

## О НЕКОТОРЫХ ФИЗИЧЕСКИХ ПРИЛОЖЕНИЯХ СЛУЧАЙНЫХ ИЕРАРХИЧЕСКИХ МАТРИЦ

*В. А. Аветисов<sup>a</sup>, А. Х. Биккулов<sup>a</sup>, О. А. Васильев<sup>b,c</sup>, С. К. Нечаев<sup>d,e\*</sup>, А. В. Чертович<sup>f</sup>*

<sup>a</sup> *Институт химической физики им. Н. Н. Семенова Российской академии наук  
119991, Москва, Россия*

<sup>b</sup> *Max-Planck-Institut für Metallforschung  
D-70569, Stuttgart, Germany*

<sup>c</sup> *Institut für Theoretische und Angewandte Physik, Universität Stuttgart  
D-70569, Stuttgart, Germany*

<sup>d</sup> *Физический институт им. П. Н. Лебедева Российской академии наук  
119991, Москва, Россия*

<sup>e</sup> *Université Paris Sud  
91405, Orsay Cedex, France*

<sup>f</sup> *Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова  
119992, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 20 марта 2009 г.

Впервые ставится вопрос об исследовании спектральных свойств случайных блочно-иерархических матриц в применении к динамическим и структурным характеристикам сложных иерархических систем с беспорядком. Обсуждаются особенности динамики на случайных ультраметрических энергетических ландшафтах, а также статистические свойства безмасштабных и полимасштабных (в зависимости от рассматриваемых топологических характеристик) случайных иерархических сетей (графов), полученных методом множественного отображения.

PACS: 05.40.-a, 87.15.hg

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Повышенный интерес к статистическим свойствам ансамблей случайных матриц, возникший еще в 50-х годах прошлого столетия, был вызван, в первую очередь, рядом проблем, относящихся к ядерной физике. В частности, было обнаружено, что случайные матрицы могут служить достаточно простой моделью нейтронных резонансов тяжелых ядер, хорошо объясняющей многие наблюдаемые статистические закономерности в области, где описание сильновозбужденных состояний в терминах одночастичных моделей оказывается безнадежной задачей. Вскоре после этого было осознано, что применение случайных матриц не ограничивается исключительно проблемами ядерной физики. Глу-

бое проникновение случайных матриц в физику конденсированных сред привело к прорыву в понимании свойств проводимости неупорядоченных мезоскопических систем. В дальнейшем приложения теории случайных матриц распространились на статистическую физику. Среди многочисленных работ этого направления следует особо отметить недавние работы [1, 2], в которых обсуждаются статистика краевых состояний ансамблей случайных матриц и их физические приложения.

Напомним, что стандартной задачей теории случайных матриц является вычисление плотности распределения собственных значений случайных матриц и распределения интервалов между собственными значениями в предположении, что все матричные элементы являются независимыми случайными величинами, принимающими значения в неко-

\*E-mail: sergei.nechaev@gmail.com

тором заданном ансамбле (см., например, [3]). В такой постановке теория случайных матриц используется для описания широкого круга физических явлений, однако в этой форме она не охватывает важного класса сложных систем, описание которых апеллирует к концепции иерархической (ультраметрической) организации [4, 5] фазовых, динамических или структурных состояний. Иерархия состояний возникает чаще всего в многочастичных системах различной природы со множеством «вмороженных» разномасштабных ограничений, порождающих многомерные гиперповерхности потенциальной (или свободной) энергии с астрономически большим числом локальных минимумов.

Характерными примерами систем подобного рода, часто называемых сложными системами, могут служить стекла и глобулярные белки. В применении к таким системам, иерархическая (ультраметрическая) концепция предполагает, что локальные минимумы энергетического ландшафта кластеризованы в иерархически вложенные бассейны минимумов. А именно, каждый большой бассейн состоит из меньших бассейнов, в каждый из которых, в свою очередь, вложены еще меньшие бассейны и т. д. Бассейны локальных минимумов отделены друг от друга иерархически упорядоченными барьерами: чем меньше бассейны, тем «ниже» разделяющие их барьеры. Наконец — и это отличительное положение ультраметрической концепции — предполагается, что время достижения квазиравновесия в любом бассейне существенно меньше времени выхода из данного бассейна. Иначе говоря, время перехода из одного локального минимума в другой определяется максимальным барьером, лежащим на пути перехода, т. е. время перехода подчиняется «сильному неравенству треугольника» — неравенству, которому подчиняются расстояния в иерархической системе (такие расстояния называются ультраметрическими). Таким образом, ультраметрическая концепция есть, по существу, приближение многомерного энергетического ландшафта иерархическим (ультраметрическим) ландшафтом и, соответственно, приближение стохастической динамики сложной системы случайным процессом на ультраметрическом пространстве.

Обычно ультраметрическое пространство состояний графически изображают в виде ветвящегося  $p$ -адического дерева Кэли с индексом ветвления  $p + 1$ . При этом самим состояниям отвечает лишь граница «кроны» дерева, а вся остальная часть  $p$ -адического дерева является графом ультраметрических расстояний между состояниями и соотноше-

ний вложений бассейнов состояний. Геометрические свойства ультраметрического пространства драматически отличаются от свойств евклидова пространства. Поэтому исследование ультраметрических моделей требует развития адекватного математического аппарата. Математический  $p$ -адический анализ дает в этом отношении очень богатые возможности [6]. Следует, однако, проявлять осторожность, заявляя, что ультраметрические модели принципиально несовместимы с моделями, использующими обычные (например, евклидовы) метрические свойства. Связь между ультраметрическими и евклидовыми моделями для некоторых сложных систем недавно стала предметом обсуждения в физике неупорядоченных систем. В частности, в работе [7] обсуждался вопрос о возможности изометрического вложения однородного дерева Кэли в трехмерное евклидово пространство. С другой стороны, в работе [8] было показано, что в евклидовом пространстве любой конечной размерности можно построить случайный гауссов энергетический ландшафт, воспроизводящий существенные особенности динамического поведения системы на ультраметрическом энергетическом ландшафте. Наконец, в разд. 2 данной работы также демонстрируется глубокая связь между некоторыми ультраметрическими моделями сложных систем и древовидными моделями неупорядоченных систем, стандартное описание которых никоим образом не апеллирует к концепции ультраметричности.

Помимо теории спиновых стекол, ультраметрическая концепция нашла свое воплощение в нескольких формальных моделях так называемой межбассейновой кинетики (basin-to-basin kinetics), посвященных флуктуационно-динамическому поведению макромолекулярных систем [9–13]. Эти модели отражают различные аспекты ультраметрического случайного блуждания — однородного марковского случайного процесса, ассоциируемого с прыжковыми переходами между локальными минимумами энергетического ландшафта на регулярной бассейновой иерархии. Матрица переходов  $\bar{T}$  ультраметрического случайного блуждания симметрична и имеет трансляционно-инвариантную (вдоль главной диагонали) блочно-иерархическую структуру, подобную структуре матрицы Паризи (см., например, [4]). Собственные значения  $\{\bar{\lambda}_\gamma\}$  трансляционно-инвариантной блочно-иерархической кинетической матрицы  $\bar{T}$  хорошо известны [6, 9, 13]:

$$\bar{\lambda}_\gamma = -p^\gamma \bar{T}^{(\gamma)} - (1 - p^{-1}) \sum_{\gamma'=\gamma+1}^{\Gamma} p^{\gamma'} \bar{T}^{(\gamma')}, \quad (1)$$

где  $\bar{\lambda}_0 = 0$  по определению,  $\bar{T}^{(\gamma)}$  — матричный элемент, отвечающий переходам между бассейнами уровня  $\gamma$ , а суммирование ведется от уровня  $\gamma + 1$  до максимального уровня  $\max \gamma = \Gamma$ . В частности, если высота барьеров растет линейно с  $\gamma$ , то  $\bar{T}^{(\gamma)} = p^{-(\alpha+1)\gamma}$ ,  $\alpha \geq 0$ . Этот случай является физически содержательным именно для белковых молекул [13, 14]. Смысл собственных значений блочно-иерархической кинетической матрицы прозрачен:  $\bar{\lambda}_\gamma$  есть вероятность выхода из бассейна уровня  $\gamma$  через любой из вышележащих уровней. Отметим, что для регулярной бассейновой иерархии все энергетические барьеры, ассоциируемые с одним и тем же уровнем  $\gamma$ , энергетически тождественны, поэтому матричные элементы  $\bar{T}^{(\gamma)}$  и собственные значения  $\{\bar{\lambda}_\gamma\}$  трансляционно-инвариантной блочно-иерархической кинетической матрицы зависят только от иерархического уровня  $\gamma$ .

Несмотря на то, что трансляционно-инвариантные кинетические матрицы  $\bar{T}$  были недавно успешно использованы для объяснения экспериментально наблюдаемых особенностей флуктуационно-динамической подвижности таких сложных макромолекулярных объектов, как белковые молекулы [13, 14], регулярная бассейновая иерархия представляется сильно упрощающим предположением, значительно ограничивающим возможность описания реальных физических систем. Наличие случайности в бассейновой иерархии может столь существенно изменить поведение системы, что приближение энергетического ландшафта регулярной иерархией может оказаться не вполне оправданным. Для того чтобы снять энергетическое вырождение, присущее регулярному иерархическому ландшафту, но сохранить бассейновую структуру ландшафта, представляется естественным считать, что величины энергетических барьеров, принадлежащих одному и тому же иерархическому уровню, случайны и распределены вокруг определенных средних значений, предписанных регулярной иерархией.

Другой аргумент в пользу стохастизации иерархического ландшафта связан с тем, что в реальном эксперименте с объектами микро- и мезоскопического масштаба, как правило, имеют дело не с единичным объектом, а с макроскопическим образцом, т. е. со статистическим ансамблем объектов со случайными вариациями их индивидуальных ландшафтов. В связи с этим также встает вопрос о проявлениях иерархической (ультраметрической) организации энергетических ландшафтов в свойствах средних по ансамблю. Исследование этого вопроса связано, прежде всего, с определением характери-

стик усредненного спектра собственных значений ансамбля случайных блочно-иерархических кинетических матриц и усредненной релаксационной функции. Этим вопросам посвящен разд. 2 данной работы. Для того чтобы сделать изложение самодостаточным, в Приложении мы приводим основные идеи вычисления спектра собственных значений трансляционно-инвариантных блочно-иерархических кинетических матриц. В разд. 2 мы также обсуждаем ряд интересных, на наш взгляд, вопросов, которые устанавливают неожиданную связь между релаксационной кинетикой на случайных ультраметрических ландшафтах и критическими явлениями на фазовых пространствах древовидной структуры [15].

Помимо динамического контекста ультраметрической парадигмы несомненный интерес представляет выявление иерархической структурной организации «случайных ультраметрических фазовых пространств» в наблюдаемых статистических закономерностях. Наглядным примером иерархической структурной организации может служить так называемая складчатая глобула, впервые обсуждавшаяся в работе [16]. Термодинамически равновесная пространственная конфигурация такой глобулы напоминает кривую Пеано [17], вложенную в трехмерное пространство. Пространственная укладка складчатой глобулы схематически представляет собой один и тот же складчатый мотив, воспроизведенный на все большем и большем масштабе. Иерархическая укладка естественным образом приводит к блочно-иерархической сети контактов между звеньями цепи, которая описывается блочно-иерархической матрицей контактов. Разумеется, наличие неоднородностей в иерархии складок вносит элемент случайности в блочно-иерархическую сеть контактов, в результате чего возникает вопрос об определении статистических характеристик ансамбля случайных матриц блочно-иерархического вида, в данном случае случайных блочно-иерархических матриц контактов.

Анализ спектральной плотности  $\rho(\lambda)$  некоторых ансамблей блочно-иерархических матриц контактов показал [18], что  $\rho(\lambda)$  при  $|\lambda| \rightarrow \infty$  имеет степенной (а не экспоненциальный) «хвост». Это свидетельствует о многомасштабности статистических характеристик сети и позволяет предположить, что сети (и соответствующие им структуры), для которых характерны блочно-иерархические матрицы контактов, могут относиться к классу безмасштабных (scale-free), называемых также масштабно-инвариантными, масштабно-самоподобными и т. д.

Сетевые структуры безмасштабного типа обсуж-

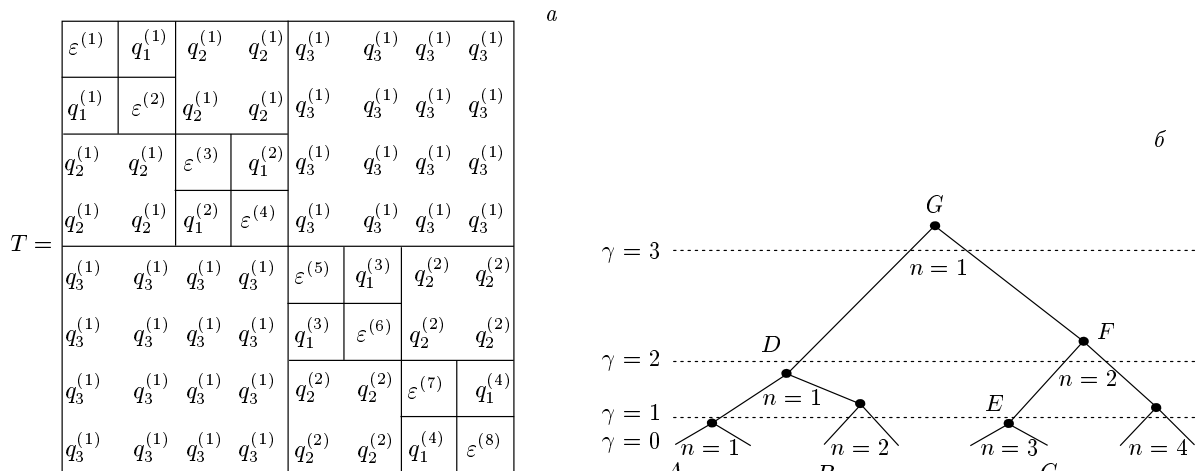


Рис. 1. а) Блочнo-иерархическая кинетическая матрица  $T$  типа матрицы Паризи ( $p = 2$ ); б) иерархический (ультраметрический) энергетический ландшафт, отвечающий кинетической матрице  $T$

даются сейчас едва ли не во всех областях науки, от динамики биополимеров и их пространственной укладки (фолдинга) в строго детерминированные структуры, клеточного метаболизма и естественных сетей различной природы (включая интернет, различные экологические, социальные и экономические структуры и объекты и т. п.) до банковских сетей и даже конденсации Бозе–Эйнштейна. Многие темы из этого далеко не полного списка представлены в обзоре [19]. Поэтому в разд. 3 данной работы, посвященном случайным сетям, мы сконцентрируемся только на нескольких ключевых особенностях блочно-иерархических случайных сетей, уделяя особое внимание спектральным свойствам их матриц контактов (матриц связности). В разд. 3 мы также предлагаем новую модель иерархической безмасштабной случайной сети, построение которой основано на использовании случайных блочно-иерархических матриц контактов. Отметим, что хотя структура блочно-иерархической матрицы контактов во многом подобна структуре блочно-иерархической кинетической матрицы, рассматриваемой в разд. 2, между ними есть важное различие. В кинетических матрицах диагональные элементы по определению удовлетворяют условию сохранения полной вероятности (в любой момент времени система с достоверностью находится в одном из состояний), в то время как диагональные элементы блочно-иерархической матрицы связности по определению равны нулю. Как мы увидим ниже в разд. 3, это обстоятельство сильно влияет на спектральные свойства ансамбля случайных блочно-иерархических матриц.

