} \cos^2(kx) + e^{-T(t)+T(\tau)} \sin^2(kx) \right]^2} \times v_x(\tau) \mathbf{v}_\perp(\tau), \quad (12)$$

где плотность пассивной примеси  $\rho(x, t)$  описывается равенством (7). Выполняя теперь в выражении (12) замену переменных интегрирования  $t - \tau = \lambda$ , можно переписать его в виде

$$\mathbf{H}_\perp(x, t) = \frac{\rho(x, t)}{\rho_0} \mathbf{H}_{\perp 0} + 2kH_{x0} \times \int_0^t d\lambda \frac{e^{T(t)-T(\tau)} \cos^2(kx) - e^{-T(t)+T(\tau)} \sin^2(kx)}{\left[ e^{T(t)-T(\tau)} \cos^2(kx) + e^{-T(t)+T(\tau)} \sin^2(kx) \right]^2} \times v_x(t - \lambda) \mathbf{v}_\perp(t - \lambda),$$

где

$$T(t) - T(\tau) = \int_\tau^t d\xi v_x(\xi) = \int_0^{t-\tau} d\eta v_x(t - \eta) = \int_0^\lambda d\eta v_x(t - \eta).$$

Следовательно, для одновременных статистических характеристик магнитного поля в силу стационарности поля скоростей можно заменить

$$v_x(t - \lambda) \rightarrow v_x(\lambda),$$

т. е. переписать выражение (12) в статистически эквивалентном виде:

$$\mathbf{H}_\perp(x, t) = \frac{\rho(x, t)}{\rho_0} \mathbf{H}_{\perp 0} + 2kH_{x0} \times \int_0^t d\tau \frac{e^{T(\tau)} \cos^2(kx) - e^{-T(\tau)} \sin^2(kx)}{\left[ e^{T(\tau)} \cos^2(kx) + e^{-T(\tau)} \sin^2(kx) \right]^2} \times v_x(\tau) \mathbf{v}_\perp(\tau). \quad (13)$$

Первое слагаемое описывает кластеризацию магнитного поля по типу кластеризации поля плотности, если величина  $\mathbf{H}_{\perp 0} \neq 0$ . Второе слагаемое описывает генерацию магнитного поля в поперечной ( $yz$ ) плоскости из-за наличия начального поля  $H_{x0}$ .

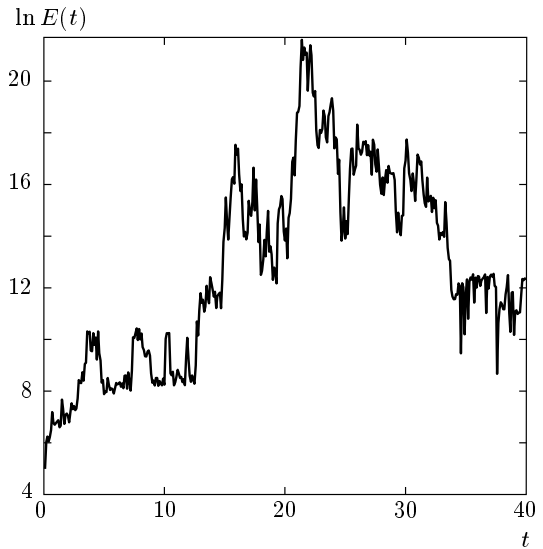


Рис. 3. Эволюция во времени полной энергии магнитного поля на отрезке  $[0, \pi/2]$

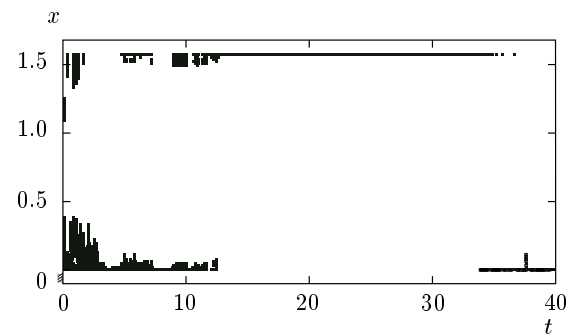


Рис. 4. Структура кластеров на плоскости  $xt$

При  $\mathbf{H}_{\perp 0} = 0$  это слагаемое, пропорциональное квадрату случайного поля скорости, определяет ситуацию. Структура этого поля подобно полю плотности также кластеризуется.

На рис. 3–5 представлены результаты расчета пространственно-временной эволюции реализации энергии генерируемого магнитного поля в поперечной плоскости  $E(x, t) = \mathbf{H}_\perp^2(x, t)$  в безразмерных переменных (9) при  $\mathbf{H}_{\perp 0} = 0$  для той же реализации случайного процесса  $T(t)$  что и ранее, представленной на рис. 1.

Прежде всего отметим, что полная энергия генерируемого магнитного поля, сосредоточенная на отрезке  $[0, \pi/2]$ , быстро растет во времени (рис. 3).

