ЖЭТФ, 2009, том 136, вып. 3 (9), стр. 601–614

ВЛИЯНИЕ РАЗМЕРА МАКРОЧАСТИЦ НА ИХ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ В ПЛАЗМЕ

А. В. Филиппов *

ГНЦ РФ Троицкий институт инновационных и термоядерных исследований
142190, Троицк, Московская обл., Россия

Поступила в редакцию 7 апреля 2009 г.

Рассмотрено электростатическое взаимодействие двух сферических макрочастиц в плазме. Основное внимание уделено изучению взаимодействия на малых расстояниях, когда на передний план выходят эффекты поляризации поверхностного заряда макрочастиц конечного размера. В первой части исследовано взаимодействие точечного заряда с проводящей сферой в равновесной плазме. Показано, что присутствие плазмы приводит к снижению потенциального барьера при сближении двух одноименно заряженных макрочастиц и это снижение оказывается наиболее существенным в случае, когда радиус макрочастицы сравним с дебаевским радиусом экранирования. Во второй части проведено исследование взаимодействия двух проводящих сфер в бисферической системе координат в предположении постоянства их зарядов и в предположении постоянства их поверхностных потенциалов. Второй случай более близок к физике электростатического взаимодействия двух макрочастиц в плазменной среде, в которой электростатический потенциал их поверхности определяется плавающим потенциалом плазмы. Показано, что потенциалы взаимодействия в этих двух случаях сильно различаются, причем в случае постоянных зарядов энергия электростатического поля является потенциалом взаимодействия, а в случае макрочастиц с постоянными, независящими от межчастичного расстояния потенциалами поверхности — нет. В последнем случае необходим учет работы внешних источников по поддержанию потенциалов макрочастиц постоянными. В результате рассмотрения силы взаимодействия на основе максвелловского тензора натяжений установлен вид потенциала взаимодействия и для этого случая. В третьей части взаимодействие двух макрочастиц рассмотрено в сферической системе координат и получены аналитические выражения для потенциалов взаимодействия как для случая постоянных зарядов, так и случая постоянных потенциалов поверхности.

PACS: 52.27.Lw, 41.20.Cv

1. ВВЕДЕНИЕ

Условия фазовых переходов, частоты пылеакустических колебаний, коэффициенты переноса пылевых частиц и т. д. в пылевой плазме определяются потенциалом взаимодействия заряженных пылевых частиц [1, 2]. Потенциал также необходим при численном моделировании свойств пылевой плазмы методами молекулярной динамики. Эксперименты показывают, что на расстояниях, превышающих радиус экранирования, потенциал взаимодействия имеет вид потенциала Юкавы [3–5], причем радиус экранирования близок к дебаевскому электронному радиусу. При исследовании процессов коагуляции и агломерации пылевых частиц важное значение имеет потенциал взаимодействия на малых расстояниях. В этом случае необходим учет размера частиц и связанной с этим поляризации поверхностного заряда [6, 7]. В настоящей работе эта задача в первой части решается на примере взаимодействия точечного заряда с заряженной проводящей сферой в равновесной плазме. Оказалось, что конечный размер частицы в плазме сказывается, главным образом, на величине заряда сферического тела (приводит к перенормировке заряда), а на малых расстояниях влияние плазмы невелико, поэтому во второй части рассмотрено взаимодействие двух пылевых частиц конечного размера без учета эффектов экранирования. В третьей части получены аналитические выражения для потенциала взаимодействия как при условии по-

*E-mail: fav@triniti.ru

стоянства зарядов макрочастиц, так и при условии постоянства их поверхностных потенциалов.

2. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ МАКРОЧАСТИЦЫ КОНЕЧНОГО РАЗМЕРА С ТОЧЕЧНЫМ ЗАРЯДОМ

Рассмотрим влияние размера на взаимодействие макрочастиц в плазме на примере двух макрочастиц, первая из которых имеет радиус a_1 и является проводником, а вторая имеет такой малый радиус, что ее можно рассматривать как точечную. Самосогласованный потенциал макрочастиц и плазмы будем искать на основе линеаризированного уравнения Пуассона–Больцмана [8]:

$$\Delta\phi - k_D^2\phi = 0, \tag{1}$$

где $k_D = \sqrt{8\pi e^2 n_0/T}$ — дебаевская постоянная экранирования, T — температура электронов и ионов в энергетических единицах, e — абсолютное значение заряда электрона, n_0 — концентрация электронов и ионов в невозмущенной плазме. Уравнение (1) получено в предположении, что $e\phi/T \ll 1$, поэтому применимо только в случае, когда можно пренебречь корреляциями в положении электронов и ионов. Вследствие линейности рассматриваемой задачи, суммарный потенциал можно представить в виде $\phi = \phi_1 + \phi_2$ как суперпозицию потенциалов систем зарядов, связанных с каждой из макрочастиц. В равновесной плазме потенциал точечной макрочастицы является дебаевским [8]:

$$\phi_2(r_2) = \frac{eq_2}{r_2}\exp(-k_D r_2), \tag{2}$$

где q_2 — заряд точечной частицы в элементарных зарядах e, r_2 — расстояние из точки наблюдения до точечного заряда (см. рис. 1).