## 2. СЛУЧАЙНЫЕ БЛОЧНО-ИЕРАРХИЧЕСКИЕ КИНЕТИЧЕСКИЕ МАТРИЦЫ: СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА И СВЯЗЬ С НАПРАВЛЕННЫМИ ПОЛИМЕРАМИ НА НЕУПОРЯДОЧЕННЫХ ДЕРЕВЬЯХ

Блочнo-иерархические кинетические матрицы (рис. 1а) являются естественными структурами, тесно связанными с моделями ультраметрического случайного блуждания. Приведем пример построения такой блочно-иерархической матрицы. Возьмем множество точек  $B_p(\Gamma)$ , перенумерованных индексом  $i = 1, \dots, N$ , где  $N = p^\Gamma$  ( $\Gamma$  — заданное целое число,  $p$  — простое число), и будем рассматривать их как дискретную решетку узлов, по которым блуждает «частица». Для построения ультраметрического случайного блуждания на  $B_p(\Gamma)$  введем  $p$ -адический ветвящийся граф  $G_p(\Gamma)$  с фиксированным индексом ветвления  $p + 1$ , конечные вершины которого есть узлы решетки  $B_p(\Gamma)$  (рис. 1б). Граф  $G_p(\Gamma)$ , таким образом, имеет  $\Gamma$  иерархических уровней. Будем считать, что вероятность  $q(i, j)$  перехода в единицу времени между любыми двумя узлами решетки  $i$  и  $j$  ( $i, j \in B_p(\Gamma)$ ) определяется высотой наименьшего поддерева  $G_p(\gamma, n_\gamma) \subseteq G_p(\Gamma)$ , включающего узлы  $i$  и  $j$ . Пара  $(\gamma, n_\gamma)$  в наших обозначениях индексирует вершины поддеревьев дерева  $G_p(\Gamma)$ :  $1 \leq \gamma \leq \Gamma$  есть номер уровня иерархии, на котором расположена вершина поддерева, а  $n_\gamma$  — символ, принимающий различные значения на  $p^{\Gamma-\gamma}$  вершинах уровня  $\gamma$ . Поскольку вероятности переходов задаются вершинами  $p$ -адического гра-

фа, характерные времена переходов удовлетворяют сильному неравенству треугольника и  $p$ -адический граф можно ассоциировать с ультраметрическим энергетическим ландшафтом. Например, максимальный активационный барьер, разделяющий состояния  $A$  и  $B$  (см. рис. 1б), можно ассоциировать с высотой, на которой расположена вершина  $D$ , имеющая индексы  $(\gamma = 2, n = 1)$ , и т. д.

Таким образом, матрица переходов имеет блочно-иерархическую структуру, которая прямо соотносится с иерархией бассейнов на энергетическом ландшафте. Для краткости будем называть такую матрицу кинетической матрицей Паризи (КМП) и обозначать ее элементы как  $q_\gamma^{(n)}$ , подразумевая под  $n$  соответствующие индексы блоков матрицы (вершин поддеревьев  $p$ -адического графа), принадлежащих уровню  $\gamma$ . Отметим, что КМП является симметричной матрицей и ее диагональные элементы определены так, что сумма элементов по каждому столбцу равна нулю.

Каждый матричный элемент  $T_{i,j} \equiv q_\gamma^{(n)}$  матрицы  $T$  (см. рис. 1а), как отмечалось выше, можно связать с соответствующим энергетическим барьером  $u_\gamma^{(n)} > 0$  на ландшафте, разделяющим определенную пару бассейнов соответствующего масштаба:  $u_\gamma^{(n)} = -\ln q_\gamma^{(n)}$  — это безразмерная «высота» барьера.

Собственные значения трансляционно-неинвариантных КМП были впервые получены в работе [20] с использованием элементов  $p$ -адического анализа [6]. Ниже мы приводим выражение для собственных значений КМП в терминах матричных элементов  $q_\gamma^{(n)}$ . Собственные векторы трансляционно-неинвариантной КМП описаны в Приложении. Конструкция  $\lambda_{\gamma,n}$  имеет очень прозрачную геометрическую интерпретацию. Зададим пару чисел  $(\gamma, n)$ , где  $\gamma$  есть иерархический уровень ( $1 \leq \gamma \leq \Gamma = \max \gamma$ ), а  $n$  нумерует вершины  $p$ -адического графа ( $1 \leq n \leq p^{\Gamma-\gamma}$ ), относящиеся к уровню  $\gamma$ , как показано на рис. 1б.

Собственное значение  $\lambda_{\gamma,n}$  матрицы  $T$  можно записать в виде

$$\lambda_{\gamma,n} = -p^\gamma q_\gamma^{(n)} - (1 - p^{-1}) \underbrace{\sum_{(\gamma', n')=(\gamma+1, n)}^{(\Gamma, 1)} p^{\gamma'} q_{\gamma'}^{(n')}}_{\Sigma}. \quad (2)$$

Суммирование в (2) (несмотря на сходство с (1)) нуждается в пояснении. Суммирование  $\Sigma$  в (2), дающее вклад в собственное значение  $\lambda_{\gamma,n}$ , ведется

вдоль (единственного) пути на дереве, связывающего вершину  $(\gamma, n)$  с корнем дерева  $(\Gamma, 1)$ , а множитель  $p^\gamma$ , стоящий перед  $q_\gamma^{(n)}$ , есть число состояний в бассейне уровня  $\gamma$ . Отсюда нетрудно видеть, что собственное значение  $\lambda_{\gamma,n}$  есть просто вероятность выхода (в единицу времени) из поддерева с вершиной  $(\gamma, n)$  через любую из вышележащих вершин  $p$ -адического дерева. В качестве иллюстрации вычислим собственное значение  $\lambda_{\gamma=1, n=3}$  для матрицы, показанной на рис. 1а. Первый член в (2) есть взвешенный вклад от точки  $E(\gamma = 1, n = 3)$ , и сумма  $\Sigma$  в этом случае есть взвешенная сумма двух вкладов от точек  $F$  и  $G$  (см. рис. 1б). Отсюда

$$\lambda_{1,3} = -2^1 q_1^{(3)} - (1 - 2^{-1}) [2^2 q_2^{(2)} + 2^3 q_3^{(1)}].$$

Определим теперь случайную КМП. Для этого положим, что

$$u_\gamma^{(n)} = \langle u_\gamma^{(n)} \rangle + \xi_\gamma^{(n)}, \quad (3)$$

где  $\langle u_\gamma^{(n)} \rangle$  — среднее значение высоты барьера на уровне  $\gamma$ , а  $\xi_\gamma^{(n)}$  описывает случайные отклонения  $u_\gamma^{(n)}$  от среднего значения. Ниже полагаем, что  $|\xi_\gamma^{(n)}| \ll 1$ . Это позволяет ограничить степенной ряд для  $q_\gamma^{(n)}$  по  $\xi_\gamma^{(n)}$  линейным членом:

$$q_\gamma^{(n)} \approx \exp\left(-\langle u_\gamma^{(n)} \rangle\right) \left[1 - \xi_\gamma^{(n)} + O\left((\xi_\gamma^{(n)})^2\right)\right]. \quad (4)$$

Напомним, что средние значения  $\langle u_\gamma^{(n)} \rangle$  фиксируют иерархическую структуру энергетического ландшафта. Для определенности будем считать, что средняя высота барьеров растет линейно с  $\gamma$ , т. е.  $\exp\left(-\langle u_\gamma^{(n)} \rangle\right) = \langle q_\gamma^{(n)} \rangle = p^{-(\alpha+1)\gamma}$  ( $\alpha \geq 0$ ), где  $\alpha$  масштабирует линейное (в среднем) нарастание барьеров на ландшафте. Следует, однако, подчеркнуть, что это не ограничивает распространение нашего рассмотрения и на другие типы ультраметрических ландшафтов, обсуждавшихся, например, в работе [21].

Исследование ультраметрического случайного блуждания на стохастизованном ультраметрическом ландшафте ставит, прежде всего, задачу вычисления плотности распределения собственных значений случайной КМП описанного выше вида (см. рис. 1а). Помимо этой задачи мы также устанавливаем в данном разделе связь между стохастизованными ультраметрическими ландшафтами и «направленными полимерами на случайных деревьях» [22]. Пользуясь этой связью, мы обнаруживаем некоторые неожиданные

свойства вероятности «выживания» на случайных ультраметрических ландшафтах. Напомним, что вероятность выживания  $S(t)$  (называемая также релаксационной функцией) есть вероятность найти систему в исходном состоянии в момент времени  $t$ .

### 2.1. Спектральная плотность случайной кинетической матрицы Паризи

Спектральная плотность  $\rho(\lambda)$  ансамбля случайных КМП может быть вычислена стандартным образом:

$$\rho(\lambda) = \frac{1}{\mathcal{N}} \sum_{\{\gamma, n\}} \langle \delta(\lambda - \lambda_{\gamma, n}) \rangle, \quad (5)$$

где  $\mathcal{N} = p^\Gamma$  — полное число собственных значений матрицы  $T$ , а  $\langle \dots \rangle$  означает усреднение с функцией распределения  $P(\xi_\gamma^{(n)})$ . Пусть  $P(\xi_\gamma^{(n)})$  есть функция распределения флуктуаций  $\xi_\gamma^{(n)}$  барьеров  $u_\gamma^{(n)}$ , относящихся к уровню  $\gamma$  (см. выражение (3)), и матричные элементы  $q_\gamma^{(n)}$  связаны с высотами энергетических барьеров согласно (4). Предположим, что  $P(\xi_\gamma^{(n)})$  — гауссово распределение, не зависящее от  $(\gamma, n)$ :

$$P(\xi_\gamma^{(n)}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(\xi_\gamma^{(n)})^2}{2\sigma^2}\right). \quad (6)$$

Вообще говоря, флуктуации  $\xi_\gamma^{(n)}$  в (6) неограничены, и распределение  $P(\xi_\gamma^{(n)})$  не всегда совместимо с условием  $|\xi_\gamma^{(n)}| \ll 1$ . Напомним, что последнее условие важно именно для кинетических матриц, поскольку оно должно гарантировать положительность матричных элементов  $q_\gamma^{(n)}$  в (4). Поэтому ниже полагаем, что  $\langle (\xi_\gamma^{(n)})^2 \rangle = \sigma^2 \ll 1$ , вычисляем спектральную плотность и в конце проверяем наши результаты на самосогласованность.

Из выражений (2), (5) и (6) нетрудно определить  $\rho(\lambda)$ . Начнем со вспомогательного вычисления для функции  $Q(\lambda, \gamma) = \langle \delta(\lambda - \lambda_{\gamma, n=1}) \rangle$  при  $n = 1$  и произвольном значении  $\gamma$  ( $1 \leq \gamma \leq \Gamma$ ), где усреднение проводится с распределением  $P(\xi_\gamma^{(n=1)})$ :

$$\begin{aligned} Q(\lambda, \gamma) &= \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{2\pi} e^{i\lambda x} \langle e^{-i\lambda_{\gamma, n=1} x} \rangle \{P(\xi_\gamma^{(n=1)}), \dots, P(\xi_\Gamma^{(n=1)})\} \approx \\ &\approx \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{2\pi} \exp\left\{ix \left[\lambda + v_\gamma(\Gamma)\right] - \frac{x^2}{2} \sigma^2 u_\gamma(\Gamma)\right\}, \quad (7) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} v_\gamma(\Gamma) &= p^{-\alpha\gamma} + (1 - p^{-1}) \sum_{\gamma'=\gamma+1}^{\Gamma} p^{-\alpha\gamma'}, \\ u_\gamma(\Gamma) &= p^{-2\alpha\gamma} + (1 - p^{-1})^2 \sum_{\gamma'=\gamma+1}^{\Gamma} p^{-2\alpha\gamma'}. \end{aligned} \quad (8)$$

Интеграл в (7) легко оценить. Удерживая только главные (квадратичные) члены разложения по  $\sigma$ , получаем

$$Q(\lambda, \gamma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 u_\gamma(\Gamma)}} \exp\left\{-\frac{[\lambda + v_\gamma(\Gamma)]^2}{\sigma^2 u_\gamma(\Gamma)}\right\}. \quad (9)$$

Заметим, что величина  $Q(\lambda, \gamma)$  одинакова для любого из  $p^{\Gamma-\gamma}$  собственных значений  $\lambda_{\gamma, n}$ , относящихся к  $p^{\Gamma-\gamma}$  бассейнам уровня  $\gamma$ . Поэтому спектральную плотность  $\rho(\lambda)$  можно записать в виде

$$\rho(\lambda) = \frac{1}{p^\Gamma} \sum_{\gamma=1}^{\Gamma} g(\gamma) Q(\lambda, \gamma), \quad (10)$$

где  $g(\gamma) = p^{\Gamma-\gamma}$  — степень вырожденности величины  $Q(\lambda, \gamma)$ .

Для проверки корректности приближения (4) мы численно определили спектральную плотность  $\rho(\lambda)$  для гауссова распределения  $P(\xi_\gamma^{(n)})$ , используя точное соотношение  $q_\gamma^{(n)} = p^{-(\alpha+1)\gamma} e^{-\xi_\gamma^{(n)}}$ , и сравнили результат со спектральной плотностью, полученной для линейного приближения  $q_\gamma^{(n)} \approx p^{-(\alpha+1)\gamma} (1 - \xi_\gamma^{(n)})$ . На рис. 2а приведены точное и приближенное распределения спектральной плотности, полученные для случайных КМП при  $\Gamma = 8$  и  $\alpha = 0.1$ . Аналогичные результаты для  $\alpha = 0.5$  показаны на рис. 2б. Видно, что при  $\sigma \lesssim 0.2$  линейризованное приближение (4) при гауссовом распределении энергетических барьеров все еще осмысленно: приближенное значение  $\rho(\lambda)$ , вычисленное с использованием выражений (9), (10), практически совпадает с истинным распределением.