Общая пространственно-временная структура кластеризации энергии магнитного поля приведена на рис. 4. Эта структура рассчитывалась следующим образом:

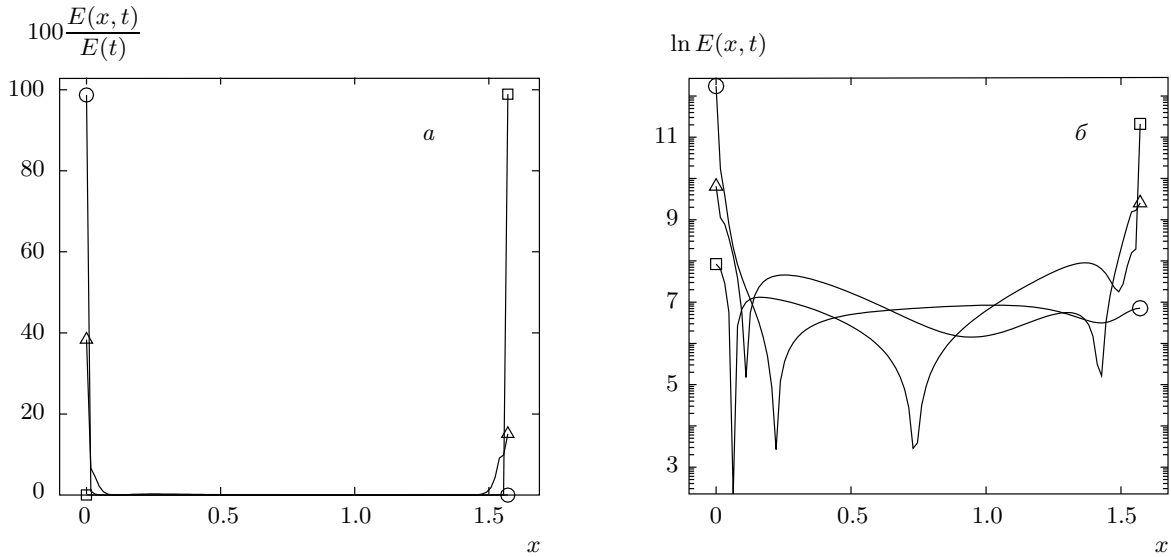


Рис. 5. Динамика исчезновения кластера в точке 0 и возникновения кластера в точке  $\pi/2$ . Символами обозначены моменты времени  $t = 10.4$  (o),  $10.8$  ( $\Delta$ ),  $11.8$  ( $\square$ )

щим образом. По оси  $x$  отложены координаты точек  $x_i$ , а по оси  $t$  отложено время (с шагом 0.1). Точки помечены белым маркером (не видны), если содержат менее 1% энергии, имеющейся во всем слое при текущем значении  $t$ , и черным квадратиком, если содержат более 1% энергии, имеющейся в данный момент времени во всем слое. Всего же имеется 40000 точек (100 шагов по  $x$  и 400 по времени).

Более детальная картина эволюции кластеров во времени представлена на рис. 5. На рис. 5а в процентном отношении приведена доля энергии генерируемого магнитного поля, содержащаяся в кластере, ко всей энергии в слое на рассматриваемый момент времени, на рис. 5б видна динамика перетекания возмущений магнитной энергии от одной границы области к другой.

Таким образом, на примере простейшей модели случайного поля, допускающей полный анализ, мы ясно видим, что происходит генерация энергии магнитного поля (магнитное динамо), которая для дивергентного поля скорости собирается в узких пространственных образованиях, т.е. происходит кластеризация.

В общем же случае, следуя идеям статистической топографии, необходимо выделить те области пространства, в которых осуществляется кластеризация энергии магнитного поля. Объем области, где  $E(\mathbf{r}, t) > E$  — заданный параметр, описывается равенством

$$V(t, E) = \int d\mathbf{r} \theta(E(\mathbf{r}, t) - E) = \int d\mathbf{r} \int_E^\infty d\tilde{E} \delta(E(\mathbf{r}, t) - \tilde{E}), \quad (14)$$

где  $\theta(z)$  — тета-функция Хевисайда, равная 1 при  $z > 1$  и 0 при  $z < 1$ , а  $\delta(z)$  — дельта-функция Дирака. При этом общая энергия магнитного поля, заключенная в этой области, описывается равенством

$$\mathcal{E}(t, E) = \int d\mathbf{r} E(\mathbf{r}, t) \theta(E(\mathbf{r}, t) - E) = \int d\mathbf{r} \int_E^\infty \tilde{E} d\tilde{E} \delta(E(\mathbf{r}, t) - \tilde{E}). \quad (15)$$

Функция  $\varphi(\mathbf{r}, t; E) = \delta(E(\mathbf{r}, t) - E)$ , фигурирующая в этих равенствах, называется индикаторной функцией энергии магнитного поля, и при этом одноточечная плотность вероятности энергии магнитного поля определяется как

$$P(\mathbf{r}, t; E) = \langle \varphi(\mathbf{r}, t; E) \rangle = \langle \delta(E(\mathbf{r}, t) - E) \rangle.$$

Если функция  $E_0(\mathbf{r})$  имеет максимальное значение  $E_{max}$ , то при значении параметра  $E > E_{max}$  в начальный момент времени имеем

$$V(0, E) = 0, \quad \mathcal{E}(0, E) = 0.$$

Далее в процессе временной эволюции возникают возмущения этих величин и средние значения их

по ансамблю реализаций случайного поля скоростей определяют условия возникновения кластеризации или ее отсутствие.

### 3. УРАВНЕНИЕ ЛИУВИЛЛЯ

Введем индикаторную функцию поля  $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) - \varphi(\mathbf{r}, t; \mathbf{H}) = \delta(\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{H})$ . Используя стандартную процедуру для уравнений в частных производных первого порядка [10–13], можно получить уравнение Лиувилля, эквивалентное исходной задаче.