Для нахождения потенциала первой макрочастицы из уравнения (1) с учетом аксиальной симметрии задачи получим

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi_1}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\phi_1}{\partial\theta}\right) - k_D^2\phi_1 = 0. \tag{3}$$

На поверхности макрочастицы с учетом сделанного предположения об ее проводимости имеем граничные условия:

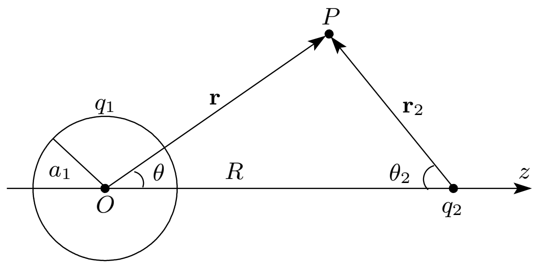

Рис. 1. Схема взаимодействия точечного заряда с макрочастицей: P — точка наблюдения, остальные обозначения см. в тексте

$$\begin{gathered}\phi(r,\theta)\,|_{r=a_1} = (\phi_1+\phi_2)\,|_{r=a_1} = \phi_0,\\ \oint\limits_S \sigma a_1^2\,d\Omega = -\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi}\left.\frac{\partial\phi}{\partial r}\right|_{r=a_1} a_1^2\sin\theta\,d\theta = eq_1.\end{gathered} \tag{4}$$

Здесь r, θ — радиус и полярный угол в сферической системе координат с началом в центре первой макрочастицы и осью, направленной ко второй макрочастице (см. рис. 1), σ — плотность поверхностного заряда, S — поверхность первой макрочастицы, ϕ_0 — некий постоянный потенциал макрочастицы.

Общее решение уравнения (3), обращающееся в нуль на бесконечности, имеет вид

$$\phi_1(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n(\cos\theta)\frac{K_{n+1/2}(k_D r)}{\sqrt{r}}, \tag{5}$$

где $K_{n+1/2}$ — модифицированные функции Бесселя третьего рода или функции Макдональда полуцелого порядка, P_n — полиномы Лежандра.

Для разложения граничных условий (4) по полиномам Лежандра воспользуемся формулой сложения Макдональда [9], которая при $r \le R$ имеет вид

$$\frac{\exp(-\widetilde{r}_2)}{\widetilde{r}_2} = \sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)P_n(\cos\theta)\times \frac{I_{n+1/2}(\widetilde{r})\,K_{n+1/2}\left(\widetilde{R}\right)}{\sqrt{\widetilde{r}\widetilde{R}}}, \tag{6}$$

где

$$r_2 = \sqrt{R^2 + r^2 - 2rR\cos\theta}, \quad \widetilde{r}_2 = k_D r_2,$$

$$\widetilde{r} = k_D r, \quad \widetilde{R} = k_D R,$$

R — межчастичное расстояние, $I_{n+1/2}$ — модифицированные функции Бесселя первого рода или функции Инфельда полуцелого порядка. В итоге для коэффициентов разложения (5) находим:

$$A_0 = \frac{eq_1}{\widetilde{a}_1\sqrt{a_1}K_{3/2}(\widetilde{a}_1)} + \\ + \frac{eq_2 K_{1/2}\left(\widetilde{R}\right)}{\sqrt{R}}\frac{I_{3/2}(\widetilde{a}_1)}{K_{3/2}(\widetilde{a}_1)}, \\ A_n = -(2n+1)\frac{eq_2 K_{n+1/2}\left(\widetilde{R}\right)}{\sqrt{R}} \times \\ \times \frac{I_{n+1/2}(\widetilde{a}_1)}{K_{n+1/2}(\widetilde{a}_1)}, \quad n \ge 1, \tag{7}$$

где $\widetilde{a}_1 = k_D a_1$. Потенциал поверхности макрочастицы определяется соотношением

$$\phi_0 = \frac{eq_1}{a_1\widetilde{a}_1}\frac{K_{1/2}(\widetilde{a}_1)}{K_{3/2}(\widetilde{a}_1)} + \frac{eq_2}{\sqrt{a_1 R}}K_{1/2}\left(\widetilde{R}\right) \times \\ \times \left[I_{1/2}(\widetilde{a}_1) + K_{1/2}(\widetilde{a}_1)\frac{I_{3/2}(\widetilde{a}_1)}{K_{3/2}(\widetilde{a}_1)}\right]. \tag{8}$$

Используя свойства модифицированных функций Бесселя [9], это соотношение можно преобразовать к виду

$$\phi_0 = \frac{1}{1 + k_D a_1}\left[\frac{eq_1}{a_1} + \frac{eq_2}{R}e^{-k_D(R-a_1)}\right]. \tag{9}$$

Видно, что потенциал поверхности макрочастицы при ее сближении с одноименным зарядом растет. (Отметим, что в равновесной плазме макрочастицу окружает облако с противоположным зарядом, поэтому потенциал макрочастицы в плазме оказывается ниже, чем в вакууме на множитель с дебаевской постоянной в знаменателе выражения (9).)

Для монопольного члена в разложении потенциала по мультиполям из формул (5), (7) получим

$$\phi_{1,0}(r,R) = \frac{eq_1}{(1+\widetilde{a}_1)}\frac{e^{-(\widetilde{r}-\widetilde{a}_1)}}{r} + \\ + \frac{eq_2}{r}\frac{e^{-\left(\widetilde{R}+\widetilde{r}\right)}}{2\widetilde{R}}\left[1 - \frac{1-\widetilde{a}_1}{1+\widetilde{a}_1}e^{2\widetilde{a}_1}\right]. \tag{10}$$

Первое слагаемое в правой части — это известный потенциал Дерягина – Ландау – Фервея – Овербика (ДЛФО-потенциал), связанный с конечностью размера уединенной частицы в плазме.