Отметим, наконец, что анализ выражения (10) для произвольного значения  $\alpha > 0$  в пределе  $\Gamma \rightarrow \infty$  позволяет установить асимптотическое поведение хвоста спектральной плотности  $\rho(\lambda)$  при  $\lambda \rightarrow -\infty$ :

$$\begin{aligned} \rho(\lambda) \Big|_{\lambda \rightarrow -\infty} &\approx \\ &\approx \begin{cases} |\lambda|^{-(\alpha-1)/\alpha} e^{-\lambda^2}, & \alpha \geq 1, \\ |\lambda|^{-(1-\alpha)/\alpha} e^{-\lambda^2}, & 0 < \alpha < 1. \end{cases} \quad (11) \end{aligned}$$

Сильное обрезание спектра слева при малых  $\sigma$  (см. рис. 2), т. е. при слабой стохастизации ультраметрического энергетического ландшафта, указывает

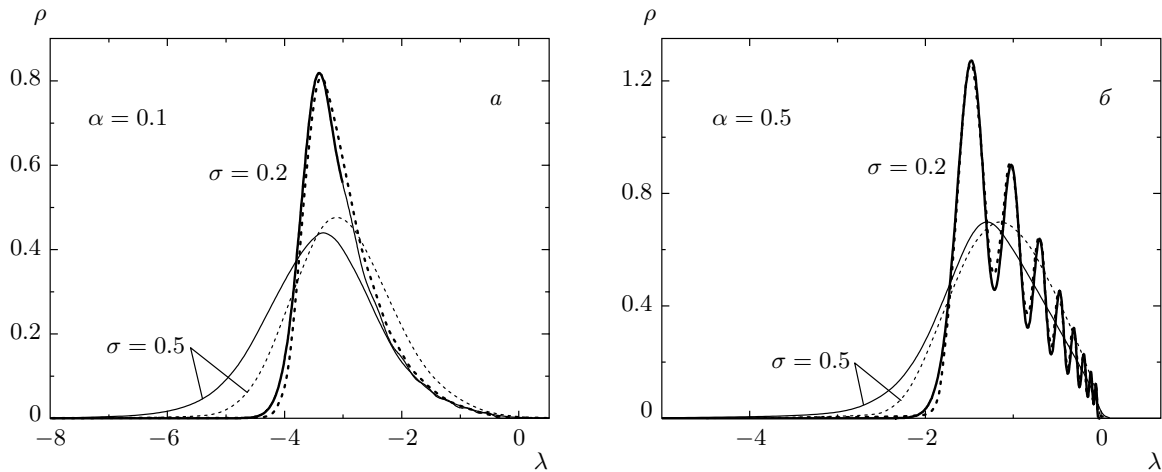


Рис. 2. Распределения спектральной плотности  $\rho(\lambda)$  КМП при гауссовых флуктуациях барьеров для точных (сплошные кривые) и линеаризованных (пунктирные кривые) матричных элементов при  $\Gamma = 8$ ,  $\alpha = 0.1$  (а),  $0.5$  (б) и  $\sigma = 0.2, 0.5$

на то, что физически интересные проявления ландшафтной случайности на фоне явно выраженной иерархической бассейновой структуры следует ожидать только в части спектра случайных КМП, соответствующей большим временам и отвечающей области  $\lambda \rightarrow 0$ . Детальному обсуждению этого вопроса посвящен следующий подраздел.

### 2.2. Вероятность выживания на случайном ультраметрическом ландшафте и направленные полимеры на случайных деревьях

Информация о поведении системы на больших временах может быть получена из вероятности выживания  $S(t)$ , имеющей смысл вероятности найти систему в начальном состоянии в момент времени  $t$ . Вероятность выживания на регулярных ультраметрических ландшафтах (описываемых регулярными  $p$ -адическими графами), известна для различных видов ландшафтов (см., например, работу [21]):

$$\bar{S}(t, \Gamma) = (p - 1) \sum_{\gamma=1}^{\Gamma} p^{-\gamma} e^{\lambda_{\gamma} t} + p^{-\Gamma},$$

где собственные значения  $\lambda_{\gamma} < 0$ ,  $\gamma = 1, \dots, \Gamma$ . Заметим, что на регулярном ультраметрическом ландшафте начальное распределение всегда эволюционирует к однородному распределению. Что же касается вероятности выживания, она зависит от профиля ландшафта. Например, для линейных ландшафтов (высота активационных барьеров между бассейнами

растет линейно с уровнем  $\gamma$ ) собственные значения КМП определены выражением (1) и  $S(t)$  на больших временах ведет себя как  $S(t) \propto t^{-1/\alpha}$  [9, 21].

Для ультраметрического случайного блуждания со случайной КМП вероятность выживания  $S(t)$  зависит от конкретной реализации КМП. Как уже отмечалось выше, в этом случае физически интересно поведение усредненной по реализациям КМП вероятности выживания  $\langle S(t, \Gamma) \rangle$  на больших временах:

$$\begin{aligned} \langle S(t, \Gamma) \rangle &= \left\langle (p - 1) \sum_{\{\gamma, n\}} p^{-\gamma} \exp(\lambda_{\gamma, n} t) \right\rangle = \\ &= (p - 1) \sum_{\gamma=1}^{\Gamma} p^{-\gamma} \langle Z(t, \gamma, \Gamma) \rangle, \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$Z(t, \gamma, \Gamma) = \sum_{n=1}^{p^{\Gamma-\gamma}} \exp(\lambda_{\gamma, n} t). \quad (13)$$

Суммирование в (13) ведется по  $p^{\Gamma-\gamma}$  вершинам под-деревьев уровня  $\gamma$ , а  $\lambda_{\gamma, n}$  задается выражением (2). Напомним, что каждое собственное значение  $\lambda_{\gamma, n}$  случайной КМП есть вероятность выхода (в единицу времени) из бассейна, отвечающего поддереву с вершиной  $(\gamma, n)$ , см. рис. 1б. Поэтому на  $Z(t, \gamma, \Gamma)$  можно формально смотреть как на статистическую сумму по всем путям ухода с уровня  $\gamma$  на вышележащие уровни в момент времени  $t$ .

Прямое вычисление  $\langle S(t, \Gamma) \rangle$  является весьма трудной задачей, однако важную информацию о по-

ведении  $\langle S(t, \Gamma) \rangle$  можно получить, анализируя функцию распределения для  $Z(t, \gamma, \Gamma)$ . Наше дальнейшее рассмотрение этого вопроса основано на том наблюдении, что  $Z(t, \gamma, \Gamma)$  формально совпадает со статистической суммой направленного полимера на неупорядоченном дереве (НПНД), впервые исследованной в работе [22].

Подставляя выражение (4) в (13) и удерживая только линейные члены в  $\xi_\gamma^{(n)}$  ( $|\xi_\gamma^{(n)}| \ll 1$ ), получим

$$Z(t, \gamma, \Gamma) = \tilde{Z}(t, \gamma, \Gamma) \exp[-v_\gamma(\Gamma)t],$$

где  $v_\gamma(\Gamma)$  определено в (8), а

$$\tilde{Z}(t, \gamma, \Gamma) = \sum_{\text{all paths}} \exp \left\{ t \left( p^{-\alpha\gamma} \xi_\gamma^{(n)} + (1-p^{-1}) \sum_{(\gamma'=\gamma+1, n)}^{(\Gamma, 1)} p^{-\alpha\gamma'} \xi_{\gamma'}^{(n')} \right) \right\}. \quad (14)$$

Суммирование в каждой из экспонент в правой части выражения (14) идет по всем вершинам, лежащим на пути от узла  $(\gamma+1, n)$  к корневой точке  $(\Gamma, 1)$  (в точности, как в (2)), а первое суммирование в (14) идет по всем  $p^{\Gamma-\gamma}$  вершинам  $p$ -адического дерева, относящимся к уровню  $\gamma$ .

Функция  $\tilde{Z}(t, \gamma, \Gamma)$  удовлетворяет следующему стохастическому рекуррентному уравнению (ср. с уравнением, полученным в [22]):

$$\tilde{Z}(\Gamma) = \exp[t(1-p^{-1})p^{-\nu\Gamma} \xi_\Gamma] \sum_{j=1}^p \tilde{Z}_j(\Gamma-1). \quad (15)$$

Введем, как и в работе [22], усредненную характеристическую (производящую) функцию

$$G_m(x) = \left\langle \exp \left\{ -\tilde{Z}(m) \exp[t(1-p^{-1})p^{-\alpha m} x] \right\} \right\rangle, \quad (16)$$

где  $\gamma \leq m \leq \Gamma$ . Используя факторизацию функции  $G_m(x)$  на дереве Кэли, приходим к рекурсии для функции  $G_m(x)$ :

$$G_{m-1}(x) = \int d\xi P(\xi) [G_m(p^{-\alpha}(x+\xi))]^p, \quad (17)$$

где  $P(\xi)$  — гауссово распределение (6) для  $\xi$ . Чтобы привязать (17) к граничному условию, положим в (14)  $\tilde{Z}(t, \gamma = \Gamma, \Gamma) = \exp(tp^{-\alpha\Gamma} \xi_\Gamma)$ . Таким образом, мы фиксируем граничное условие в корне дерева:

$$G_\Gamma(x) = \left\langle \exp \left\{ -\exp[t(1-p^{-1})p^{-\alpha\Gamma} x] \times \exp[tp^{-\alpha\Gamma} \xi_\Gamma] \right\} \right\rangle_{P(\xi_\Gamma)}. \quad (18)$$

Линейное приближение в (14) предполагает узкое распределение  $P(\xi)$  с  $\sigma^2 \ll 1$ . В этом случае граничное условие (18) имеет вид

$$G_\Gamma(x) = \exp \left\{ -\exp[t(1-p^{-1})p^{-\alpha\Gamma} x] \right\}. \quad (19)$$

Уравнения (17) и (19) определяют нашу задачу. Для дальнейшего сопоставления модели НПНД и релаксации на случайных ультраметрических ландшафтах удобнее повернуть направление отсчета уровней дерева на обратное, определив  $n = \Gamma - m$ ,  $0 \leq n \leq \Gamma - \gamma$ . Случай  $\alpha > 0$  соответствует «сжимающему» отображению и требует отдельного рассмотрения, здесь же мы уделим внимание случаю  $\alpha = 0$ , т.е. для  $\sigma_\gamma = p^{-\gamma}$ , который формально идентичен модели НПНД [22]. Согласно работе [22], уравнение (17) с граничным условием (19) в непрерывном пределе соответствует уравнению Колмогорова–Петровского–Пискунова [23] и имеет решение типа бегущей волны.

Основное свойство модели НПНД заключается в следующем. Для длинных путей на дереве Кэли  $G_n(x)$  является «бегущей волной»,  $G_n(x) = w(x - fn)$ , где скорость распространения  $f$  зависит от обратной температуры  $\beta$ . В терминах нашей модели  $\beta = t(1-p^{-1})$  (для  $\alpha = 0$ ). В модели НПНД скорость  $f$  является аналогом свободной энергии направленного полимера на единицу длины и в пределе больших длин имеет вид

$$f(\beta) = \frac{1}{\beta} \ln \left( p \int d\xi P(\xi) e^{\beta\xi} \right).$$

При высоких температурах  $T > T_c$  (т.е. при  $t < t_c$  в терминах уравнений (17) и (19)) скорость  $f$  бегущей волны, т.е. свободная энергия направленного полимера, меняется с температурой, однако при низких температурах  $T < T_c$  (т.е. при  $t > t_c$  в терминах нашей модели) скорость  $f$  постоянна и равна  $f(T_c)$  ( $f(t_c)$  в терминах нашей модели). Значение  $T_c$  определяется решением уравнения

$$\left. \frac{d}{dt} f(T) \right|_{T=T_c} = 0.$$

Поскольку зависимость свободной энергии от температуры меняется при прохождении температуры  $T = T_c$ , естественно предположить, что в точке  $T_c$  имеет место фазовый переход «нарушения эргодичности» [24], т.е. деревообразное фазовое пространство «направленного полимера» распадается на выделенные области. Действительно, как было обнаружено в [22], перекрытие между двумя состояниями направленного полимера (траекториями на дереве)



зависит от температуры. При  $T > T_c$  перекрытие достоверно равно нулю, однако при  $T < T_c$  оно равно нулю с вероятностью  $\pi(t) \propto T$  и единице с вероятностью  $1 - \pi(t)$ . Отличная от нуля вероятность перекрытия указывает на то, что ниже критической температуры  $T_c$  фазовое пространство направленного полимера становится неоднородным. В нашем случае решение уравнения (17) ведет себя на больших временах аналогичным образом с учетом того, что время  $t$  играет роль обратной температуры  $\beta$  модели НПНД. Исходя из этой формальной аналогии можно было бы думать, что даже слабая стохастизация ультраметрического ландшафта ( $|\xi_\gamma^{(n)}| \ll 1$ ) может существенно изменить поведение блуждающей частицы на достаточно больших временах ( $t > t_c$ ). Заметим, однако, что случай  $\alpha \rightarrow 0$  соответствует исчезающей барьерной иерархии (при сохраняющейся иерархии бассейнов), поэтому «слабые» флуктуации  $|\xi_\gamma^{(n)}| \ll 1$  в сравнении с исчезающе малыми средними  $\langle u_\gamma^{(n)} \rangle$  в действительности являются «сильными». Другими словами, случай  $\alpha = 0$  и  $|\xi_\gamma^{(n)}| \ll 1$  отвечает большим флуктуациям барьерной иерархии.

Несмотря на то что при  $\alpha = 0$  наша задача формально полностью соответствует модели НПНД, интерпретация критического явления, наблюдавшегося в работе [22], в терминах ультраметрического случайного блуждания [15] заслуживает обсуждения. Действительно, наша кинетическая задача определена для ультраметрического случайного блуждания, т. е. для блуждания на границе  $p$ -адического дерева, и все кинетические свойства модели, в том числе и «бегущая волна», определены вероятностями переходов на определенные (ультраметрические) расстояния «поперек дерева» вдоль его границы. В отличие от этого модель НПНД имеет дело с блужданием в объеме дерева, и бегущая волна там распространяется «вдоль дерева» от корня к границе.