Дифференцируя индикаторную функцию по времени с учетом уравнения (5) и выкалывающего свойства дельта-функции, приходим к уравнению

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \varphi(\mathbf{r}, t; \mathbf{H}) &= -\frac{\partial H_i(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \frac{\partial}{\partial H_i} \delta(\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{H}) = \\ &= -\left[ \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \frac{\partial u_i(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} - H_i(\mathbf{r}, t) \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} \right] \times \\ &\quad \times \frac{\partial}{\partial H_i} \delta(\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{H}) + \\ &\quad + \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \frac{\partial H_i(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial H_i} \delta(\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{H}) = \\ &= -\frac{\partial}{\partial H_i} \left[ \mathbf{H} \frac{\partial u_i(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} - H_i \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} \right] \varphi(\mathbf{r}, t; \mathbf{H}) + \\ &\quad + \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \frac{\partial H_i(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial H_i} \varphi(\mathbf{r}, t; \mathbf{H}), \quad (16) \end{aligned}$$

которое не замкнуто из-за последнего члена. Но учитывая, что

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \varphi(\mathbf{r}, t; \mathbf{H}) = -\frac{\partial H_i(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial H_i} \delta(\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{H})$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} -\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \varphi(\mathbf{r}, t; \mathbf{H}) &= \\ &= \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \frac{\partial H_i(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial H_i} \delta(\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{H}), \end{aligned}$$

получаем искомое замкнутое уравнение Лиувилля:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \varphi(\mathbf{r}, t; \mathbf{H}) &= \\ &= -\frac{\partial}{\partial H_i} \left[ \mathbf{H} \frac{\partial u_i(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} - H_i \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} \right] \varphi(\mathbf{r}, t; \mathbf{H}) \quad (17) \end{aligned}$$

с начальным условием

$$\varphi(\mathbf{r}, 0; \mathbf{H}) = \delta(\mathbf{H}_0(\mathbf{r}) - \mathbf{H}).$$

Решение уравнения (17) является функционалом поля скоростей  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ , т. е.

$$\varphi(\mathbf{r}, t; \mathbf{H}) = \varphi[\mathbf{r}, t; \mathbf{H}; \mathbf{u}(\tilde{\mathbf{r}}, \tau)],$$

где  $0 \leq \tau \leq t$ . Для него выполняется условие динамической причинности

$$\frac{\delta \varphi[\mathbf{r}, t; \mathbf{H}; \mathbf{u}(\tilde{\mathbf{r}}, \tau)]}{\delta u_j(\mathbf{r}', t')} = 0 \quad \text{при} \quad t' < 0 \text{ и } t' > t.$$

При этом для вариационной производной при  $t' = t - 0$  выполняется равенство

$$\frac{\delta \varphi(\mathbf{r}, t; \mathbf{H})}{\delta u_j(\mathbf{r}', t - 0)} = \widehat{L}_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t; \mathbf{H}) \varphi(\mathbf{r}, t; \mathbf{H}), \quad (18)$$

где оператор

$$\begin{aligned} \widehat{L}_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t; \mathbf{H}) &= -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial r_j} - \frac{\partial \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\partial r_l} \frac{\partial}{\partial H_j} H_l + \\ &\quad + \frac{\partial \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\partial r_j} \frac{\partial}{\partial H_l} H_l. \quad (19) \end{aligned}$$

### 4. УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ПЛОТНОСТЕЙ ВЕРОЯТНОСТЕЙ МАГНИТНОГО ПОЛЯ И ЕГО ЭНЕРГИИ

Случайная составляющая поля скоростей  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  предполагается в общем случае дивергентным ( $\text{div } \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \neq 0$ ) случайным гауссовым полем с корреляционным и спектральным тензорами ( $\langle \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \rangle = 0$ )

$$\begin{aligned} B_{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') &= \langle u_i(\mathbf{r}, t) u_j(\mathbf{r}', t') \rangle = \\ &= \int d\mathbf{k} E_{ij}(\mathbf{k}, t - t') e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}, \quad (20) \\ E_{ij}(\mathbf{k}, t) &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int d\mathbf{r} B_{ij}(\mathbf{r}, t) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}, \\ E_{ij}(\mathbf{k}, t) &= E_{ij}^s(\mathbf{k}, t) + E_{ij}^p(\mathbf{k}, t), \end{aligned}$$

где  $d$  — размерность пространства, а спектральные составляющие тензора поля скоростей имеют структуру

$$\begin{aligned} E_{ij}^s(\mathbf{k}, t) &= E^s(k, t) \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right), \quad (21) \\ E_{ij}^p(\mathbf{k}, t) &= E^p(k, t) \frac{k_i k_j}{k^2}. \end{aligned}$$

Здесь через  $E^s(k, t)$  и  $E^p(k, t)$  обозначены соответственно соленоидальная и потенциальная компоненты спектральной плотности поля скоростей. Дополнительно будем считать поле  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  дельта-коррелированным во времени случайным полем. Условием применимости такого приближения является следующее:

$$\sigma_{\mathbf{u}}^2 \tau_0^2 / l_0^2 \ll 1, \quad \tau_0 \ll t,$$

где  $\sigma_{\mathbf{u}}^2 = \langle u^2(\mathbf{r}, t) \rangle$  — дисперсия поля скоростей, а  $\tau_0$  и  $l_0$  — его временной и пространственный радиусы корреляции. Ясно, что основные (принципиальные) особенности диффузии не зависят от выбора модели среды. Это приближение соответствует аппроксимации корреляционной функции поля скоростей выражением  $B_{ij}(\mathbf{r}, \tau) = 2B_{ij}^{eff}(\mathbf{r})\delta(\tau)$ , где

$$B_{ij}^{eff}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau B_{ij}(\mathbf{r}, \tau) = \int_0^{\infty} d\tau B_{ij}(\mathbf{r}, \tau).$$

Одноточечная плотность вероятности магнитного поля определяется равенством

$$P(\mathbf{r}, t; \mathbf{H}) = \langle \varphi(\mathbf{r}, t; \mathbf{H}) \rangle_{\mathbf{u}}.$$