Потенциал взаимодействия макрочастиц в изотермической плазме с постоянным числом электронов и ионов совпадает со свободной энергией [10], для нахождения которой сначала вычислим силу взаимодействия. Для случая одной точечной макрочастицы сила, действующая на нее, вычисляется достаточно просто:

$$F_z = eq_2 E_1\Big|_{\substack{r=R\\ \theta=0}} \equiv -eq_2\frac{\partial\phi_1}{\partial r}\Big|_{\substack{r=R\\ \theta=0}}. \tag{11}$$

Используя (5) и свойства модифицированных функций Бесселя, из (11) находим, что

$$F_z = eq_2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A_n}{R^{3/2}} \times \\ \times \left[(n+1)K_{n+1/2}\left(\widetilde{R}\right) + \widetilde{R}K_{n-1/2}\left(\widetilde{R}\right)\right]. \tag{12}$$

Отсюда после несложных преобразований для нахождения силы взаимодействия получим

$$F_z = \frac{e^2 q_{1\,eff}\,q_2}{R^2}\left(1+\widetilde{R}\right)e^{-\widetilde{R}} + \\ + \frac{e^2q_2^2}{R^2}\left(1+\widetilde{R}\right)K_{1/2}^2\left(\widetilde{R}\right)\frac{I_{3/2}(\widetilde{a}_1)}{K_{3/2}(\widetilde{a}_1)} - \\ - \frac{e^2q_2^2k_D^2}{\widetilde{R}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{I_{n+1/2}(\widetilde{a}_1)}{K_{n+1/2}(\widetilde{a}_1)}K_{n+1/2}\left(\widetilde{R}\right) \times \\ \times \left[(n+1)K_{n+3/2}\left(\widetilde{R}\right) + nK_{n-1/2}\left(\widetilde{R}\right)\right], \tag{13}$$

где $q_{1\,eff} = q_1\exp(k_D a_1)/(1+k_D a_1)$ — эффективный заряд макрочастицы. Интегрируя (13) по межчастичному расстоянию, для потенциала взаимодействия имеем

$$U = U_D + U_1 + U_2, \tag{14}$$

$$U_D = \frac{e^2 q_{1\,eff}\,q_2}{R}e^{-\widetilde{R}}, \tag{15}$$

$$U_1 = \frac{e^2q_2^2}{2R}\frac{I_{3/2}(\widetilde{a}_1)}{K_{3/2}(\widetilde{a}_1)} \times \\ \times \left[K_{1/2}^2\left(\widetilde{R}\right) - 3K_{3/2}^2\left(\widetilde{R}\right)\right], \tag{16}$$

$$U_2 = -\frac{e^2q_2^2}{2R} \times \\ \times \sum_{n=2}^{\infty}(2n+1)\frac{I_{n+1/2}(\widetilde{a}_1)}{K_{n+1/2}(\widetilde{a}_1)}K_{n+1/2}^2\left(\widetilde{R}\right). \tag{17}$$

Обычно в пылевой плазме радиус экранирования много больше радиуса пылевых частиц: $k_D a_1 \ll 1$. Используя разложения модифицированных функций Бесселя при малых значениях аргумента [9], для этого случая из выражений (15)–(17) получим

$$U = \frac{e^2q_1q_2}{R}e^{-\widetilde{R}}\left(1 + \frac{1}{2}\widetilde{a}_1^2\right) + \frac{1}{6}\widetilde{a}_1^2\frac{e^2q_2^2a_1}{R^2}e^{-2\widetilde{R}} - \\ - \frac{e^2q_2^2}{\pi R}\sum_{n=1}^{\infty}K_{n+1/2}^2\left(\widetilde{R}\right)\frac{(\widetilde{a}_1)^{2n+1}}{[(2n-1)!!]^2}, \tag{18}$$

где $(2n-1)!! = 1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)$.

Используя разложение функций Макдональда при больших значениях аргумента $k_D R \gg 1$ [9], выражение (18) преобразуем к виду

$$U = \frac{e^2 q_1 q_2}{R} e^{-\widetilde{R}} \left(1 + \frac{1}{2}\widetilde{a}_1^2\right) + \frac{1}{6}\widetilde{a}_1^2 \frac{e^2 q_2^2 a_1}{R^2} e^{-2\widetilde{R}} - \\ - \frac{e^2 q_2^2}{2R\widetilde{R}} e^{-2\widetilde{R}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\widetilde{a}_1)^{2n+1}}{\left[(2n-1)\,!!\right]^2} \times \\ \times \left[1 + \frac{n(n+1)}{\widetilde{R}} + \frac{n^2(n+1)^2}{4\widetilde{R}^2}\right]. \quad (19)$$

Из этого выражения видно, что при $k_D R \gg 1$ потенциал взаимодействия определяется первым членом (15), который в рассматриваемом случае $k_D a_1 \ll 1$ имеет вид

$$U_0 = \frac{e^2 q_1 q_2}{R} e^{-\widetilde{R}} \left(1 + \frac{1}{2}\widetilde{a}_1^2\right). \quad (20)$$

Видно, что поправка к энергии взаимодействия при больших межчастичных расстояниях содержит только квадратичную поправку на размер макрочастицы. В противоположном случае, при $k_D R \ll 1$, для малых расстояний между макрочастицей и зарядом q_2 из формулы (18) находим, что

$$U = U_0 - \frac{e^2 q_2^2}{2R^2} \frac{a_1^3}{R^2 - a_1^2}. \quad (21)$$

При $k_D = 0$ выражение (21) принимает следующий вид:

$$U = \frac{e^2 q_1 q_2}{R} - \frac{e^2 q_2^2}{2R^2} \frac{a_1^3}{R^2 - a_1^2}, \quad (22)$$

что совпадает с выражением для потенциала взаимодействия точечного заряда с проводящим шаром в вакууме [11, 12].

На рис. 2 приведены зависимости потенциальной энергии взаимодействия от $L = R - a_1$ — наименьшего расстояния между поверхностью макрочастицы и точечным зарядом, — рассчитанные по точным формулам (14)–(17) и согласно приближенным формулам (20)–(22). Видно, что на расстояниях $\widetilde{L} = k_D L > 0.1$ потенциальная энергия очень хорошо описывается потенциалом ДЛФО, умноженным на точечный заряд, а приближенная формула (21) при выполнении условия $k_D a_1 \ll 1$ хорошо описывает потенциал взаимодействия на всех расстояниях. На рис. 2 также видно, что энергия взаимодействия в плазме оказывается меньше, чем в вакууме при всех межчастичных расстояниях.