Тем не менее перекрытие траекторий, вычисленное в работе [22] для направленного полимера, позволяет связать поведение в объеме и на границе дерева. Поскольку на временах  $t < t_c$  перекрытие любых двух траекторий на дереве равно нулю, граница дерева (к которой траектории идут из корня) остается кинетически однородной в том смысле, что вероятность выхода из любого бассейна, усредненная по всем реализациям случайного ландшафта, зависит только от масштаба (энтропии) бассейна. Иначе говоря, на не слишком больших временах наблюдаемая кинетика аналогична кинетике на регулярной бассейновой иерархии и случайность ультраметрического ландшафта никак себя не проявляет. Напро-

тив, перекрытие траекторий на больших временах  $t > t_c$  указывает на статистическую неоднородность вкладов различных реализаций случайного ультраметрического ландшафта в поведение релаксационных средних: с вероятностью  $\pi(t) \propto t^{-1}$  граница дерева остается однородной, но с вероятностью  $1 - \pi(t)$  она становится «лакунарной», т. е. такой, что выход из некоторых бассейнов оказывается (в среднем) кинетически затруднен, и блуждающая частица может оказаться запертой в этих бассейнах на неопределенно долгое время. При этом кинетическое «замерзание» становится со временем все более и более вероятным. Подобные свойства релаксации на случайных ландшафтах с бассейновой структурой могут оказаться вполне наблюдаемыми, проявляя себя, например, в виде эффектов старения.

### 3. СЛУЧАЙНЫЕ БЛОЧНО-ИЕРАРХИЧЕСКИЕ МАТРИЦЫ КОНТАКТОВ: СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА И СВЯЗЬ С БЕЗМАСШТАБНЫМИ СЛУЧАЙНЫМИ СЕТЯМИ

Как уже отмечалось во Введении, выявление структурной организации у сложной системы со статистическим беспорядком часто опирается на сетевую парадигму, в основе которой лежит исследование топологических характеристик сети связей, полученной из рассмотрения взаимодействий между элементами системы. Аналитические приемы решения такой задачи, как правило, используют известную связь между топологическими характеристиками случайной сети и спектральными свойствами матриц связности (матриц контактов) сети. Для исследования спектральных свойств матриц связности полностью случайных сетей, известных в литературе как случайные графы Эрдёша–Реньи (ЭР-графы) [25], существует арсенал методов как математически строгих, так и использующих менее строгие подходы, заимствованные из теории неупорядоченных систем (например, метод реплик или методы типа среднего поля Флори [26, 27]).

Между тем в последнее десятилетие, благодаря в основном существенному росту компьютерных возможностей, были получены обширные данные по статистическим характеристикам реальных сетей различной природы — от сетей межмолекулярных контактов в биополимерах до социальных, финансовых сетей и интернета. Оказалось, что в большинстве случаев топологические свойства реальных сетей и спектральные свойства их матриц связности

плохо согласуются с характеристиками полностью случайных ЭР-графов. Как выяснилось, для многих реальных сетей оказалось типичным степенное (а не экспоненциальное, как у ЭР-графов) поведение хвостов вероятностных распределений характеристик сети, благодаря чему подобные сети были выделены в особый класс и получили название безмасштабных (scale-free) сетей. На практике безмасштабность конкретной сети чаще всего устанавливается из распределения степени связности узлов (vertex degree distribution) — числа ближайших соседей у узлов исследуемой сети. В общей постановке, основанной на анализе свойств распределения плотности собственных значений матрицы связности сети, безмасштабностью мы будем называть наличие степенного поведения именно спектральной плотности. При этом топологические характеристики сети, например степень связности, имеют очень широкие распределения, на порядки величины превосходящие по ширине соответствующие распределения для ЭР-графов. Соответствующие аномально широкие распределения мы будем называть полимасштабными (polyscaled).

По-видимому, не будет преувеличением сказать, что блочно-иерархическая упорядоченность является скорее типичной, чем экзотической, для многих сложных систем, сочетающих в себе многомасштабность и случайность. Примеры таких систем легко найти в разных областях математики, физики и биологии: от хаотических отображений в гамильтоновых системах [28, 29], до глобулярных структур полиэлектролитных цепей [30] и иерархической организации биополимеров [31]. Ниже в качестве такого примера мы рассматриваем возможность реализации блочно-иерархических матриц контактов в глобулярных структурах полимерных молекул с топологическими взаимодействиями.

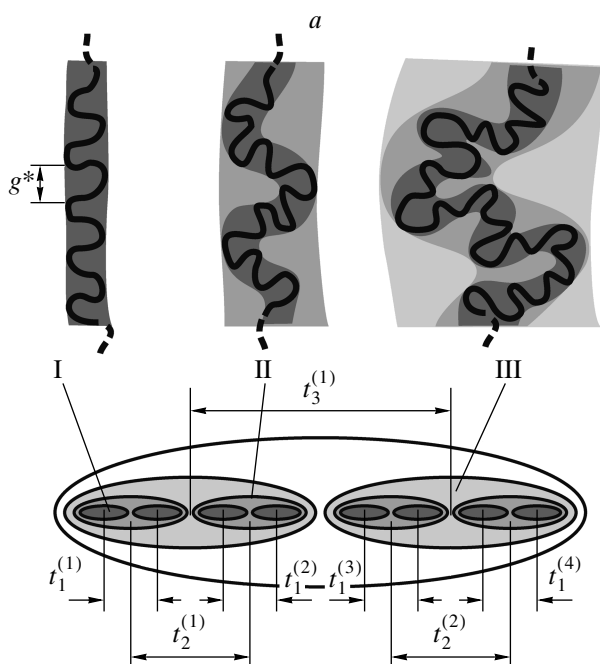
Хорошо известно, что нефантомность полимерных цепей приводит к двум типам взаимодействий — объемным взаимодействиям, исчезающим для бесконечно тонких цепей, и топологическим взаимодействиям, сохраняющимся даже для цепей нулевой толщины. Для достаточно высоких температур полимерная молекула имеет сильнофлуктуирующую клубковую структуру без достоверного термодинамического состояния. Однако при температурах ниже некоторого критического значения  $\Theta$  макромолекула коллапсирует в слабофлуктуирующую каплеобразную, глобулярную структуру. В классических работах [32, 33], посвященных изучению перехода клубок—глобула без топологических взаимодействий, было показано, что при  $T < \Theta$  гло-

булярное состояние может быть описано в рамках вириального приближения с учетом двух- и трехчастичных взаимодействий,  $B = b(T - \Theta)/\Theta < 0$  и  $C = \text{const} > 0$  (см., например, [34, 35]). Подход, развитый в работах [32, 33], является в настоящее время основой современной статистической физики глобулярного состояния, совершенно типичного, например, для биополимеров.

В глобулярной фазе, сформированной незаузленной макромолекулой, топологические ограничения играют роль дополнительного отталкивания. В плохом растворителе (т. е. при  $T < \Theta$ ) существует некоторая критическая длина  $g^*$ , зависящая от температуры и объемных взаимодействий, такая, что цепи, превосходящие  $g^*$ , коллапсируют. Для достаточно длинных полимерных цепей можно определить эти  $g^*$ -звенные участки как новые блочные мономеры, или складки минимального масштаба (1st level folds), рис. 3а. Участок цепи, содержащий несколько последовательных складок-блоков, может «коллапсировать в собственном объеме», формируя складку второго уровня (2nd level fold), затем складки второго уровня образуют складку третьего уровня (3rd level fold) и т. д. Данный процесс иерархической укладки всей цепи завершится, когда все  $g^*$ -звенные участки цепи окажутся внутри одной складки. На рис. 3а изображены три последовательных этапа формирования складчатой глобулярной структуры [16]. Следует обратить внимание на то, что линия, изображающая полимерную цепь, уложенную по описанной выше процедуре, напоминает самоподобную кривую Пеано, вложенную в трехмерное пространство.

Специфическая особенность складчатой глобулы состоит в том, что блочно-иерархическая система складок не разрушается и является термодинамически равновесной. Масштаб складок, показанных оттенками серого на рис. 3а, может рассматриваться как масштаб обрезания взаимодействия между  $g^*$ -звенными блочными «мономерами» цепи. При этом константы взаимодействия  $t_\gamma^{(n)}$  будут отвечать взаимодействию между  $g^*$ -звенными блочными мономерами в складке иерархического уровня  $\gamma$ . Нетрудно понять, что определенные таким образом величины  $t_\gamma^{(n)}$  образуют блочно-иерархическую матрицу  $T$ , изображенную на рис. 3б.

В работе [16] и позже, более строго, в работе [36] было показано, что отсутствие узлов в плотноупакованной складчатой полимерной глобуле приводит к необычным фрактальным свойствам линии, изображающей полимерную цепь, что, в свою очередь, сильно меняет термодинамические свой-



б

$$T = \begin{matrix} \begin{matrix} 0 & t_1^{(1)} & t_2^{(1)} & t_2^{(1)} & t_3^{(1)} & t_3^{(1)} & t_3^{(1)} & t_3^{(1)} \\ t_1^{(1)} & 0 & t_2^{(1)} & t_2^{(1)} & t_3^{(1)} & t_3^{(1)} & t_3^{(1)} & t_3^{(1)} \\ t_2^{(1)} & t_2^{(1)} & 0 & t_1^{(2)} & t_3^{(1)} & t_3^{(1)} & t_3^{(1)} & t_3^{(1)} \\ t_2^{(1)} & t_2^{(1)} & t_1^{(2)} & 0 & t_3^{(1)} & t_3^{(1)} & t_3^{(1)} & t_3^{(1)} \\ t_3^{(1)} & t_3^{(1)} & t_3^{(1)} & t_3^{(1)} & 0 & t_1^{(3)} & t_2^{(2)} & t_2^{(2)} \\ t_3^{(1)} & t_3^{(1)} & t_3^{(1)} & t_3^{(1)} & t_1^{(3)} & 0 & t_2^{(2)} & t_2^{(2)} \\ t_3^{(1)} & t_3^{(1)} & t_3^{(1)} & t_3^{(1)} & t_2^{(2)} & t_2^{(2)} & 0 & t_1^{(4)} \\ t_3^{(1)} & t_3^{(1)} & t_3^{(1)} & t_3^{(1)} & t_2^{(2)} & t_2^{(2)} & t_1^{(4)} & 0 \end{matrix} \end{matrix}$$

Рис. 3. а) Три последовательные стадии образования блочно-иерархической складчатой глобулы: показаны складки первого (I), второго (II) и третьего (III) уровней; б) случайная блочно-иерархическая  $p$ -адическая матрица Паризи  $T$  с  $p = 2$

ства глобулярного состояния. Модель складчатой глобулы была использована для описания самоподобной иерархической структуры в биополимерах, таких как ДНК [37] и хроматин [38], однако не представляет труда найти иные примеры биологических систем, где упорядоченность реализована в виде блочно-иерархической структуры связей физико-химической природы.

Ниже мы обсуждаем также некоторые топологические свойства блочно-иерархических случайных сетей. На основе полученных результатов, мы предлагаем новый способ выращивания полимасштабных сетей (polyscaled networks), не предполагающего контроля текущего состояния сети.

### 3.1. «Тяжелые хвосты» в спектральной плотности гауссовых блочно-иерархических матриц связности

Опишем общую процедуру построения случайной иерархической сети. Зададим  $N = p^\Gamma$  точек, которые являются потенциальными вершинами нашей будущей сети. Иерархическую сеть получаем, соединяя специальным образом вершины ребрами. Информация о способе соединения содержится в матрице связности  $T$  размерности  $N \times N$ , которая кодиру-

ет наличие и отсутствие связей (ребер) между вершинами. А именно, матричный элемент  $T_{i,j}$  равен единице, если вершины  $i$  и  $j$  непосредственно связаны ребром, в противном случае  $T_{i,j} = 0$ ;  $T_{i,j} = T_{j,i}$  и  $T_{i,i} = 0$ . Строим матрицу связности в виде случайной блочно-иерархической ( $p$ -адической) матрицы типа матрицы Паризи (МКП — матрица контактов Паризи). Такая матрица изображена на рис. 3б для  $p = 2$ . Матричные элементы  $T_{i,j} \equiv t_\gamma^{(n)}$  являются случайными величинами с распределением Бернулли:

$$t_\gamma^{(n)} = \begin{cases} 1 & \text{с вероятностью } q_\gamma, \\ 0 & \text{с вероятностью } 1 - q_\gamma, \end{cases} \quad (20)$$

где индекс  $\gamma$ , так же как и в рассмотренных ранее МКП (кинетических матрицах Паризи), нумерует иерархический уровень ( $1 \leq \gamma \leq \gamma_{max} \equiv \Gamma$ ), а индекс  $n$  нумерует блоки матрицы, соответствующие иерархическому уровню  $\gamma$ . Отметим, что в нашей конструкции вероятность  $q_\gamma$  образования связи зависит только от масштаба блоков (т. е. номера уровня  $\gamma$ ) и не зависит от  $n$ . Распределение матричных элементов  $t_\gamma^{(n)}$  матрицы  $T$  размерности  $N \times N$ , где  $N = p^\Gamma$ , полностью определяется набором вероятностей  $\{Q\} = \{q_1, q_2, \dots, q_\Gamma\}$ . Таким образом, элементы  $t_\gamma^{(n)}$  и отвечающие им ребра сети, будучи слу-

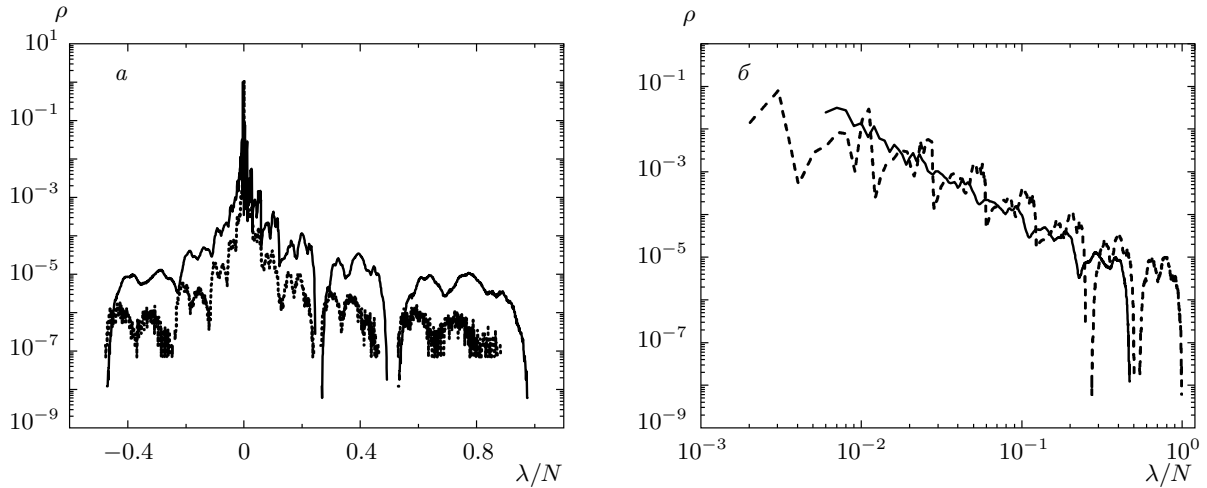


Рис. 4. Спектральная плотность  $\rho(\lambda)$ : *a* —  $\mu = 0.2$ ,  $N = 256$  (сплошная кривая),  $N = 1024$  (пунктирная кривая); *б* — левый (сплошная кривая) и правый (штриховая кривая) хвосты распределения  $\rho(\lambda)$  для  $N = 256$

чайными величинами с биномиальным распределением, иерархически организованы по вероятностям. Ниже мы рассматриваем набор вероятностей  $\{Q\}$  с  $q_\gamma = p^{-\mu\gamma}$  ( $\mu > 0$ ).