Усредним уравнение (17) по ансамблю реализаций поля  $\{\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)\}$ . Для расщепления возникающих корреляций воспользуемся формулой Фурутцу–Новикова, которая для рассматриваемого случая имеет вид

$$\begin{aligned} \langle u_i(\mathbf{r}, t) \varphi[\mathbf{r}, t; \mathbf{H}; \mathbf{u}(\tilde{\mathbf{r}}, \tau)] \rangle &= \\ &= \int d\mathbf{r}' B_{ik}^{eff}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \left\langle \frac{\delta \varphi[\mathbf{r}, t; \mathbf{H}; \mathbf{u}(\tilde{\mathbf{r}}, \tau)]}{\delta u_k(\mathbf{r}', t - 0)} \right\rangle. \end{aligned} \quad (22)$$

Учитывая при этом равенства (18) и (19), а также выражения

$$\begin{aligned} B_{ij}^{eff}(0) &= D_0 \delta_{ij}, \quad \frac{\partial}{\partial r_k} B_{ij}^{eff}(0) = 0, \\ - \frac{\partial^2 B_{ij}^{eff}(0)}{\partial r_k \partial r_l} &= \\ &= \frac{D^s}{d(d+2)} [(d+1)\delta_{kl}\delta_{ij} - \delta_{ki}\delta_{lj} - \delta_{kj}\delta_{li}] + \\ &+ \frac{D^p}{d(d+2)} [\delta_{kl}\delta_{ij} + \delta_{ki}\delta_{lj} + \delta_{kj}\delta_{li}], \end{aligned}$$

где параметры

$$D_0 = \frac{1}{d} \int_0^{\infty} d\tau \langle \mathbf{u}(\mathbf{r}, t + \tau) \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \rangle,$$

$$\begin{aligned} D^s &= \int_0^{\infty} d\tau \int d\mathbf{k} k^2 E^s(k, \tau) = \\ &= \frac{1}{d-1} \int_0^{\infty} d\tau \langle \boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}, t + \tau) \boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}, t) \rangle, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D^p &= \int_0^{\infty} d\tau \int d\mathbf{k} k^2 E^p(k, \tau) = \\ &= \int_0^{\infty} d\tau \left\langle \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{r}, t + \tau)}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} \right\rangle, \end{aligned}$$

а  $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  — вихрь поля скорости, получаем искомое уравнение

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial t} - D_0 \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}^2} \right) P(\mathbf{r}, t; \mathbf{H}) &= \\ &= \left\{ \frac{(d^2 - 2) D^p - 2D^s}{d(d+2)} \frac{\partial}{\partial H_l} \frac{\partial}{\partial H_k} H_l H_k + \right. \\ &+ \left. \frac{(d+1)D^s + D^p}{d(d+2)} \frac{\partial}{\partial H_l} \frac{\partial}{\partial H_l} H_k^2 \right\} P(\mathbf{r}, t; \mathbf{H}). \end{aligned} \quad (23)$$

Введем теперь индикаторную функцию энергии магнитного поля  $E(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}^2(\mathbf{r}, t)$ :

$$\varphi(\mathbf{r}, t; E) = \delta(E(\mathbf{r}, t) - E),$$

через которую плотность вероятности  $P(\mathbf{r}, t; E)$  определяется равенством

$$P(\mathbf{r}, t; E) = \langle \delta(E(\mathbf{r}, t) - E) \rangle_{\mathbf{u}} = \langle \delta(\mathbf{H}^2(\mathbf{r}, t) - E) \rangle_{\mathbf{H}}.$$

Для получения уравнения для этой функции следует домножить уравнение (23) на функцию  $\delta(\mathbf{H}^2 - E)$  и проинтегрировать по  $\mathbf{H}$ . В результате получаем уравнение

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial t} - D_0 \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}^2} \right) P(\mathbf{r}, t; E) &= \\ &= \left\{ \alpha \frac{\partial}{\partial E} E + D \frac{\partial}{\partial E} E \frac{\partial}{\partial E} E \right\} P(\mathbf{r}, t; E), \end{aligned} \quad (24)$$

$$P(\mathbf{r}, 0; E) = \delta(E - E_0(\mathbf{r})),$$

где коэффициенты диффузии

$$\alpha = 2 \frac{d-1}{d+2} (D^p - D^s), \quad D = 4(d-1) \frac{(d+1)D^p + D^s}{d(d+2)}.$$

При этом параметр  $\alpha$  может быть как положительным, так и отрицательным. Изменения знака  $\alpha$  для одноточечных характеристик означает переход от  $E$  к  $1/E$ .

Решение этого уравнения имеет вид

$$P(\mathbf{r}, t; E) = \exp \left\{ D_0 t \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}^2} \right\} \tilde{P}(\mathbf{r}, t; E),$$

где функция  $\tilde{P}(\mathbf{r}, t; E)$  описывается уравнением

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{P}(\mathbf{r}, t; E) = \left\{ \alpha \frac{\partial}{\partial E} E + D \frac{\partial}{\partial E} E \frac{\partial}{\partial E} E \right\} \tilde{P}(\mathbf{r}, t; E),$$



$$\tilde{P}(\mathbf{r}, 0; E) = \delta(E - E_0(\mathbf{r})).$$

При этом зависимость функции  $\tilde{P}(\mathbf{r}, t; E)$  от параметра  $\mathbf{r}$  проявляется только через начальное значение  $E_0(\mathbf{r})$ , т. е.