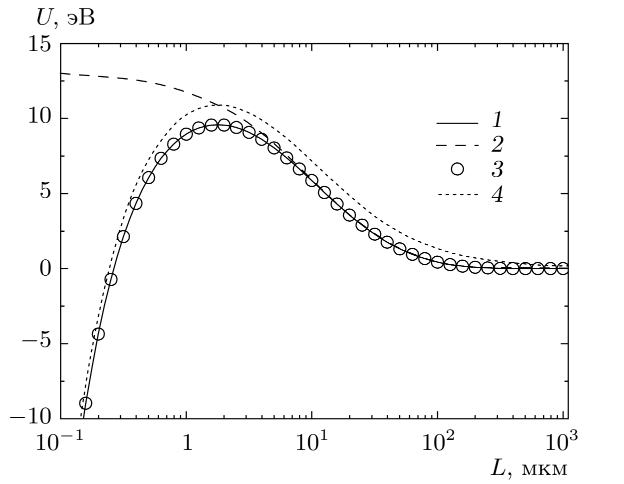

Рис. 2. Зависимости от L потенциальной энергии взаимодействия макрочастицы с точечным зарядом для $q_1 = 10^3$, $a_1 = 10$ мкм, $q_2 = 10^2$, $k_D = 100$ мкм: *1* — точный расчет согласно (14)–(17); *2* — (20), *3* — (21), *4* — (22)

При $k_D a_1 \gg 1$ и, соответственно, $k_D R \gg 1$, имеем (см. [9])

$$\frac{K_{n+1/2}\left(\widetilde{R}\right)}{K_{n+1/2}\left(\widetilde{a}_1\right)} \approx \sqrt{\frac{a_1}{R}}\, e^{-\left(\widetilde{R}-\widetilde{a}_1\right)}.$$

Для $\theta = 0$, $r_2 = R - a_1$ из формулы (6) следует, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) I_{n+1/2}\left(\widetilde{a}_1\right) K_{n+1/2}\left(\widetilde{R}\right) = \frac{\sqrt{a_1 R}}{R - a_1} e^{-\left(\widetilde{R}-\widetilde{a}_1\right)}.$$

С учетом всего этого для свободной энергии для режима сильного экранирования находим:

$$U = U_D - \frac{e^2 q_2^2}{2R} e^{-2\left(\widetilde{R}-\widetilde{a}_1\right)} \times \\ \times \left[\frac{a_1}{R - a_1} - \frac{a_1}{R\left(1 + \widetilde{a}_1\right)}\right]. \quad (23)$$

Выражение (23) определяет асимптотическую зависимость, ниже которой зависимость потенциальной энергии взаимодействия макрочастицы с точечным зарядом от межчастичного расстояния в равновесной плазме при заданных зарядах не может опуститься.

Рассмотрим промежуточный случай экранирования, $k_D a_1 \sim 1$. В этом случае учтем то обстоятельство, что модифицированные функции мнимого аргумента первого рода с ростом порядка быстро убывают [9], поэтому функции Макдональда можно выразить через модифицированные функции мнимого

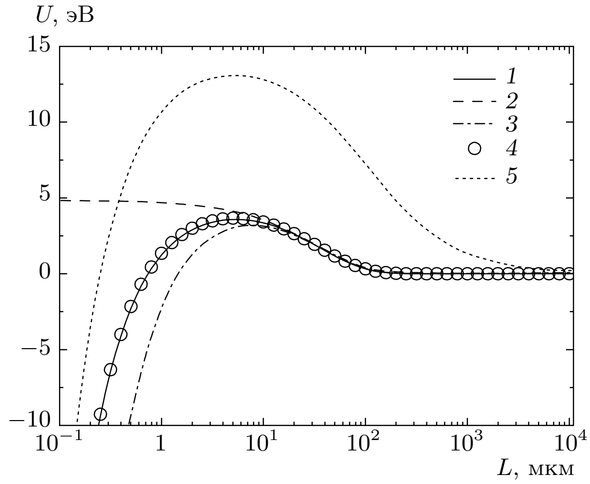

Рис. 3. Зависимости потенциальной энергии взаимодействия макрочастицы с точечным зарядом для $q_1 = 10^4$, $a_1 = 100$ мкм, $q_2 = 10^2$, $k_D = 50$ мкм: *1* — точный расчет согласно (14)–(17); *2* — (15), *3* — (23), *4* — (14)–(16) и (25), *5* — (22)

аргумента второго рода. Тогда из формулы (17) получим

$$U_2 = -\frac{e^2 q_2^2}{2R} e^{-(\widetilde{R}-\widetilde{a}_1)} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a_1}{R}\right)^{2n+1} \times \\ \times \left[1+\frac{\widetilde{a}_1^2}{2\,(2n+3)}+\dots\right] \left[1-\frac{\widetilde{R}^2}{2\,(2n-1)}+\dots\right]. \quad (24)$$

После суммирования, с учетом только линейных по a_1^2 и R^2 членов в квадратных скобках окончательно получим следующее выражение:

$$U_2 = -\frac{e^2 q_2^2}{2R} e^{-(\widetilde{R}-\widetilde{a}_1)} \left[\left(\frac{a_1}{R}\right)^3 \left(\frac{a_1^2}{R^2 - a_1^2} + \right.\right. \\ \left.\left. + \frac{1}{3}\widetilde{R}^2 - \frac{1}{10}\widetilde{a}_1^2\right) + \frac{\widetilde{R}^2-\widetilde{a}_1^2}{4} \ln\frac{R+a_1}{R-a_1} - \frac{1}{2}\widetilde{a}_1\widetilde{R}\right]. \quad (25)$$