Систематическое изучение статистических свойств ансамблей случайных сетей предполагает, в первую очередь, исследование спектральных свойств матриц связности [39, 40]. Пусть  $\lambda_i$  ( $1 \leq i \leq N$ ) есть собственные значения некоторой реализации МКП. Спектральная плотность  $\rho(\lambda)$ , усредненная по ансамблю случайных МКП, определяется стандартным образом:

$$\rho(\lambda) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \langle \delta(\lambda - \lambda_i) \rangle_{\{q_1, q_2, \dots, q_\Gamma\}}. \quad (21)$$

Вычисляя численно спектральную плотность  $\rho(\lambda)$  для определенного выше ансамбля случайных МКП, мы обнаружили [18], что хвосты распределения  $\rho(\lambda)$  явно демонстрируют степенное поведение,  $\rho(\lambda) \propto |\lambda|^{-\chi}$ , с показателем  $\chi = \chi(\mu)$ . Пример спектральной плотности  $\rho(\lambda)$  (для  $N = 256, 1024$  и  $\mu = 0.2$ ) показан на рис. 4*a* в полулогарифмических координатах, а соответствующие хвосты распределения в двойных логарифмических координатах представлены на рис. 4*б*.

Приведем аналитические аргументы, проясняющие данное наблюдение. Определим спектральную плотность  $\rho_G(\lambda)$  случайной блочно-иерархической матрицы  $T$ , предполагая, что распределение Бернулли для матричных элементов матрицы  $T$  заменено гауссовыми распределениями с нулевым сред-

ним и набором дисперсий  $\{S\} = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_\Gamma\}$ , где  $\sigma_\gamma = p^{-\nu\gamma}$  ( $\nu > 0$ ). Заметим, что собственные значения любой регулярной (т. е. трансляционно-инвариантной) блочно-иерархической матрицы контактов с нулевыми диагональными элементами можно выразить через матричные элементы  $t_\gamma^{(n)} \equiv t_\gamma$  аналогично выражению (1) для собственных значений регулярной МКП ([9, 12], см. также обобщение в работе [20]):

$$\lambda_\gamma = p^\gamma t_\gamma - (1-p^{-1}) \sum_{\gamma'=1}^{\gamma} p^{\gamma'} t_{\gamma'} \quad (\gamma = 1, \dots, \Gamma), \quad (22)$$

где собственное значение  $\lambda_\gamma$  вырождено  $p^{\Gamma-\gamma}$ -кратно ( $\gamma = 1, \dots, \Gamma$ ). Отметим, что в отличие от кинетической матрицы, здесь собственное значение  $\lambda_0 = 0$  отсутствует, но имеется собственное значение  $\lambda_0 = -\sum_{\gamma=1}^{\Gamma} p^{\Gamma-\gamma} t_\gamma$ . Кроме того, несмотря на сходство выражений (1) и (22), следует обратить внимание на то, что для собственных значений кинетической матрицы суммирование матричных элементов  $t_{\gamma'}$  идет по пути на дереве от вершины  $(\gamma, n)$  к корню и такой путь единственный, а в (22) суммирование идет от вершины  $(\gamma, n)$  к границе дерева (уровню  $\gamma = 1$ ), т. е. в обратном направлении, и таких путей суммирования  $p^\gamma$ . Для трансляционно-инвариантных блочно-иерархических матриц все эти пути суммирования эквивалентны, поэтому выражение (22) является точным как для кинетических матриц, так и для матриц контактов. Однако для случайных матриц контактов нельзя построить обобщение (22) по той же схеме, какая была исполь-

зована выше для случайных кинетических матриц. Напомним, что для случайной МКП (см. (2))

$$\lambda_{\gamma,n} = -p^\gamma t_\gamma^{(n)} - (1-p^{-1}) \underbrace{\sum_{\gamma'=\gamma+1}^{\Gamma} p^{\gamma'} t_{\gamma'}^{(n')}}_{\Sigma}, \quad (23)$$

т. е. собственное значение  $\lambda_{\gamma,n}$  выражается через линейную комбинацию матричных элементов  $t_{\gamma'}^{(n')}$ , обозначенных  $\Sigma$  и отвечающих переходам через вершины  $(\gamma', n')$  вдоль пути от  $(\gamma, n)$  к корню  $(\Gamma, 1)$  (детали см. в разд. 2). Тогда, принимая ту же геометрическую интерпретацию, что и для пути суммирования в (22), собственное значение  $\lambda_{\gamma,n}$  случайной блочно-иерархической матрицы связности можно было бы попытаться представить линейной комбинацией матричных элементов  $t_{\gamma'}^{(n')}$  вдоль пути от вершины  $(\gamma, n)$  к границе  $p$ -адического дерева (см. рис. 1б). Однако, к сожалению, для трансляционно-неинвариантного случая такая конструкция не определяется только вершиной  $(\gamma, n)$  и зависит от пути суммирования. Собственные значения конкретных реализаций случайной МКП параметризуются путями на поддереве с вершиной  $(\gamma, n)$  в отличие от собственных значений неслучайной МКП, которые параметризуются лишь вершиной поддерева  $(\gamma, n)$ . Таким образом, строго говоря, точное выражение для собственных значений  $\lambda_{\gamma,n}$  нельзя записать в виде линейной комбинации (23) матричных элементов. Тем не менее для вычисления спектральной плотности  $\rho_G(\lambda)$ , усредненной по ансамблю случайных МКП, можно использовать *a posteriori* соображения самоусреднения, делающие рассмотрение самосогласованным. Отметим, что численное моделирование подтверждает наше аналитическое предсказание распределения  $\rho_G(\lambda)$  для  $|\lambda| \gg 1$  в интервале  $0 < \nu < 1$ .

Итак, исходя из соответствия между выражениями (1) и (22), и формально воспользовавшись структурой (23) для  $\lambda_{\gamma,n}$ , мы заменяем в (23) направление пути суммирования на дереве, т. е. заменяем сумму в правой части (22) на  $\sum_{\gamma'=1}^{\gamma} p^{\gamma'} t_{\gamma'}^{(n')}$ , где суммирование распространяется теперь вдоль произвольно выбранного пути от вершины  $(\gamma, n)$  к границе дерева  $\gamma' = 1$  (ср. с (23)). Далее, полагая распределение матричных элементов  $t_\gamma^{(n)}$  гауссовым,

$$P(t_\gamma^{(n)}) = \frac{1}{\sqrt{\pi\sigma_\gamma^2}} \exp\left(-\frac{(t_\gamma^{(n)})^2}{\sigma_\gamma^2}\right), \quad (24)$$

и используя для  $\lambda_{\gamma,n}$  выражение в виде линейной комбинации матричных элементов, аналогич-

ное (23), но с измененным путем суммирования, мы приходим к следующему выражению для спектральной плотности  $\rho_G(\lambda)$ :

$$\begin{aligned} \rho_G(\lambda) &= p^{-\Gamma} \sum_{\gamma,n} \langle \delta(\lambda - \lambda_{\gamma,n}) \rangle_{P(t_\gamma^{(n)})} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{\gamma=1}^{\Gamma} p^{-\gamma} \frac{1}{\sqrt{u_\gamma^2}} \exp\left(-\frac{\lambda^2}{u_\gamma^2}\right), \quad (25) \end{aligned}$$

где для  $\sigma_\gamma = p^{-\nu\gamma}$

$$\begin{aligned} u_\gamma^2 &= p^{2(\gamma-1)} \sigma_\gamma^2 + (1-p^{-1}) \times \\ &\times \sum_{\gamma'=1}^{\gamma-1} p^{2\gamma'} \sigma_{\gamma'}^2 = \frac{p-2}{p} p^{2(1-\nu)\gamma} + \\ &+ \frac{(p-1)^2}{p-p^\nu} (p^{2(1-\nu)\gamma} - 1). \quad (26) \end{aligned}$$

Положив  $p = 2$ , мы можем переписать  $\rho_G(\lambda)$  в (25) при  $\Gamma \rightarrow \infty$  следующим образом:

$$\begin{aligned} \rho_G(\lambda) &\approx \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{\gamma=1}^{\infty} 2^{-(2-\nu)\gamma} \times \\ &\times \exp\left[-\lambda^2 \frac{4-4^\nu}{2^{2(1-\nu)\gamma} - 1}\right]. \quad (27) \end{aligned}$$

Принимая во внимание, что

$$\sum_{\gamma=1}^{\infty} p^{-c_1\gamma} \exp(-tp^{-c_2\gamma}) \approx t^{-c_1/c_2} \quad (t \gg 1), \quad (28)$$

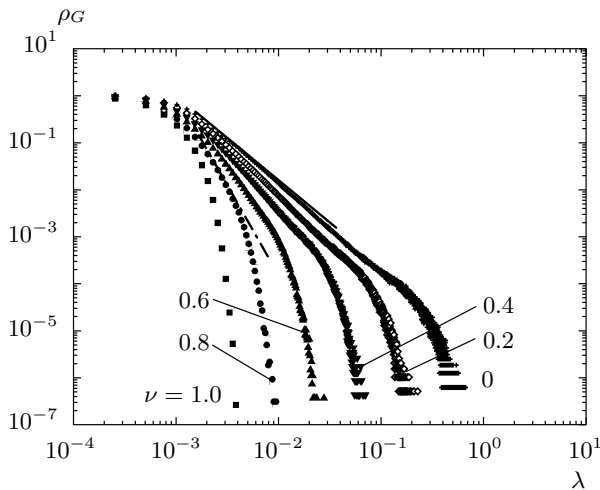
где  $c_1 = 2 - \nu$  и  $c_2 = 1 - \nu$ , получаем следующий асимптотический вид спектральной плотности при  $|\lambda| \gg 1$ :

$$\rho_G(\lambda) \approx |\lambda|^{-\xi(\nu)} \quad (0 < \nu < 1), \quad (29)$$

где

$$\xi(\nu) = (2 - \nu)/(1 - \nu). \quad (30)$$

Соображения, оправдывающие наш вывод выражения (25) для спектральной плотности  $\rho_G(\lambda)$ , заключаются в следующем. Прежде всего заметим, что выражение (25) становится точным, если сделать случайные матричные элементы  $t_\gamma^{(n)}$  вырожденными по  $n$ , тем самым восстановив трансляционную инвариантность блочно-иерархической матрицы  $T$ . Во-вторых, мы видим из результатов численного моделирования, представленных на рис. 5, что соотношения (29), (30) реально выполняются



**Рис. 5.** Спектральная плотность случайных (гауссовых) трансляционно-инвариантных блочно-иерархических матриц контактов. Непрерывная и штрихпунктирная линии имеют соответственно наклоны  $\xi(\nu = 0) = 2$  и  $\xi(\nu = 0.8) = 6$ ; точки:  $\nu = 0$  (+), 0.2 ( $\diamond$ ), 0.4 ( $\blacktriangledown$ ), 0.6 ( $\blacktriangle$ ), 0.8 ( $\bullet$ ), 1.0 ( $\blacksquare$ )

для случайных блочно-иерархических матриц связности. На рис. 5 изображено поведение спектральной плотности  $\rho_G(\lambda)$  для гауссовых случайных блочно-иерархических матриц размера 256.

Правильная асимптотика спектральной плотности  $\rho_G(\lambda)$  при  $|\lambda| \gg 1$  возникает, по-видимому, из-за эффективного самоусреднения суммы матричных элементов  $\sum_{\gamma'=1}^{\gamma} p^{\gamma'} t_{\gamma}^{(n')}$  вдоль каждого конкретного пути (от рассматриваемой вершины к границе дерева) для матриц, заданных распределениями  $\{\mathcal{S}\} = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots\}$ . Нетрудно видеть, что в сумме в (26) для  $\sigma_{\gamma} = p^{-\nu\gamma}$  нижний предел суммирования может быть сдвинут с  $\gamma' = 1$  к  $\gamma' \rightarrow -\infty$ . Асимптотически результат для  $u_{\gamma}^2$  останется без изменений, если  $0 < \nu < 1$ . Такое расширение пределов суммирования означает, что вычисление спектральной плотности (и, в частности,  $\lambda_{\gamma,n}$ ) включает суммирование вдоль бесконечных путей распространяющихся от  $-\infty$  вплоть до иерархического уровня  $\gamma$ . Можно ожидать, что для  $\sigma_{\gamma} = p^{-\nu\gamma}$  ( $0 < \nu < 1$ ), из-за сходимости суммы  $\sum_{\gamma'=-\infty}^{\gamma} p^{2\gamma'} \sigma_{\gamma'}^2$ , вклад в собственное значение  $\lambda_{\gamma,n}$  не зависит от конкретных путей суммирования, идущих из вершины уровня  $\gamma$  в  $-\infty$ , т. е. эффективные собственные значения оказываются вырождены по индексу  $n$ . В результате все сводится к трансляционно-инвариантной МКП, для которой выражение (25) является точным.

Из (29) и рис. 5 легко увидеть, что при  $\nu \geq 1$

степенное поведение спектральной плотности  $\rho_G(\lambda)$  не наблюдается. Этот факт заслуживает специального обсуждения. Возвращаясь к выражению (26), мы видим, что при  $\nu \geq 1$  нижний предел суммирования по  $\gamma'$  не может быть сдвинут к  $-\infty$ , поскольку соответствующая сумма в этом случае будет расходящейся. Таким образом, вклад в собственное значение (и, следовательно, в спектральную плотность) при  $\nu \geq 1$  сильно зависит от конфигурации конкретного пути на дереве Кэли. В этом случае соображения о самоусреднении спектральной плотности не могут быть использованы, и нам пока трудно сказать что-либо определенное о поведении  $\rho_G(\lambda)$  при  $\nu \geq 1$ .

В заключение этой части данного раздела заметим, что наш подход к построению «тяжелого хвоста» (т. е. степенной зависимости) в спектральной плотности ансамблей случайных графов не является уникальным. Специального внимания заслуживает недавняя работа [41], где предложено делить гауссовы случайные матрицы на случайные фрагменты с некоторой заданной функцией распределения. Применение такой процедуры к случайным графам приводит в работе [42] к интерполяции спектральной плотности между соответствующими выражениями для безмасштабных и полностью случайных сетей.