$$\tilde{P}(\mathbf{r}, t; E) \equiv \tilde{P}(t; E|E_0(\mathbf{r}))$$

и, следовательно, функция  $\tilde{P}(t; E|E_0(\mathbf{r}))$  является логнормальной плотностью вероятности случайного процесса  $E(t, |E_0(\mathbf{r}))$ , параметрически зависящего от  $\mathbf{r}$ ,

$$\tilde{P}(t; E|E_0(\mathbf{r})) = \frac{1}{2E\sqrt{\pi Dt}} \exp \frac{\ln^2 [Ee^{\alpha t}/E_0(\mathbf{r})]}{4Dt}. \quad (25)$$

Таким образом, решение уравнения (24) имеет вид

$$P(\mathbf{r}, t; E) = \frac{1}{2E\sqrt{\pi Dt}} \exp \left\{ D_0 t \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}^2} \right\} \times \exp \frac{\ln^2 [Ee^{\alpha t}/E_0(\mathbf{r})]}{4Dt}. \quad (26)$$

Для пространственно-однородного начального распределения энергии  $E_0(\mathbf{r}) = E_0$  плотность вероятности (26) не зависит от  $\mathbf{r}$  и описывается формулой

$$P(t; E) = \frac{1}{2E\sqrt{\pi Dt}} \exp \frac{\ln^2 [Ee^{\alpha t}/E_0]}{4Dt}. \quad (27)$$

Таким образом, в этом случае одноточечные статистические характеристики энергии магнитного поля  $E(\mathbf{r}, t)$  статистически эквивалентны статистическим характеристикам случайного процесса

$$E(t; \alpha) = \exp \left\{ -\alpha t + \int_0^t d\tau \xi(\tau) \right\},$$

где  $\xi(t)$  — гауссов процесс белого шума с параметрами

$$\langle \xi(t) \rangle = 0, \quad \langle \xi(t)\xi(t') \rangle = 2D\delta(t - t').$$

Он описывается стохастическим уравнением

$$\frac{d}{dt} E(t; \alpha) = \{-\alpha + \xi(t)\} E(t; \alpha), \quad E(0; \alpha) = E_0,$$

и его одновременная плотность вероятности  $P(t; E, \alpha)$  описывается уравнением Фоккера–Планка:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P(t; E) &= \\ &= \left( \alpha \frac{\partial}{\partial E} E + D \frac{\partial}{\partial E} E \frac{\partial}{\partial E} E \right) P(t; E), \quad (28) \\ P(0; E) &= \delta(E - E_0), \end{aligned}$$

решение которого дается формулой (27).

Характерной особенностью распределения (27) является появление длинного пологого хвоста при  $Dt \gg 1$ , означающего усиление роли больших выбросов процесса  $E(t; \alpha)$  в формировании одновременной статистики. Для этого распределения все моменты энергии магнитного поля экспоненциально растут со временем:

$$\langle E^n(t) \rangle = E_0^n \exp \left\{ -2n \frac{d-1}{d+2} (D^p - D^s) t + 4n^2(d-1) \frac{(d+1)D^p + D^s}{d(d+2)} t \right\},$$

и, в частности, при  $n = 1$

$$\langle E(t) \rangle = E_0 e^{\gamma t}, \quad \gamma = D - \alpha = \frac{2(d-1)}{d} (D^p + D^s),$$

а величина

$$\left\langle \ln \frac{E(t)}{E_0} \right\rangle = -\alpha t = -2 \frac{d-1}{d+2} (D^p - D^s) t$$

и, следовательно, параметр  $\{-\alpha\}$ , является ляпуновским характеристическим показателем [18]. При этом кривая типичной реализации (КТР) (см. Приложение) для случайного процесса  $E(t)$ , определяющая поведение энергии магнитного поля в конкретных реализациях, в любой фиксированной точке пространства является экспоненциальной величиной

$$E^*(t) = E_0 e^{-\alpha t} = E_0 \exp \left\{ -2 \frac{d-1}{d+2} (D^p - D^s) t \right\},$$

растущей или затухающей во времени. Так, при  $\alpha < 0$  ( $D^p < D^s$ ) КТР экспоненциально растет во времени, что свидетельствует об общем росте магнитной энергии в каждой точке пространства. В другом случае при  $\alpha > 0$  ( $D^p > D^s$ ) КТР экспоненциально уменьшается в каждой точке пространства, что свидетельствует о кластерной структуре магнитного поля, и рост моментов энергии магнитного поля в этом случае определяется редкими, но большими выбросами энергии относительно КТР, характерными для логнормальных процессов. На рис. 6 схематически изображены реализации энергии магнитного поля в случайном поле скоростей для разных знаков параметра  $\alpha$ .

## 5. СТАТИСТИЧЕСКАЯ ТОПОГРАФИЯ ЭНЕРГИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Индикаторная функция энергии магнитного поля, как указывалось в разд. 2, позволяет получить

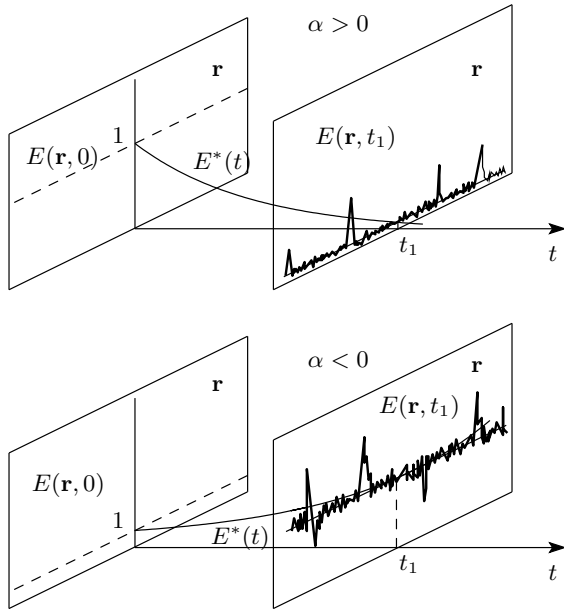


Рис. 6. Схематическое поведение реализации энергии магнитного поля в случайном поле скоростей для различных значений параметра  $\alpha$