На рис. 3 приведены зависимости от L потенциальной энергии взаимодействия для промежуточного режима экранирования. Видно, что ДЛФО-потенциал оказывается хорошим приближением только на расстояниях $k_D L > 0.5$, а формула (25) хорошо описывает потенциал взаимодействия на всех расстояниях. Сравнение кривых *1* и *5* показывает, что при $k_D a_1 \approx 1$ различие энергии взаимодействия в плазме и в вакууме оказывается еще больше. На рис. 2, 3 также видно, что на малых расстояниях между одноименно заряженными сферической макрочастицей и точечным зарядом отталкивание переходит в притяжение, причем в плазме этот переход происходит на бóльших межчастичных расстояниях, чем в вакууме.

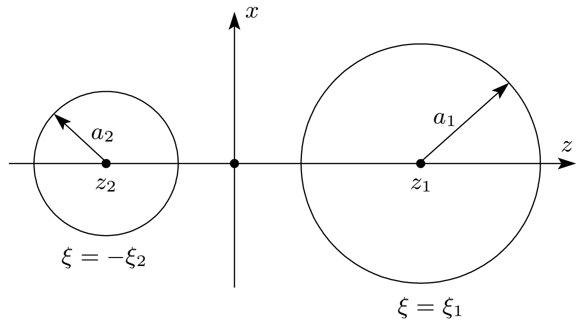

Рис. 4. Геометрия взаимодействия двух макрочастиц радиусами a_1 и a_2

Интересно отметить, что несмотря на больший в 10 раз заряд макрочастицы в расчетах данных на рис. 3, энергия взаимодействия оказывается меньше, чем на рис. 2 (в максимуме 3.6 эВ против 9.6 эВ). Это является следствием влияния как размера макрочастицы (ср. кривые *4* на рис. 2 и *5* на рис. 3), так и эффектов плазменного экранирования.

3. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ДВУХ МАКРОЧАСТИЦ КОНЕЧНОГО РАЗМЕРА. БИСФЕРИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ

Перейдем к изучению взаимодействия двух макрочастиц конечного размера, пренебрегая эффектами экранирования. Введем бисферические координаты (см. [11] и рис. 4):

$$x = \frac{a\sin\eta\cos\alpha}{\operatorname{ch}\xi - \cos\eta}, \quad y = \frac{a\sin\eta\sin\alpha}{\operatorname{ch}\xi - \cos\eta}, \quad z = \frac{a\operatorname{sh}\xi}{\operatorname{ch}\xi - \cos\eta}.$$

В этих координатах поверхности макрочастиц определяются соотношениями $\xi = \xi_1$, $\xi = -\xi_2$,

$$\operatorname{ch}\xi_1 = \frac{R^2 + a_1^2 - a_2^2}{2Ra_1}, \quad \operatorname{ch}\xi_2 = \frac{R^2 + a_2^2 - a_1^2}{2Ra_2},$$

где R — расстояние между центрами макрочастиц. Отметим, что

$$R = z_1 - z_2 = a\,(\operatorname{cth}\xi_1 + \operatorname{cth}\xi_2) = a_1\operatorname{ch}\xi_1 + a_2\operatorname{ch}\xi_2,$$

$$a = a_1\operatorname{sh}\xi_1 = a_2\operatorname{sh}\xi_2, \quad z_1 = a\operatorname{cth}\xi_1 = a_1\operatorname{ch}\xi_1,$$

$$z_2 = -a\operatorname{cth}\xi_2 = -a_2\operatorname{ch}\xi_2.$$

В бисферических координатах коэффициенты Ламэ равны [11]

$$h_\xi = h_\eta = \frac{a}{\operatorname{ch}\xi - \cos\eta}, \quad h_\alpha = \frac{a\sin\eta}{\operatorname{ch}\xi - \cos\eta},$$

поэтому уравнение Лапласа имеет вид [11]

$$\Delta\phi = \frac{(\operatorname{ch}\xi - \cos\eta)^3}{a^2}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{1}{\operatorname{ch}\xi - \cos\eta}\frac{\partial\phi}{\partial\xi}\right) + \frac{1}{\sin\eta}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\sin\eta}{\operatorname{ch}\xi - \cos\eta}\frac{\partial\phi}{\partial\eta}\right) + \frac{1}{\sin^2\eta\,(\operatorname{ch}\xi - \cos\eta)}\frac{\partial^2\phi}{\partial\alpha^2}\right] = 0. \quad (26)$$

После подстановки $\phi = \psi\sqrt{\operatorname{ch}\xi - \cos\eta}$ в уравнение (26) получим

$$\frac{\sqrt{2}\,(\operatorname{ch}\xi - \cos\eta)^{5/2}}{a^2}\left[\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2} + \frac{1}{\sin\eta}\frac{\partial}{\partial\eta}\sin\eta\frac{\partial\psi}{\partial\eta} + \frac{1}{\sin^2\eta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\alpha^2} - \frac{1}{4}\psi\right] = 0. \quad (27)$$

Вследствие аксиальной симметрии рассматриваемой задачи потенциал не зависит от азимутального угла α. В этом случае частными решениями уравнения (27), ограниченными при $\eta = 0$ и $\eta = \pi$ ($\eta = 0$ — ось z от $-\infty$ до $-a$ и от a до ∞; $\eta = \pi$ — отрезок $-a \le z \le a$), являются функции

$$\psi_\ell(\xi,\eta) = \left[A_\ell \operatorname{ch}\left(\ell + \frac{1}{2}\right)\xi + B_\ell \operatorname{sh}\left(\ell + \frac{1}{2}\right)\xi\right] P_\ell(\cos\eta), \quad (28)$$