### 3.2. Иерархическое выращивание полимасштабных случайных сетей

Можно различать два принципиально разных метода построения безмасштабной сети. Один из них, предложенный, в основном, в иллюстративных целях, заключается в построении иерархического графа с определенными фрактальными свойствами [42]. Поскольку в этом случае графы являются детерминистическими, нет смысла говорить о статистике их спектров. Другой широко используемый метод имеет дело с различными вариантами итерационного построения случайной сети с предпочтительным присоединением (preferential attachment) узлов [43], когда новые узлы добавляются к узлам сети с вероятностью, зависящей от уже существующей степени связности (числа прямых соединений данного узла с другими узлами). Почти все известные статистические характеристики безмасштабных сетей, включая спектральную плотность матрицы связности, получены для сетей, построенных таким методом. Соответствующая спектральная плотность имеет характерный вид треугольного распределения в объеме с хвостами, убывающими по степенному закону. Заметим, что построение безмасштабной сети

методом предпочтительного присоединения основано на локально неоднородной процедуре выращивания сети с неограниченной эволюционной памятью.

В отличие от этого, мы предлагаем ниже другой подход к конструированию случайной блочно-иерархической сети со степенным поведением спектральной плотности, основанный на равномерной и параллельной (а не пошаговой) процедуре. А именно, мы конструируем случайные безмасштабные сети согласно матрице связности, получаемой из подходящей стохастизации блочно-иерархической матрицы типа матрицы Паризи.

Особенность и новизна нашей конструкции заключается в том, что мы строим кластеры ребер с иерархически организованными вероятностями, в то время как типичная процедура использует иерархическую группировку вершин случайного графа (сети). Это позволяет строить иерархическую сеть путем локально однородного выращивания без эволюционной памяти. Наша процедура выращивания сети не предполагает какой-либо метрической структуры графа (сети) и оставляет граф чисто топологическим. В отличие от этого, традиционная группировка вершин неявно предполагает наличие метрики на множестве вершин графа (сети), поскольку такая группировка обычно использует понятие «близких» (или «далеких») вершин.

Чтобы лучше понять спектральные свойства случайных иерархических графов, можно воспользоваться связью между теорией случайных матриц и теорией случайных графов (сетей). Спектральная плотность ансамбля случайных симметричных матриц связности,

$$\rho(\lambda) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \langle \delta(\lambda - \lambda_i) \rangle_{\{q_1, q_2, \dots, q_r\}},$$

непосредственно связана с топологической структурой графа, поскольку величина

$$M_k = \frac{1}{N} \int \lambda^k \rho(\lambda) d\lambda = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \lambda_i^k \quad (31)$$

определяет (с точностью до множителя  $N$ ) среднее число  $k$ -шаговых петель на случайном графе (см., например, работу [39]). В частности, как было показано [44], в термодинамическом пределе ( $N \rightarrow \infty$ ) спектральные свойства случайных ЭР-графов [25] совпадают со спектральными свойствами случайных вещественных симметричных матриц. Этот результат является исходным пунктом нашего рассмотрения. Напомним, что элементы  $A_{i,j}$  матрицы

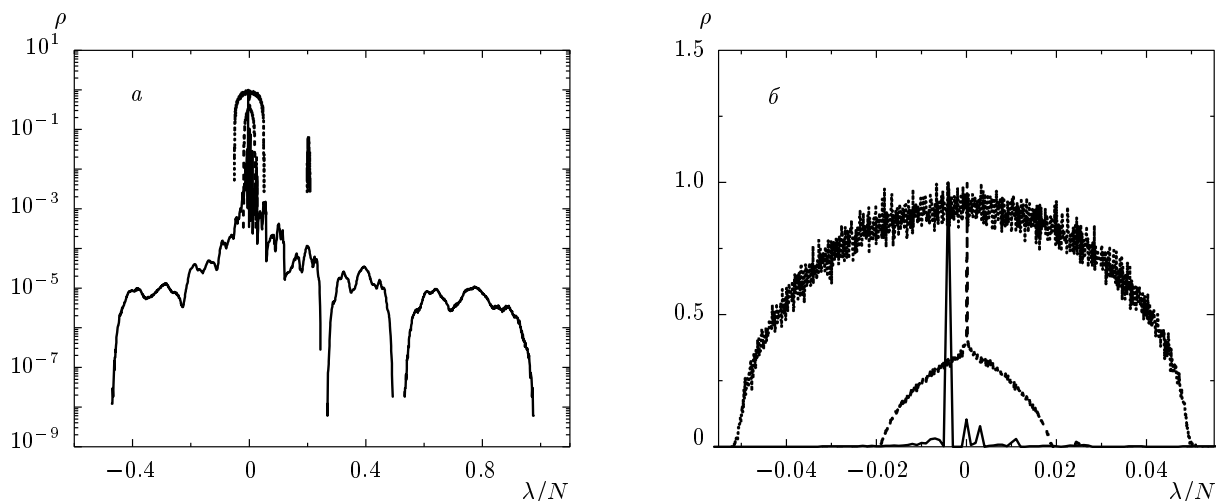
связности ЭР-графа являются случайными величинами из распределения Бернулли:  $A_{i,j} = 1$  или  $A_{i,j} = 0$  с вероятностью соответственно  $q$  или  $1 - q$ .

Для ансамбля случайных ЭР-графов плотность распределения  $\rho_A(\lambda)$  собственных значений матрицы связности  $A$  может быть вычислена аналитически в термодинамическом пределе ( $N \rightarrow \infty$ ) и имеет вид полукругового распределения Вигнера–Дайсона (Wigner–Dyson semicircle law) [45], известного для гауссовых случайных матриц. А именно, в работе [44] доказано следующее утверждение. Пусть  $B$  действительная симметричная матрица размерности  $N \times N$  с независимыми случайными матричными элементами  $B_{i,j}$  из, скажем, гауссова распределения  $P(B_{i,j})$  с  $\langle B_{i,j} \rangle = 0$  и  $\langle B_{i,j}^2 \rangle = \sigma^2$ . Тогда в пределе  $N \rightarrow \infty$  спектральная плотность  $\rho_B(\lambda)$  ансамбля матриц  $B$  асимптотически стремится к полукруговому распределению:

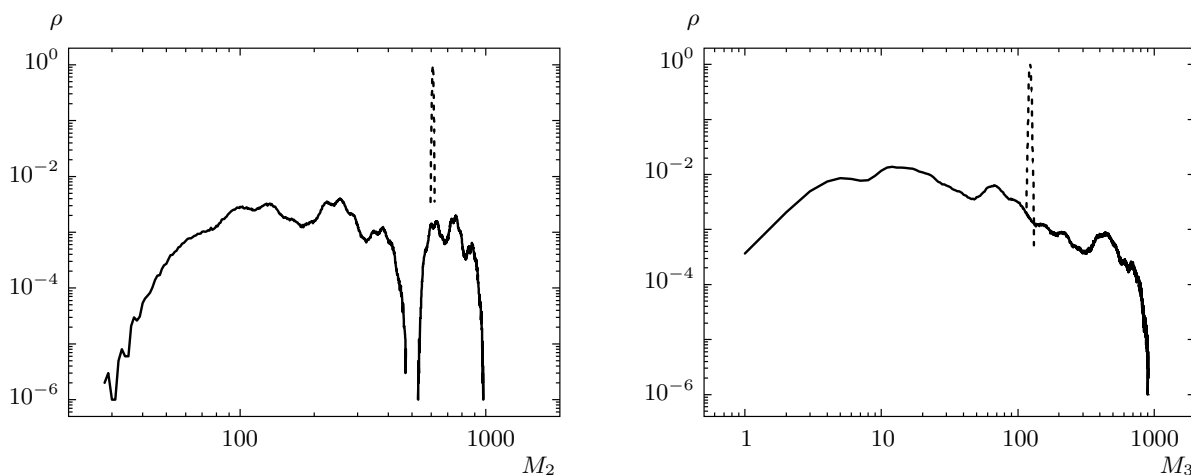
$$\rho_B(\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi\sigma^2} \sqrt{4N\sigma^2 - \lambda^2}, & |\lambda| < \sqrt{4N\sigma^2}, \\ 0, & |\lambda| > \sqrt{4N\sigma^2}. \end{cases} \quad (32)$$

Если  $\sigma^2 = q(1 - q)$ , то  $\rho_A(\lambda) = \rho_B(\lambda)$  для  $N \rightarrow \infty$ , т. е. спектральная плотность ансамблей случайных ЭР-графов и гауссовых симметричных действительных матриц совпадает в термодинамическом пределе. Вместе с тем такое совпадение спектральных плотностей случайных графов и случайных гауссовых матриц не следует понимать в буквальном смысле: некоторые спектральные свойства ЭР-графов и случайных гауссовых матриц различны [39, 46]. Например, поскольку  $\langle A_{i,j} \rangle = q$  для матрицы связности ЭР-графа, соответствующее наибольшее собственное значение  $\lambda_1$  растет линейно с размером системы  $N$ , т. е.  $\lambda_1 = Nq$ . Это означает, что полукруговое распределение для случайного ЭР-графа справедливо только для матрицы  $A - \langle A \rangle$ . Кроме того, хвосты распределений спектральной плотности вблизи края спектра различаются у ЭР-графов и гауссовских случайных матриц. Тем не менее сходство между статистическими свойствами случайных ЭР-графов и случайных гауссовых матриц в термодинамическом пределе может служить отправной точкой при аналитическом исследовании статистических свойств иерархических случайных графов. Сравнение спектральных свойств иерархических случайных графов и ЭР-графов приведено на рис. 6.

Результаты численного моделирования распределения вероятности  $P(M_k)$  ( $k = 2, 3$ ) для  $k$ -шаговых петель в случайных иерархических графах для случая  $\mu = 0.2$  показаны на рис. 7. Для сравнения



**Рис. 6.** Сравнение спектральных плотностей матриц связности случайных иерархических сетей (сплошные кривые,  $\mu = 0.2$ ) и случайных ЭР-графов ( $p = 0.2$  — пунктирные кривые,  $p = 0.02$  — штриховые) для  $N = 256$  в полулогарифмических (а) и линейных (б) координатах



**Рис. 7.** Распределения петель в случайных иерархических графах (сплошные кривые) и случайных ЭР-графах (штриховые кривые)

приведено распределение петель на ЭР-графах для  $N = 256$  и  $p = 0.5$ . Напомним, что  $P(M_k)$  означает вероятность иметь на конечном графе среднюю степень связности  $M_k$ .

Видно, что функции распределения  $P(M_2)$  и  $P(M_3)$  для случайных графов, представленных блочно-иерархическими матрицами связности, гораздо шире соответствующих распределений для ЭР-графов с тем же числом вершин, в результате чего соответствующую структуру случайного иерархического графа естественно называть полимасштабной.

Используя метод производящих функций, нетрудно вычислить распределение степени связности в ансамбле случайных блочно-иерархических графов непосредственно по их матрицам связности. Для этого рассмотрим произвольную (например, первую) строку матрицы связности  $T$  (см. рис. 3б). Полное число связей первой вершины графа с остальными вершинами определяется количеством матричных элементов  $t_\gamma^{(1)}$  ( $\gamma = 1, \dots, \Gamma$ ), имеющих в первой строке ненулевое значение (т. е. принимающих значение, равное единице). Таким образом, распределение степени связности,  $\mathcal{P}(m)$ , — это веро-



ятность  $\mathcal{P}$  того, что сумма матричных элементов в первой строке в точности равна  $m$  при условии, что матричные элементы сгруппированы в иерархические блоки и имеют биномиальные распределения  $\{q_1, q_2, \dots, q_\Gamma\}$ , см. (20). В результате для  $\mathcal{P}(m)$  получается следующее выражение (для упрощения записи мы положили  $q_\gamma(t_\gamma^{(1)}) \equiv q_\gamma(t_\gamma)$ ):

$$\mathcal{P}(m) = \sum_{\{t_1 \dots t_\Gamma\}} \left[ \prod_{\gamma=1}^{\Gamma} q_\gamma(t_\gamma) \right] \Delta \left( \sum_{\gamma=0}^{\Gamma} p^\gamma t_{\gamma+1} - m \right), \quad (33)$$

где биномиальные распределения  $q_\gamma(t_\gamma)$  имеют вид

$$q_\gamma(t_\gamma) = p^{-\mu\gamma} \delta_{q_\gamma(t_\gamma), 1} + (1 - p^{-\mu\gamma}) \delta_{q_\gamma(t_\gamma), 0}, \quad (34)$$

а  $\Delta(\dots)$  — символ Кронекера,

$$\Delta(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint dz z^{x-1} = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ 0, & x \neq 0. \end{cases} \quad (35)$$

Подставляя выражения (34) и (35) в (33), после элементарных преобразований получаем

$$\mathcal{P}(m) = \frac{1}{2\pi i} \oint dz z^{-(m+1)} \prod_{\gamma=1}^{\Gamma} W(z, \Gamma), \quad (36)$$

где

$$W(z, \Gamma) = p^{-\mu\gamma} z^{p^\gamma} + 1 - p^{-\mu\gamma}. \quad (37)$$

Для конечных не очень больших значений  $\Gamma$  выражение для функции распределения  $\mathcal{P}(m)$  можно проанализировать численно. Пользуясь тем, что функция  $W(z, \Gamma)$  является полиномом от  $z$ , представим  $\mathcal{P}(m)$  в виде

$$\mathcal{P}(m) = \frac{1}{(m+1)!} \left. \frac{d^{m+1}}{dz^{m+1}} \prod_{\gamma=1}^{\Gamma} W(z, \Gamma) \right|_{z=0}. \quad (38)$$

На рис. 8а изображено семейство кривых  $\mathcal{P}(m)$  для  $\Gamma = 16$  при значениях  $\mu = 0.1, 1.0$ . Для сравнения на рис. 8в показаны распределения  $\mathcal{P}(m)$  при  $\mu = 1.0$ ,  $\Gamma = 16$  и биномиальное распределение  $\mathcal{P}_{ER}(m) = C_N^m q^m (1-q)^{N-m}$  для стандартных ЭР-графов с числом вершин  $N = 2^\Gamma = 2^{16}$  и для  $q = 0.1, 0.5$ . Видно, что распределение  $\mathcal{P}(m)$  числа связей случайной блочно-иерархической сети шире соответствующих распределений случайных ЭР-сетей.