и общую информацию о пространственной структуре поля энергии. В частности, такие функционалы энергии магнитного поля, как общая величина объема (в трехмерном случае) или площади (в двумерном случае) области, где  $E(\mathbf{r}, t) > E$ ,

$$V(t, E) = \int d\mathbf{r} \theta(E(\mathbf{r}, t) - E) = \int d\mathbf{r} \int_E^\infty d\tilde{E} \delta(E(\mathbf{r}, t) - \tilde{E})$$

и общая энергия магнитного поля, заключенная в этой области,

$$\mathcal{E}(t, E) = \int d\mathbf{r} E(\mathbf{r}, t) \theta(E(\mathbf{r}, t) - E) = \int d\mathbf{r} \int_E^\infty \tilde{E} d\tilde{E} \delta(E(\mathbf{r}, t) - \tilde{E}),$$

средние значения которых определяются одноточечной плотностью вероятности (26), описываются в общем случае равенствами

$$\langle V(t, E) \rangle = \int_E^\infty d\tilde{E} \int d\mathbf{r} P(\mathbf{r}, t; \tilde{E}),$$

$$\langle \mathcal{E}(t, E) \rangle = \int_E^\infty \tilde{E} d\tilde{E} \int d\mathbf{r} P(\mathbf{r}, t; \tilde{E}).$$

Средние значения этих функционалов не зависят от диффузии в  $\mathbf{r}$ -пространстве (от коэффициента  $D_0$ ) и для распределения вероятности (26) получаем выражения

$$\langle V(t, E) \rangle = \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}} \int d\mathbf{r} \int_E^\infty \frac{d\tilde{E}}{\tilde{E}} \exp \frac{\ln^2 [\tilde{E} e^{\alpha t} / E_0(\mathbf{r})]}{4Dt},$$

$$\langle \mathcal{E}(t, E) \rangle = \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}} \int d\mathbf{r} \int_E^\infty d\tilde{E} \exp \frac{\ln^2 [\tilde{E} e^{\alpha t} / E_0(\mathbf{r})]}{4Dt}.$$

После замены переменных эти выражения можно переписать в виде

$$\langle V(t, E) \rangle = \int d\mathbf{r} Q \left( \frac{1}{\sqrt{2Dt}} \ln \left( \frac{E}{E_0(\mathbf{r})} e^{\alpha t} \right) \right),$$

$$\langle \mathcal{E}(t, E) \rangle = e^{\gamma t} \int d\mathbf{r} E_0(\mathbf{r}) Q \left( \frac{1}{\sqrt{2Dt}} \ln \left( \frac{E}{E_0(\mathbf{r})} e^{(\alpha - 2D)t} \right) \right),$$

где функция

$$Q(z) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_z^\infty dy \exp \left\{ -\frac{y^2}{2} \right\} & \text{при } z > 0, \\ 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{|z|}^\infty dy \exp \left\{ -\frac{y^2}{2} \right\} & \text{при } z < 0. \end{cases}$$

Учитывая теперь асимптотики функции  $Q(z)$  при  $z \rightarrow \infty$  и  $z \rightarrow -\infty$

$$Q(z)_{z \rightarrow \infty} \approx \frac{1}{z\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{z^2}{2} \right\},$$

$$Q(z)_{z \rightarrow -\infty} \approx 1 - \frac{1}{|z|\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{z^2}{2} \right\},$$

можно изучить эволюцию во времени этих функционалов. А именно, для асимптотики среднего объема при  $t \rightarrow \infty$  (при  $\alpha > 0$ )

$$\langle V(t, E) \rangle \approx \frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{D}{\pi E^{\alpha/D} t}} \exp \left\{ -\frac{\alpha^2 t}{4D} \right\} \int d\mathbf{r} \sqrt{E_0^{\alpha/D}(\mathbf{r})}.$$

В случае  $\alpha < 0$  средний объем при  $t \rightarrow \infty$  занимает все пространство.

Для полной энергии получаем асимптотику при  $t \rightarrow \infty$  (так как  $\alpha < 2D$ )

$$\langle \mathcal{E}(t, E) \rangle \approx e^{\gamma t} \int d\mathbf{r} E_0(\mathbf{r}) \times \left[ 1 - \frac{1}{2D - \alpha} \sqrt{\frac{D}{\pi t}} \left( \frac{E}{E_0(\mathbf{r})} \right)^{(2D - \alpha)/2D} \times \exp \left\{ -\frac{(2D - \alpha)^2 t}{4} \right\} \right].$$

Соответствующие выражения для однородных начальных условий без интегрирования по  $\mathbf{r}$  описывают удельные значения объема больших выбросов и их общей энергии, приходящиеся на единицу объема, т. е.

$$\langle \mathfrak{B}(t, E) \rangle = Q \left( \frac{1}{\sqrt{2Dt}} \ln \left( \frac{E}{E_0} e^{\alpha t} \right) \right),$$

$$\langle \mathfrak{E}(t, E) \rangle = E_0 e^{\gamma t} Q \left( \frac{1}{\sqrt{2Dt}} \ln \left( \frac{E}{E_0} e^{(\alpha - 2D)t} \right) \right).$$