где $P_\ell(\cos\eta)$ — полиномы Лежандра, $\ell = 0, 1, 2, \ldots$ Будем искать решение (27) в виде ряда:

$$\psi(\xi,\eta) = \sum_{\ell=0}^{\infty}\left[A_\ell \operatorname{ch}\left(\ell + \frac{1}{2}\right)\xi + B_\ell \operatorname{sh}\left(\ell + \frac{1}{2}\right)\xi\right] P_\ell(\cos\eta). \quad (29)$$

Коэффициенты A_ℓ и B_ℓ определим из граничных условий. Для упрощения выкладок положим, что макрочастицы являются проводниками. Сначала рассмотрим случай, когда заданы электростатические потенциалы поверхности макрочастиц, равные ϕ_{1s} и ϕ_{2s},

$$\phi(\xi = \xi_1) = \phi_{1s}, \quad \phi(\xi = -\xi_2) = \phi_{2s}$$

или

$$\psi\,|_{\xi=\xi_1} = \frac{\phi_{1s}}{\sqrt{2\operatorname{ch}\xi_1 - 2\cos\eta}}, \qquad \psi\,|_{\xi=-\xi_2} = \frac{\phi_{2s}}{\sqrt{2\operatorname{ch}\xi_2 - 2\cos\eta}}.$$

Используем разложение [11]

$$\frac{1}{\sqrt{2\operatorname{ch}\xi - 2\cos\eta}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} e^{-(\ell+1/2)|\xi|} P_\ell(\cos\eta). \quad (30)$$

Тогда граничные условия примут вид

$$\begin{aligned}\psi\,|_{\xi=\xi_1} &= \phi_{1s}\sum_{\ell=0}^{\infty} e^{-(\ell+1/2)\xi_1} P_\ell(\cos\eta),\\ \psi\,|_{\xi=-\xi_2} &= \phi_{2s}\sum_{\ell=0}^{\infty} e^{-(\ell+1/2)\xi_2} P_\ell(\cos\eta).\end{aligned} \quad (31)$$

В результате для коэффициентов разложения (29) находим

$$A_\ell = \frac{1}{\operatorname{sh}(\ell+1/2)\,\xi_{12}}\left[\phi_{1s}e^{-(\ell+1/2)\xi_1}\operatorname{sh}\left(\ell+\frac{1}{2}\right)\xi_2 + \phi_{2s}e^{-(\ell+1/2)\xi_2}\operatorname{sh}\left(\ell+\frac{1}{2}\right)\xi_1\right], \quad (32)$$

$$B_\ell = \frac{1}{\operatorname{sh}(\ell+1/2)\,\xi_{12}}\left[\phi_{1s}e^{-(\ell+1/2)\xi_1}\operatorname{ch}\left(\ell+\frac{1}{2}\right)\xi_2 - \phi_{2s}e^{-(\ell+1/2)\xi_2}\operatorname{ch}\left(\ell+\frac{1}{2}\right)\xi_1\right]. \quad (33)$$

Найдем распределения плотности поверхностного заряда на каждой из макрочастиц, которые определены соотношениями

$$\sigma_1(\eta) = -\frac{1}{4\pi}\left.\frac{\partial\phi}{\partial n}\right|_{\xi=\xi_1} = \frac{1}{4\pi h_\xi}\left.\frac{\partial\phi}{\partial\xi}\right|_{\xi=\xi_1},$$

$$\sigma_2(\eta) = -\frac{1}{4\pi}\left.\frac{\partial\phi}{\partial n}\right|_{\xi=-\xi_2} = -\frac{1}{4\pi h_\xi}\left.\frac{\partial\phi}{\partial\xi}\right|_{\xi=-\xi_2}$$

(для первой макрочастицы внешняя нормаль направлена в сторону убывания координаты ξ, поэтому знак минус в выражении для σ_1 исчезает). Получим

$$\sigma_1(\eta) = \frac{1}{4\pi a}\left\{\frac{1}{2}\phi_{1s}\operatorname{sh}\xi_1 + \sqrt{2}\,(\operatorname{ch}\xi_1 - \cos\eta)^{3/2} \times \sum_{\ell=0}^{\infty}\left(\ell+\frac{1}{2}\right)\left[A_\ell \operatorname{sh}\left(\ell+\frac{1}{2}\right)\xi_1 + B_\ell \operatorname{ch}\left(\ell+\frac{1}{2}\right)\xi_1\right] \times P_\ell(\cos\eta)\right\}, \quad (34)$$

$$\sigma_2(\eta) = \frac{1}{4\pi a}\left\{\frac{1}{2}\phi_{2s}\,\mathrm{sh}\,\xi_2 + \sqrt{2}\,(\mathrm{ch}\,\xi_2 - \cos\eta)^{3/2} \times \right.$$
$$\times \sum_{\ell=0}^{\infty}\left(\ell+\frac{1}{2}\right)\left[A_\ell\,\mathrm{sh}\left(\ell+\frac{1}{2}\right)\xi_2 - B_\ell\,\mathrm{ch}\left(\ell+\frac{1}{2}\right)\xi_2\right] \times$$
$$\left. \times P_\ell(\cos\eta)\right\}. \qquad (35)$$

Интегрируя выражения (34) и (35) по поверхностям макрочастиц

$$q_{1(2)} = \int_0^\pi \frac{2\pi a^2 \sigma_{1(2)}}{\left(\mathrm{ch}\,\xi_{1(2)} - \cos\eta\right)^2}\sin\eta\, d\eta, \qquad (36)$$