Фрактальная структура распределения  $\mathcal{P}(m)$  для случайных иерархических сетей, отчетливо проявляющаяся на рис. 8а,б, по-видимому, тесно связана с инвариантными мультифрактальными мерами, возникающими в хаотических гамильтоновых системах при исследовании ряда проблем теоретико-числового хаоса, см., например, работу [47]. Действительно, условие  $\Delta \left( \sum_{\gamma=1}^{\Gamma} p^\gamma t_\gamma - m \right)$  в выражении (33) при  $\Gamma \rightarrow \infty$  есть не что иное, как бинарное разложение числа  $m$ ,

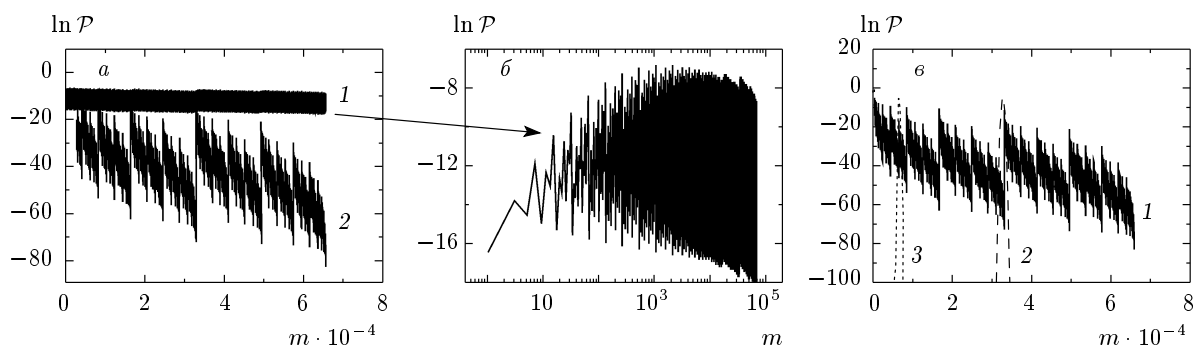
$$m = t_1 2^0 + t_2 2^1 + t_3 2^2 + \dots + t_{\gamma+1} 2^\gamma + \dots,$$

где коэффициенты  $t_\gamma$  принимают значения 1 или 0 с соответствующими вероятностями  $q_\gamma(t_\gamma)$ , определенными в (34). Заметим, что сходное разложение вида  $\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k u^{-k}$ , где  $u > 1$  и  $\varepsilon_k$  принимает значения  $\pm 1$  (с равной вероятностью  $\frac{1}{2}$  независимо от  $k$ ) известно в литературе как сингулярная мера Эрдёша [48–50]. Наблюдающаяся фрактальная структура функции распределения  $\mathcal{P}(m)$  возникает из-за эффектов несоизмеримости теоретико-числовой природы: некоторые значения  $m$  допускают множество различных разложений в виде бинарной последовательности со случайными коэффициентами, в то время как другие значения  $m$  имеют гораздо меньше возможностей такого разложения.

#### 4. ВЫВОДЫ

Прежде всего мы хотели бы заметить, что обнаруженная связь между релаксационной кинетикой на стохастизованных ультраметрических ландшафтах и направленными полимерами на деревьях с беспорядком может оказаться весьма многообещающей для установления более глубокого соответствия между  $p$ -адическими стохастическими моделями и моделями с беспорядком на древообразных структурах. Мы полагаем, что изложенное в разд. 2 рассмотрение делает определенный шаг в этом направлении.

Исследование свойств случайных иерархических графов, представленное в разд. 3, далеко от полноты, и многие другие свойства должны быть также рассмотрены (например, собственные векторы, отношение моментов (inverse participation ratio) и т.д. — см., например, работу [40]). Основной целью данного обсуждения является демонстрация принципиальной разницы между статистическими свойствами случайных графов, построенных блочно-иерархическим образом, и полностью случайных



**Рис. 8.** а) Семейство распределений  $\mathcal{P}(m)$  для  $\Gamma = 16$  при  $\mu = 0.1$  (1) и  $\mu = 1.0$  (2); б) плотность распределения  $\mathcal{P}(m)$  в двойном логарифмическом масштабе для  $\mu = 0.1$  и  $\Gamma = 16$ ; в) сравнение  $\mathcal{P}(m)$  для случайного блочно-иерархического графа ( $\mu = 1.0$ ,  $\Gamma = 16$ , кривая 1) и  $\mathcal{P}_{ER}(m)$  для ЭР-графа при  $N = 2^{16}$  и  $q = 0.1$  (2), 0.5 (3)

ЭР-графов. Степенное поведение хвостов спектральной плотности матриц связности случайных блочно-иерархических графов позволяет отнести рассмотренные иерархические графы (сети) к семейству безмасштабных, в то время как по топологическим отличиям от ЭР-графов данные сети относятся к семейству полимасштабных.

В заключение мы хотели бы еще раз подчеркнуть сходство и различие двух методов построения безмасштабных сетей. Вкратце основные черты этих подходов сводятся к следующему.

1) Первый метод, широко обсуждаемый в литературе, основан в основном на процедуре предпочтительного присоединения, когда сеть выращивается с помощью существенно немарковского (по приращениям) эволюционного процесса с неограниченной памятью. В определенном смысле такая эволюция требует контроля всей структуры сети на каждом шаге, поскольку возникновение новых связей зависит от текущего распределения степени связности по всем вершинам графа (сети). С этой точки зрения последовательное выращивание безмасштабной сети можно условно назвать нелинейной эволюцией.

2) В данной работе мы рассмотрели существенно другой механизм образования безмасштабной сети. Иерархическая организация вероятностей образования кластеров связей в топологической сети составляет основную идею нашей конструкции, которая является по сути марковской.

Суммируя, подчеркнем, что существуют два важных свойства иерархических безмасштабных сетей, построенных в нашей работе. Прежде всего любой подграф, принадлежащий определенному иерархическому уровню  $\gamma$ , является полностью

случайным графом, поскольку образование кластера связей (подграфа) на каждом иерархическом уровне полностью некоррелировано. Далее, случайные подграфы, ассоциированные с различными иерархическими уровнями организации связей в сети, могут быть различными, так что сеть в целом, вообще говоря, неоднородна. Тем не менее, как мы видели, последовательные вложения подграфов, соответствующих различным уровням иерархии, в очень широком диапазоне вероятностей генерации,  $\{Q\} = \{q_1, q_2, \dots\}$ , приводят (в зависимости от исследуемых статистических характеристик) к безмасштабной (или полимасштабной) структуре сети. Данное наблюдение является достаточно неожиданным, поскольку в нашем случае безмасштабность достигается существенно марковской процедурой выращивания сети без эволюционной памяти. Это наводит на мысль, что случайные безмасштабные иерархические сети могут встречаться среди тех естественных сетей, происхождение которых не предполагает условий для осуществления существенно коррелированных эволюционных событий. В частности, безмасштабные иерархические сети, например, химической природы, могли бы представить определенный интерес для предбиологической проблематики, адресованной формированию и развитию первичных форм иерархической структурно-функциональной организации биологического типа.

Авторы выражают благодарность К. В. Башеву за помощь в осуществлении компьютерных расчетов, О. Бохигасу (O. Bohigas) и Я. В. Федорову за плодотворные обсуждения на различных

этапах работы и М. Мезарду (М. Mezard) за важные замечания, касающиеся связи случайных блочно-иерархических кинетических матриц со статистикой направленных полимеров на случайных деревьях. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант № 07-02-00612а) и Программы № 15 Президиума РАН.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

Исторически, собственные векторы и собственные значения кинетической матрицы Паризи (КМП) были впервые вычислены в работах [9] для частного вида КМП, отвечающего ультраметрическому случайному блужданию на регулярном 2-адическом дереве. Позже в работе [12] было доказано, что спектр КМП, найденный в работах [9], совпадает со спектром трансляционно-инвариантного  $p$ -адического псевдодифференциального оператора Владимирова [6] (см. выражение (1)). В дальнейшем в работах [20, 51] был построен метод вычисления спектров  $p$ -адических псевдодифференциальных операторов вполне общего вида и первоначальная конструкция из [9] была, таким образом, обобщена и для трансляционно-неинвариантных симметричных КМП (см. выражение (2)). Ниже мы поясняем основные элементы этой конструкции, пользуясь матричным представлением.

В моделях ультраметрического случайного блуждания естественным образом возникают КМП, и структура собственных векторов КМП прямо отражает конструкцию этого случайного процесса. Для описания собственных векторов КМП прежде всего построим ультраметрическое пространство.

Рассмотрим множество точек  $B_p(\Gamma)$ , перенумерованных индексом  $i = 1, \dots, N$ , где  $N = p^\Gamma$  и  $p \geq 2$ . Введем ультраметрику на  $B_p(\Gamma)$ . С этой целью построим регулярно ветвящийся  $p$ -адический граф  $G_p(\Gamma)$  (дерево Кэли с индексом ветвления  $p + 1$ ), конечные узлы которого есть множество  $B_p(\Gamma)$ . Граф  $G_p(\Gamma)$ , таким образом, имеет  $\Gamma$  иерархических уровней по построению. Будем считать, что расстояние  $d(i, j)$  между любыми двумя точками  $i, j \in B_p(\Gamma)$  определяется вершиной наименьшего поддерева (подграфа)  $G_p(\gamma, n_\gamma) \subseteq G_p(\Gamma)$ , конечные узлы которого включают точки  $i$  и  $j$ . В наших обозначениях  $1 \leq \gamma \leq \Gamma$  указывает номер уровня на дереве  $G(\Gamma)$ , на котором расположена вершина подграфа  $G_p(\gamma, n_\gamma)$ , а  $1 \leq n_\gamma \leq p^{\Gamma-\gamma}$  — номер нужной вершины среди  $p^{\Gamma-\gamma}$  вершин, расположенных на уровне  $\gamma$ . Очевидно, что так введенное на

$B_p(\Gamma)$  расстояние удовлетворяет сильному неравенству треугольника  $d(i, j) \leq \max\{d(i, k), d(j, k)\}$ , т. е. множество  $B_p(\Gamma)$  является ультраметрическим пространством по построению. Заметим, что на регулярном  $p$ -адическом графе  $G_p(\Gamma)$  все подграфы с вершинами, лежащими на одном уровне ветвления в  $G_p(\Gamma)$ , топологически тождественны. Трансляционная инвариантность ультраметрического пространства понимается именно в этом смысле. Наконец, поскольку сильному неравенству треугольника подчинена так называемая  $p$ -адическая числовая норма (где  $p$  — простое число), ультраметрическое пространство описывается  $p$ -адическими числами.

Случайное блуждание на ультраметрическом пространстве есть однородный марковский случайный процесс, все отличительные особенности которого обусловлены, по существу, геометрией ультраметрического пространства. Главная особенность ультраметрического пространства заключается в том, что оно, будучи порожденным регулярным  $p$ -адическим деревом, естественным образом ассоциируется с иерархией вложений меньших областей пространства в большие соответственно иерархической структуре вложений подграфов  $G_p(\gamma, n_\gamma)$  в  $G_p(\Gamma)$ . Иерархию вложений нетрудно усмотреть из рис. 1б. Действительно, множество точек  $B_p(\Gamma)$  есть объединение  $p$  непересекающихся подмножеств по  $p^{\Gamma-1}$  точек в каждом ( $p = 2$  на рис. 1б). Эти подмножества соответствуют  $p$  поддеревам с вершинами, лежащими на уровне  $\Gamma - 1$ . Ультраметрическое расстояние между точками  $i, j \in B_p(\Gamma)$ , принадлежащими разным подмножествам  $B_p(\Gamma - 1, n_{\Gamma-1})$ , определяется вершиной  $(\Gamma, 1)$  (корнем дерева): это расстояние удобно задать как  $p^\Gamma$  согласно определению  $p$ -адической числовой нормы. Каждое из подмножеств уровня  $\Gamma - 1$ , в свою очередь, можно рассматривать как объединение  $p$  непересекающихся подмножеств уровня  $\Gamma - 2$  по  $p^{\Gamma-2}$  состояний в каждом. Расстояние между точками, принадлежащими разным подмножествам уровня  $\gamma = \Gamma - 2$ , зависит от того, на каком уровне эти подмножества сливаются в одно. Если это происходит на следующем уровне  $\Gamma - 1$ , то расстояние между точками равно  $p^{\Gamma-1}$ , а если общим является множество  $B_p(\Gamma)$ , то расстояние между такими точками равно  $p^\Gamma$ . Напомним, что мы рассматривали только те точки, которые принадлежат разным подмножествам уровня  $(\Gamma - 2)$ . Для определения расстояний между точками, принадлежащими одному и тому же подмножеству уровня  $\Gamma - 2$ , требуется дальнейшее разбиение этих подмножеств на вложенные в них меньшие подмножества вплоть до

уровня  $\gamma = 1$ . Соответственно этим разбиениям, на пространстве  $B_p(\Gamma)$  имеется иерархия расстояний  $\{p^1, p^2, \dots, p^\Gamma\}$ .

Ультраметрическое случайное блуждание на  $B_p(\Gamma)$  есть однородный марковский процесс, матрица переходов которого задается следующей конструкцией. Зафиксируем пару точек  $i$  и  $j$  из  $B_p(\Gamma)$ . Для заданной пары точек найдем на  $p$ -адическом графе  $G_p(\Gamma)$  наименьший подграф, которому принадлежат точки  $i$  и  $j$ . Такой подграф единственный, и он определяет минимальное подмножество, в котором происходит (симметричный) переход  $i \leftrightarrow j$ . Пусть ему соответствует вершина с индексами  $(\gamma, n_\gamma)$ . На этом подграфе выберем два вложенных в него подграфа нижележащего уровня с вершинами  $(\gamma - 1, n_{\gamma-1})$  и  $(\gamma - 1, n'_{\gamma-1})$ . Заметим, что точки  $i$  и  $j$  заведомо принадлежат разным подграфам (подмножествам) уровня  $\gamma - 1$ . По построению, вероятность перехода  $i \leftrightarrow j$  (в единицу времени) ультраметрического случайного блуждания полностью определяется парой наибольших подмножеств, между которыми происходит переход. Иначе говоря, элементы  $T_{i,j}$  матрицы переходов параметризуются тремя индексами: парой  $(\gamma, n_\gamma)$ , определяющей наименьшее подмножество в иерархии вложений, в котором происходит переход, и дополнительным индексом  $k$  ( $1 \leq k \leq p - 1$ ), фиксирующим пару вложенных в него наибольших подмножеств, между которыми происходит переход. Геометрия ультраметрического пространства, таким образом, порождает блочно-иерархическую структуру матрицы переходов, т. е. структуру КМП. Отметим, что общее число троек  $(\gamma, n_\gamma, k)$ , параметризующих вершины подграфов  $\Gamma$ -уровневого  $p$ -адического графа  $(p^\Gamma - 1)$ , совпадает с числом ненулевых собственных значений КМП размерности  $p^\Gamma \times p^\Gamma$ .