Если выбрать уровень сечения  $E > E_0$ , то в начальный момент времени величины  $\langle \mathfrak{B}(0, E) \rangle = 0$  и  $\langle \mathfrak{E}(0, E) \rangle = 0$ . Далее возникают пространственные возмущения энергии магнитного поля и при  $t \rightarrow \infty$  для этих величин получаем асимптотические выражения

$$\langle \mathfrak{B}(t, E) \rangle \approx \begin{cases} \frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{D}{\pi t}} \left( \frac{E_0}{E} \right)^{\alpha/D} \exp \left\{ -\frac{\alpha^2 t}{4D} \right\}, & \alpha > 0, \\ 1 - \frac{1}{|\alpha|} \sqrt{\frac{D}{\pi t}} \left( \frac{E}{E_0} \right)^{|\alpha|/D} \exp \left\{ -|\alpha|^2 t / 4D \right\}, & \alpha < 0, \end{cases}$$

и, так как  $2D - \alpha > 0$ , то

$$\langle \mathfrak{E}(t, E) \rangle \approx E_0 e^{\gamma t} \times \left[ 1 - \frac{1}{(2D - \alpha)} \sqrt{\frac{D}{\pi t}} \left( \frac{E}{E_0} \right)^{(2D - \alpha)/D} \times \exp \left\{ -\frac{(2D - \alpha)^2 t}{4D} \right\} \right].$$

Таким образом, при  $\alpha > 0$  ( $D^p > D^s$ ) удельный общий объем стремится к нулю, а удельная общая энергия растет со временем так же, как средняя энергия, и это свидетельствует о кластеризации

магнитного поля. Заметим, что в специально рассмотренном случае акустической турбулентности [4, 7] при определенных предположениях был продемонстрирован лишь рост двухточечной корреляционной функции, связываемый авторами с явлениями мелкомасштабного динамо.

В случае, когда  $\alpha < 0$  ( $D^p < D^s$ ) кластеризации нет и удельный объем занимает все пространство, в котором удельная энергия растет во времени так же, как и средняя энергия. Здесь мы попадаем в уже упомянутую область действия механизмов генерации мелкомасштабных магнитных полей [2, 3, 5].

Отметим, что для поля плотности, описываемого уравнением (4), уравнение для плотности вероятности  $P(\mathbf{r}, t; \rho)$  совпадает с уравнением (24) для значений параметров  $\alpha = D = D^p$ , т. е. имеет вид

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} - D_0 \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}^2} \right) P(\mathbf{r}, t; \rho) = D^p \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \rho^2 P(\mathbf{r}, t; \rho)$$

с начальным условием

$$P(\mathbf{r}, 0; \rho) = \delta(\rho_0(\mathbf{r}) - \rho).$$

В этом случае всегда осуществляется кластеризация при  $D^p \neq 0$ , так как в этом случае при  $\tau = D^p t \gg 1$  средний объем (площадь) областей, где плотность выше заданного уровня  $\rho$ , убывает со временем по закону

$$\langle V(t, \rho) \rangle \approx \frac{1}{\sqrt{\pi \tau \rho}} e^{-\tau/4} \int d\mathbf{r} \sqrt{\rho_0(\mathbf{r})},$$

в то время как заключенная в этих областях средняя масса примеси

$$\langle M(t, \rho) \rangle \approx M - \sqrt{\frac{\rho}{\pi \tau}} e^{-\tau/4} \int d\mathbf{r} \sqrt{\rho_0(\mathbf{r})} \quad (29)$$

монотонно стремится к полной ее массе  $M = \int d\mathbf{r} \rho_0(\mathbf{r})$ .

Соответственно для однородных начальных условий имеем асимптотические выражения для удельных значений:

$$\langle \mathfrak{B}(t, \rho) \rangle \approx \sqrt{\frac{\rho_0}{\pi \tau \rho}} e^{-\tau/4},$$

$$\langle \mathfrak{M}(t, \rho) \rangle / \rho_0 \approx 1 - \sqrt{\frac{\rho}{\pi \tau \rho_0}} e^{-\tau/4}.$$

## 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы рассмотрели общие тенденции эволюции во времени структуры энергии магнитного поля — рост

энергии во всем пространстве при превалировании соленоидальной составляющей в поле турбулентных пульсаций скорости  $\alpha < 0$  ( $D^p < D^s$ ) и кластеризацию магнитного поля при превалировании потенциальной составляющей в поле турбулентных пульсаций скорости  $\alpha > 0$  ( $D^p > D^s$ ) в случае произвольной размерности пространства и, в частности, для трехмерного пространства, где параметр  $d = 3$ . Например, кластеризация будет всегда происходить в поле акустической турбулентности. Заметим, что кластеризация поля плотности в случайных волновых полях рассматривалась в работе [19] (см. также [12, 13]). Важно отметить также, что динамическое явление стохастического структурообразования происходит уже на кинематической линейной стадии.

Для случая двумерного пространства  $\mathbf{R}$  ( $\mathbf{r} = \{\mathbf{R}, z\}$ ) ( $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \equiv \mathbf{u}(\mathbf{R}, t)$ ), как хорошо известно, составляющая  $H_{\parallel}(\mathbf{R}, t)$  магнитного поля по оси  $z$  описывается уравнением, тождественным уравнению для пассивного скаляра (1). Следовательно, для него всегда осуществляется кластеризация при  $D^p \neq 0$ . Дополнительно отметим, что эффективная потенциальная составляющая всегда присутствует для движений геострофического масштаба, в частности, инерционных волн и волн Россби. Для магнитного же поля в плоскости  $\mathbf{R}-\mathbf{H}_{\perp}(\mathbf{R}, t)$  все полученные результаты остаются в силе с учетом того, что в этом случае параметр  $d = 2$ .