найдем их заряды:

$$q_1 = \frac{1}{2}a_1\phi_{1s} + a\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{e^{-(\ell+1/2)\xi_1}}{\mathrm{sh}\,(\ell+1/2)\,\xi_{12}} \times \left[\phi_{1s}e^{-(\ell+1/2)\xi_1}\,\mathrm{ch}\left(\ell+\frac{1}{2}\right)\xi_{12} - \phi_{2s}e^{-(\ell+1/2)\xi_2}\right], \qquad (37)$$

$$q_2 = \frac{1}{2}a_2\phi_{2s} + a\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{e^{-(\ell+1/2)\xi_2}}{\mathrm{sh}\,(\ell+1/2)\,\xi_{12}} \times \left[\phi_{2s}e^{-(\ell+1/2)\xi_2}\,\mathrm{ch}\left(\ell+\frac{1}{2}\right)\xi_{12} - \phi_{1s}e^{-(\ell+1/2)\xi_1}\right], \qquad (38)$$

где $\xi_{12} = \xi_1 + \xi_2$. Выражения (37), (38) определяют емкостные коэффициенты:

$$\begin{aligned} c_{11} &= \frac{1}{2}a_1 + a\sum_{\ell=0}^{\infty} e^{-(2\ell+1)\xi_1}\,\mathrm{cth}\left(\ell+\frac{1}{2}\right)\xi_{12}, \\ c_{22} &= \frac{1}{2}a_2 + a\sum_{\ell=0}^{\infty} e^{-(2\ell+1)\xi_2}\,\mathrm{cth}\left(\ell+\frac{1}{2}\right)\xi_{12}, \\ c_{12} &= c_{21} = -a\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{e^{-(\ell+1/2)\xi_{12}}}{\mathrm{sh}\,(\ell+1/2)\,\xi_{12}}. \end{aligned} \qquad (39)$$

Разлагая гиперболические функции в соотношениях (39) в экспоненциальный ряд, после суммирования находим

$$\begin{aligned} c_{ii} &= a\sum_{n=0}^{\infty}\left[\mathrm{sh}\,(\xi_i + n\xi_{12})\right]^{-1}, \quad i = 1, 2; \\ c_{12} &= -a\sum_{n=1}^{\infty}\left(\mathrm{sh}(n\xi_{12})\right)^{-1}. \end{aligned} \qquad (40)$$

С учетом того, что

$$\mathrm{ch}\,\xi_{12} = \frac{R^2 - a_1^2 - a_2^2}{2a_1a_2}, \quad a = \frac{a_1a_2}{R}\,\mathrm{sh}\,\xi_{12},$$

а также

$$R\,\mathrm{sh}\,\xi_1 = a_2\,\mathrm{sh}\,\xi_{12}, \quad R\,\mathrm{sh}\,\xi_2 = a_1\,\mathrm{sh}\,\xi_{12},$$

$$R\,\mathrm{ch}\,\xi_1 = a_1 + a_2\,\mathrm{ch}\,\xi_{12}, \quad R\,\mathrm{ch}\,\xi_2 = a_2 + a_1\,\mathrm{ch}\,\xi_{12},$$

легко можно показать, что выражения (40) тождественны соотношениям для емкостных коэффициентов, приведенным в работе [12] (отметим, что в книге [11] выражения для c_{11} и c_{22} содержат ошибки).

В случае, когда заданы заряды, решив уравнения (37), (38), найдем потенциалы макрочастиц, которые теперь зависят от межчастичного расстояния:

$$\begin{aligned} \phi_{1s} &= s_{11}q_1 + s_{12}q_2, \\ \phi_{2s} &= s_{21}q_1 + s_{22}q_2. \end{aligned} \qquad (41)$$

Здесь s_{11}, s_{12}, s_{21}, s_{22} — потенциальные коэффициенты, равные

$$\begin{aligned} s_{11} &= \frac{c_{22}}{c_{11}c_{22} - c_{12}^2}, \\ s_{12} &= s_{21} = -\frac{c_{12}}{c_{11}c_{22} - c_{12}^2}, \\ s_{22} &= \frac{c_{11}}{c_{11}c_{22} - c_{12}^2}. \end{aligned} \qquad (42)$$

Электростатическая энергия системы двух макрочастиц определяется соотношением [11, 12]

$$W = \frac{1}{2}c_{11}\phi_{1s}^2 + c_{12}\phi_{1s}\phi_{2s} + \frac{1}{2}c_{22}\phi_{2s}^2 = \frac{1}{2}s_{11}q_1^2 + s_{12}q_1q_2 + \frac{1}{2}s_{22}q_2^2. \qquad (43)$$

Рассмотрим случай одинаковых макрочастиц $a_1 = a_2 = a_0$ с равными зарядами $q_1 = q_2 = q_0$. В этом случае полная емкость системы $C(R) = c_{11} + 2c_{12} + c_{22}$, следовательно, $C(R=\infty) = 2a_0$ и $C(R = 2a_0) = 2a_0 \ln 2$ (см. также [11, 12]). Энергия при бесконечно большом межчастичном расстоянии равна