Собственный вектор КМП есть вектор-столбец с  $p^\Gamma$  комплексными (в общем случае) компонентами, отражающий, в определенном смысле, описанную выше структуру бассейнов ультраметрического пространства и конструкцию ультраметрического случайного блуждания. Собственные векторы КМП параметризуются тройками  $(\gamma, n_\gamma, k)$ . Каждому уровню  $\gamma$  сопоставляются  $(p-1)p^\gamma$  собственных векторов  $\mathbf{e}_p(\gamma, n_\gamma, k)$  согласно числу троек  $(\gamma, n_\gamma, k)$  с фиксированным  $\gamma$ . Компоненты собственного вектора, относящегося к уровню  $\gamma$  образуют  $p^{\Gamma-\gamma}$  групп по  $p^\gamma$  элементов в каждой. Только одна из таких групп имеет ненулевые компоненты. Группа ненулевых компонент состоит из  $p$  подгрупп с  $p^{\gamma-1}$  одинаковыми элементами в каждой подгруппе. Компоненты одной из

таких подгрупп равны единице, а компоненты  $p - 1$  оставшихся подгрупп есть комплексные числа вида  $\exp[2\pi i a(\gamma, n_\gamma, k)]$ , подобранные таким образом, чтобы сумма всех ненулевых компонент вектора была равна нулю. Таким образом, тройка  $(\gamma, n_\gamma, k)$  полностью определяет структуру собственного вектора КМП, т. е. число ненулевых компонент вектора-столбца, расположение группы ненулевых компонент в столбце и структуру подгрупп этой группы.

Проиллюстрируем структуру собственных векторов КМП на двух простейших примерах. Возьмем 2-адический граф отвечающий КМП размерности  $8 \times 8$  ( $\Gamma = 3$ ). Уровню  $\gamma = 1$  сопоставляются четыре собственных вектора:

$$\mathbf{e}_2(1, 1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2(1, 2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.1})$$

$$\mathbf{e}_2(1, 3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2(1, 4) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Уровню  $\gamma = 2$  сопоставляются два собственных вектора:

$$\mathbf{e}_2(2, 1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2(2, 2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.2})$$

Наконец, корневой вершине графа сопоставляется один собственный вектор:

$$\mathbf{e}_2(3, 1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.3})$$

Отметим, что блоки 2-адической КМП индексируются только парами  $(\gamma, n)$ . Нетрудно убедиться непосредственной подстановкой, что каждый из выписанных выше векторов является собственным вектором 2-адической КМП. Пополняя набор из семи данных векторов дополнительным единичным вектором  $\mathbf{e}_0$ , получаем полный базис 2-адических симметричных КМП размерности  $8 \times 8$ .

Выпишем явно собственные значения нашей КМП:

$$\begin{aligned} \lambda_{1,1} &= \varepsilon^{(1)} - q_1^{(1)} = \\ &= -2q_1^{(1)} - (1 - 2^{-1}) \sum_{\gamma'=2}^3 2^{\gamma'} q_{\gamma'}^{(1)}, \\ \lambda_{1,2} &= \varepsilon^{(2)} - q_1^{(2)} = \\ &= -2q_1^{(2)} - (1 - 2^{-1}) \sum_{\gamma'=2}^3 2^{\gamma'} q_{\gamma'}^{(2)}, \\ \lambda_{1,3} &= \varepsilon^{(3)} - q_1^{(3)} = \\ &= -2q_1^{(3)} - (1 - 2^{-1}) \sum_{\gamma'=2}^3 2^{\gamma'} q_{\gamma'}^{(3)}, \\ \lambda_{1,4} &= \varepsilon^{(4)} - q_1^{(4)} = \\ &= -2q_1^{(4)} - (1 - 2^{-1}) \sum_{\gamma'=2}^3 2^{\gamma'} q_{\gamma'}^{(4)}, \\ \lambda_{2,1} &= \varepsilon^{(1)} + q_1^{(1)} - 2q_2^{(1)} = \varepsilon^{(2)} + q_1^{(2)} - 2q_2^{(1)} = \\ &= -2^2 q_2^{(1)} - (1 - 2^{-1}) \sum_{\gamma'=2}^3 2^{\gamma'} q_{\gamma'}^{(1)}, \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

$$\begin{aligned} \lambda_{2,2} &= \varepsilon^{(3)} + q_1^{(3)} - 2q_2^{(2)} = \varepsilon^{(4)} + q_1^{(4)} - 2q_2^{(2)} = \\ &= -2^2 q_2^{(2)} - (1 - 2^{-1}) \sum_{\gamma'=2}^3 2^{\gamma'} q_{\gamma'}^{(2)}, \\ \lambda_{3,1} &= \varepsilon^{(1)} + q_1^{(1)} + 2q_2^{(1)} - 4q_3^{(1)} = \\ &= \varepsilon^{(2)} + q_1^{(2)} + 2q_2^{(2)} - 4q_3^{(1)} = \\ &= \varepsilon^{(3)} + q_1^{(3)} + 2q_2^{(2)} - 4q_3^{(1)} = \\ &= \varepsilon^{(4)} + q_1^{(4)} + 2q_2^{(2)} - 4q_3^{(1)} = -2^3 q_3^{(1)}. \end{aligned}$$

Здесь  $q_\gamma^{(n)}$  — недиагональные элементы КМП, а диагональные элементы равны  $\varepsilon^{(m)} = -(1 - 2^{-1}) \times \sum_{\gamma=1}^{\Gamma} 2^\gamma q_\gamma^{(m)}$  по определению кинетической матрицы. Наконец, собственному вектору  $\mathbf{e}(\gamma, n_\gamma)$  соответствует собственное значение  $\lambda_{\gamma, n_\gamma}$ .

Собственному вектору  $\mathbf{e}_0$  соответствует собственное значение  $\lambda_0 = 0$ . Сопоставляя (A.1) с (2), нетрудно увидеть, что выражение

$$\lambda_{\gamma, n} = -p^\gamma q_\gamma^{(n)} - (1 - p^{-1}) \sum_{\gamma'=\gamma+1}^{\Gamma} p^{\gamma'} q_{\gamma'}^{(n')}$$

есть обобщение выражений (A.4) для произвольного  $p$  и  $\Gamma$ .

Покажем теперь структуру собственных векторов 3-адической КМП размерности  $9 \times 9$  ( $\Gamma = 2$ ). Уровню  $\gamma = 2$  сопоставляется одна пара комплексно-сопряженных векторов:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_3(2, 1, 1) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}, \\ \mathbf{e}_3(2, 1, 2) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Уровню  $\gamma = 1$  сопоставляются три пары комплексно-сопряженных векторов:

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_3(1,1,1) &= \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & \mathbf{e}_3(1,1,2) &= \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\
\mathbf{e}_3(1,2,1) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & \mathbf{e}_3(1,2,2) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\
\mathbf{e}_3(1,3,1) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}, & \mathbf{e}_3(1,3,2) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{A.6}$$

Пополнение этих восьми собственных векторов единичным вектором  $\mathbf{e}_0$  образует полный базис симметричных 3-адических КМП размерности  $9 \times 9$ .

В заключение отметим, что трансляционно-инвариантные КМП соответствуют случаю, когда вероятности переходов зависят только от ультраметрического расстояния, т. е. матричные элементы КМП параметризуются номером уровня иерархии  $\gamma$ . В результате собственные значения  $\lambda_\gamma$  вырождены  $(p-1)p^{\Gamma-\gamma}$ -кратно. Трансляционно-неинвариантные КМП, обсуждаемые в статье, соответствуют случаю, когда матричные элементы КМП параметризуются только парами  $(\gamma, n_\gamma)$ , т. е. не зависят от индекса  $k$ . В этом случае каждое собственное значение  $\lambda_{\gamma, n_\gamma}$  вырождено  $(p-1)$ -кратно.

## ЛИТЕРАТУРА

1. K. Johansson, *Comm. Math. Phys.* **209**, 437 (2000).
2. M. Praehofer and H. Spohn, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 4882 (2000).
3. M. L. Mehta, *Random Matrices*, Elsevier Acad. Press, Amsterdam (2004).
4. M. Mezard, G. Parisi, and M. Virasoro, *Spin Glass Theory and Beyond*, World Sci., Singapore (1987).
5. H. Frauenfelder, *Nature Str. Biol.* **2**, 821 (1995).
6. V. S. Vladimirov, I. V. Volovich, and Y. I. Zelenov, *p-Adic Analysis and Mathematical Physics*, World Sci., Singapore (1994).
7. S. Nechaev and R. Voituriez, *J. Phys. A: Math. Gen.* **34**, 11069 (2001).

8. Y. V. Fyodorov and J.-P. Bouchaud, *J. Phys. A: Math. Theor.* **41**, 324009 (2008).
9. A. Ogielsky and D. Stein, *Phys. Rev. Lett.* **55**, 1634 (1985); C. P. Bachas and B. A. Huberman, *Phys. Rev. Lett.* **57**, 1965 (1986).
10. G. Köhler and A. Blumen, *J. Phys. A: Math. Gen.* **20**, 5627 (1987).
11. O. M. Becker and M. Karplus, *J. Chem. Phys.* **106**, 1495 (1997).
12. V. A. Avetisov, A. Kh. Bikulov, and S. V. Kozyrev, *J. Phys. A: Math. Gen.* **32**, 8785 (1999); G. Parisi and N. Sourlas, *Eur. J. Phys. B* **14**, 535 (2000).
13. V. A. Avetisov, A. Kh. Bikulov, S. V. Kozyrev, and V. A. Osipov, *J. Phys. A: Math. Gen.* **35**, 177 (2002).
14. V. A. Avetisov and A. Kh. Bikulov, *Biophys. Rev. and Lett.* **3**, 387 (2008).
15. V. A. Avetisov, A. Kh. Bikulov, and S. K. Nechaev, *J. Phys. A: Math. Theor.* **42**, 075001 (2009).
16. A. Y. Grosberg, S. K. Nechaev, and E. I. Shakhnovich, *J. de Phys.* **49**, 2095 (1988).
17. B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature*, W. H. Freeman and Co., New York (1982).
18. V. A. Avetisov, A. Chertovich, S. K. Nechaev, and O. Vasilyev, arXiv:0811.4518, *J. Stat. Mech.* (2009), in press.
19. R. Albert and A.-L. Barabási, *Rev. Mod. Phys.* **74**, 47 (2002).
20. S. Kozyrev, V. Osipov, and V. Avetisov, *J. Math. Phys.* **46**, 063302 (2005).
21. V. A. Avetisov, A. Kh. Bikulov, and V. A. Osipov, *J. Phys. A: Math. Gen.* **36**, 4239 (2003).
22. B. Derrida and H. Spohn, *J. Stat. Phys.* **51**, 817 (1988).
23. A. Kolmogorov, I. Petrovsky, and N. Piscounov, *Moscow Univ. Bull. Math.* **1**, 1 (1937).
24. В. С. Доценко, *УФН* **163**, 1 (1993).
25. P. Erdős and A. Rényi, *Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci. A* **5**, 17 (1960).
26. G. J. Rodgers, K. Austin, B. Kahng, and D. Kim, *J. Phys. A: Math. Gen.* **38**, 9431 (2005).
27. E. Ben-Naim and P. L. Krapivsky, *Phys. Rev. E* **71**, 026129 (2005).
28. B. V. Chirikov and D. L. Shepelyansky, *Physica D* **13**, 395 (1984).
29. J. D. Meiss and E. Ott, *Physica D* **20**, 387 (1986).
30. A. V. Dobrynin, M. Rubinstein, and S. P. Obukhov, *Macromolecules* **29**, 2974 (1996).
31. P. W. Fenimore, H. Frauenfelder, B. H. McMahon, and R. D. Young, *Physica A* **351**, 1 (2005).
32. I. M. Lifshitz, *J. Eur. Theor. Phys.* **55**, 2408 (1968).
33. I. M. Lifshits, A. Y. Grosberg, and A. R. Khokhlov, *Rev. Mod. Phys.* **50**, 683 (1978).
34. A. Y. Grosberg and A. R. Khokhlov, *Statistical Physics of Macromolecules*, AIP Press, New York (1994).
35. J. des Cloizeaux and G. Jannink, *Polymers in Solution: Their Modelling and Structure*, Oxford Univ. Press, New York (1990).
36. S. Nechaev and O. Vasilyev, *J. Knot Theory Ramific.* **14**, 243 (2005); S. Nechaev and O. Vasilyev, in *Physical and Numerical Models in Knot Theory*, Ch. 22, p. 421, Series on Knots and Everything, WSPC: Singapore (2005).
37. A. Grosberg, Y. Rabin, S. Havlin, and A. Neer, *Europhys. Lett.* **23**, 373 (1993).
38. A. J. Einstein, H.-S. Wu, and J. Gil, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 397 (1998).
39. I. J. Farkas, I. Derényi, A.-L. Barabási, and T. Vicsek, *Phys. Rev. E* **64**, 026704 (2001).
40. K.-I. Goh, B. Kahng, and D. Kim, *Phys. Rev. E* **64**, 051903 (2001).
41. O. Bohigas, J. X. de Carvalho, and M. P. Pato, *Phys. Rev. E* **77**, 011122 (2008).
42. A.-L. Barabási, E. Ravasz, and T. Vicsek, *Physica A* **299**, 559 (2001).
43. A.-L. Barabási and R. Albert, *Science* **286**, 509 (1999); A.-L. Barabási, R. Albert, and H. Jeong, *Physica A* **272**, 173 (1999); A.-L. Barabási, R. Albert, and H. Jeong, *Physica A* **281**, 69 (2000).
44. F. Juhász, in *Algebraic Methods in Graph Theory*, Coll. Math. Soc. J. Bolyai **25**, 313, North-Holland (1981); Z. Füredi and J. Komlós, *Combinatorica* **1**, 233 (1981).
45. F. J. Dyson, *J. Math. Phys.* **3**, 140 (1962); E. P. Wigner, *SIAM Rev.* **9**, 1 (1967).
46. I. Farkas, I. Derényi, H. Jeong et al., *Physica A* **314**, 25 (2002).
47. M. C. Gutzwiller and B. D. Mandelbrot, *Phys. Rev. Lett.* **60**, 673 (1988).
48. P. Erdős, *Amer. J. Math.* **61**, 974 (1939).
49. B. Solomyak, *Ann. Math.* **142**, 611 (1995).
50. N. Sidorov and A. Vershik, *Monatshefte für Mathematik* **126**, 215 (1998).
51. С. В. Козырев, *Изв. РАН, сер. мат.* **66**, 149 (2002).