Отдельно отметим, что при экспоненциальном росте магнитной энергии  $E$  во всем пространстве (мелкомасштабном динамо) происходит кластеризация обратной величины  $1/E$ , т.е. появляются кластеры компактных областей с вытесненным магнитным полем (магнитных нулей).

Авторы признательны К. В. Кошелю, выполнившему численное моделирование генерируемой энергии магнитного поля на основе модели (13).

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты №№ 07-05-0006, 08-02-00201, 07-05-92210-НЦНИЛ) и Программы ГК № 3/ГФ/Н-08.

### ПРИЛОЖЕНИЕ

#### Кривая типичной реализации

Статистические характеристики случайного процесса  $z(t)$  в фиксированный момент времени  $t$  описываются ее плотностью вероятности

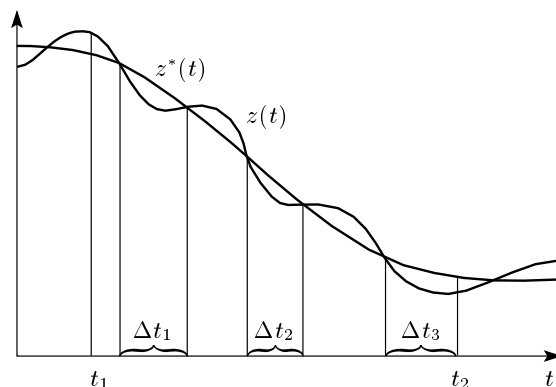


Рис. 7. К определению кривой типичной реализации случайного процесса

$$P(t; z) = \langle \delta(z(t) - z) \rangle,$$

параметрически зависящей от времени  $t$ , и интегральной функцией распределения

$$F(t; z) = \text{Prob}(z(t) < z) = \langle \theta(z(t) - z) \rangle = \int_{-\infty}^z dz' P(t; z'),$$

где  $\delta(z)$  — дельта-функция Дирака,  $\theta(z)$  — функция Хевисайда, равная 1 при  $z > 0$  и 0 при  $z < 0$ , а через  $\langle \dots \rangle$  обозначено усреднение по ансамблю реализаций процесса  $z(t)$ .

Кривой типичной реализации случайного процесса  $z(t)$  называется детерминированная кривая  $z^*(t)$ , которая является медианой интегральной функции распределения и определяется как решение алгебраического уравнения

$$F(t; z^*(t)) = 1/2.$$

Основанием для этого является свойство медианы, заключающееся в том, что для любого интервала времени  $(t_1, t_2)$  случайный процесс  $z(t)$  как бы «обвивает» кривую  $z^*(t)$  таким образом, что среднее время, в течение которого выполняется неравенство  $z(t) > z^*(t)$ , совпадает со средним временем, в течение которого выполняется обратное неравенство  $z(t) < z^*(t)$  (рис. 7), т.е.

$$\langle T_{z(t) > z^*(t)} \rangle = \langle T_{z(t) < z^*(t)} \rangle = \frac{1}{2} (t_2 - t_1).$$

КТР, полученная с помощью одновременной плотности вероятности, определена, тем не менее, на всем интервале времени  $t \in (0, \infty)$ .

Для гауссова случайного процесса  $z(t)$  со средним значением  $\langle z(t) \rangle$  кривая типичной реализации совпадает со средним значением процесса  $z(t)$ , т. е.  $z^*(t) = \langle z(t) \rangle$ , а для логнормального процесса

$$z^*(t) = z_0 \exp \langle \ln z(t) \rangle.$$

### ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред, Теоретическая физика*, т. VIII, Наука, Москва (1982).
2. Е. Паркер, *Космические магнитные поля*, ч. 2, Мир, Москва (1982) [E. N. Parker, *Cosmical Magnetic Fields*, Clarendon Press, Oxford (1979)].
3. А. П. Казанцев, *ЖЭТФ* **53**, 1806 (1967).
4. А. П. Казанцев, А. А. Рuzмайкин, Д. Д. Соколов, *ЖЭТФ* **88**, 487 (1985).
5. А. А. Shekochihin et al., *Astrophys. J.* **612**, 276 (2004).
6. Н. А. Силантьев, *Письма в ЖЭТФ* **72**, 60 (2000).
7. Н. А. Силантьев, *ЖЭТФ* **125**, 831 (2004).
8. В. И. Кляцкин, К. В. Кошель, *УФН* **170**, 771 (2000).
9. В. И. Кляцкин, *УФН* **173**, 689 (2003).
10. В. И. Кляцкин, *Стохастические уравнения глазу-ми физика. Основные положения, точные результаты и асимптотические приближения*, Физматлит, Москва (2001).
11. В. И. Кляцкин, *Динамика стохастических систем*, Физматлит, Москва (2002).
12. В. И. Кляцкин, *Диффузия и кластеризация пассивной примеси в случайных гидродинамических потоках*, Физматлит, Москва (2005).
13. В. И. Кляцкин, *Стохастические уравнения. Теория и ее приложения к акустике, гидродинамике и радиофизике*, Физматлит, Москва (2008).
14. Г. М. Батанов и др., *Письма в ЖЭТФ* **78**, 974 (2003).
15. В. П. Будаев, *Физика плазмы* **34**, 867 (2008).
16. А. А. Van Ballegoijen et al., *Astrophys. J.* **509**, 435 (1998).
17. F. Berrilli et al., *Astrophys. J.* **632**, 677 (2005).
18. В. И. Кляцкин, *УФН* **178**, 419 (2008).
19. В. И. Кляцкин, И. Г. Якушкин, *ЖЭТФ* **118**, 849 (2000).