$$W|_{R=\infty} = a_0\phi_0^2 = q_0^2/a_0.$$

Если при сближении макрочастиц их заряды не меняются, то

$$W|_{R=2a_0} = q_0^2/a_0 \ln 2 > W|_{R=\infty};$$

если поддерживаются постоянными потенциалы макрочастиц, то

$$W|_{R=2a_0} = a_0\phi_0^2 \ln 2 < W|_{R=\infty}.$$

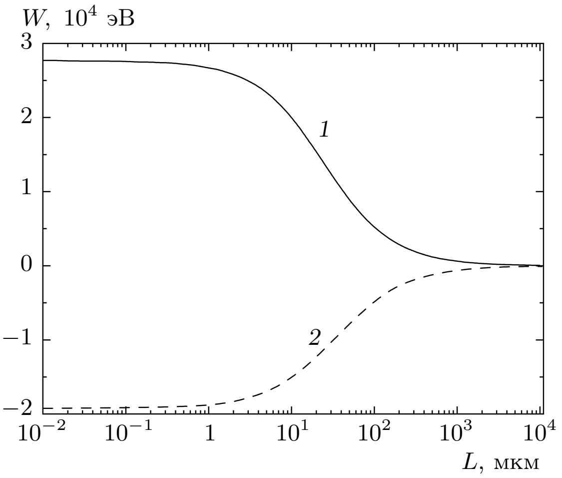

Рис. 5. Зависимости энергии двух макрочастиц одного размера от наименьшего расстояния между поверхностями макрочастиц $L = R - a_1 - a_2$ для $a_1 = a_2 = 10$ мкм, $e\phi_{10} = e\phi_{20} \approx 3T_e$, $eq_{i0} = \phi_{i0}a_i$, $T_e = 1$ эВ: *1* — при постоянных зарядах, *2* — при постоянных потенциалах

Отсюда видно, что если постоянны заряды, как в вакууме, то энергия при сближении макрочастиц растет. Если поддерживаются постоянными потенциалы, как в неравновесной плазме (с неравными нулю стоками электронов и ионов на макрочастицы), то энергия с уменьшением расстояния между частицами уменьшается, что хорошо видно на рис. 5. Особо нужно подчеркнуть, что убывание энергии в последнем случае еще не говорит о наличии притяжения между одноименно заряженными макрочастицами. Для того чтобы показать это, определим силу взаимодействия с использованием тензора натяжений.

К единице поверхности проводника в электростатическом поле приложена сила [11] (для первой макрочастицы, которая находится со стороны положительных значений оси z, поэтому сила отталкивания со стороны второй макрочастицы для нее будет положительной, а притяжения — отрицательной):

$$\mathbf{f}_{1suf} = \mathbf{T}_{1\mathbf{n}} = \frac{E_1^2}{8\pi}\mathbf{n} = \frac{1}{2}\sigma_1\mathbf{E}_1. \tag{44}$$

где $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к элементу поверхности первой макрочастицы, $\mathbf{E}_1$, σ_1 — напряженность электрического поля и плотность поверхностного заряда в этой точке. Из симметрии задачи ясно, что отлична от нуля только z-составляющая силы. Поэтому для определения z-составляющей удельной силы имеем

$$f_{z1} = \frac{1}{2}\sigma_1 E_1\cos\theta \equiv \frac{1}{2}\sigma_1 E_1 \frac{\operatorname{ch}\xi_1\cos\eta - 1}{\operatorname{ch}\xi_1 - \cos\eta}. \tag{45}$$

В бисферических координатах сила определяется выражением

$$F_{z1} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\sigma_1(\eta)E_1(\eta)\frac{\operatorname{ch}\xi_1\cos\eta - 1}{\operatorname{ch}\xi_1 - \cos\eta}h_\eta h_\alpha\,d\eta\,d\alpha = \\ = 4\pi^2a^2\int_{-1}^{1}\frac{\mu\operatorname{ch}\xi_1 - 1}{(\operatorname{ch}\xi_1 - \mu)^3}\sigma_1^2(\mu)\,d\mu, \tag{46}$$

где $\mu = \cos\eta$. После подстановки (34) выражение (46) преобразуем к виду

$$F_{z1} = F_1 + F_2 + F_3, \tag{47}$$

$$F_1 = \frac{1}{16}\phi_{1s}^2\operatorname{sh}^2\xi_1\int_{-1}^{1}\frac{\mu\operatorname{ch}\xi_1 - 1}{(\operatorname{ch}\xi_1 - \mu)^3}d\mu \equiv 0, \tag{48}$$

$$F_2 = \frac{\phi_{1s}\operatorname{sh}\xi_1}{2\sqrt{2}}\int_{-1}^{1}\frac{\mu\operatorname{ch}\xi_1 - 1}{(\operatorname{ch}\xi_1 - \mu)^{3/2}} \times \\ \times\sum_{\ell=0}^{\infty}\left(\ell + \frac{1}{2}\right)P_\ell(\mu)\,D_\ell d\mu, \tag{49}$$

$$F_3 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(\mu\operatorname{ch}\xi_1 - 1)\times \\ \times\left[\sum_{\ell=0}^{\infty}\left(\ell + \frac{1}{2}\right)P_\ell(\mu)\,D_\ell\right]^2 d\mu, \tag{50}$$

где

$$D_\ell = A_\ell\operatorname{sh}\left(\ell + \frac{1}{2}\right)\xi_1 + B_\ell\operatorname{ch}\left(\ell + \frac{1}{2}\right)\xi_1 \equiv \\ \equiv \phi_{1s}e^{-(\ell+1/2)\xi_1}\operatorname{cth}\left(\ell + \frac{1}{2}\right)\xi_{12} - \phi_{2s}e^{-(\ell+1/2)\xi_2}\times \\ \times\operatorname{csch}\left(\ell + \frac{1}{2}\right)\xi_{12}.$$

Для вычисления функции (49) продифференцируем (30) по $d\mu = d\cos\eta$ и воспользуемся тем, что (см. [13, 14])

$$\frac{dP_\ell}{d\mu} = (2\ell - 1)P_{\ell-1} + (2\ell - 5)P_{\ell-3} + \\ + (2\ell - 9)P_{\ell-5} + \ldots, \tag{51}$$

$$\mu\frac{dP_\ell}{d\mu} = \ell P_\ell + (2\ell - 3)P_{\ell-2} + (2\ell - 7)P_{\ell-4} + \ldots$$

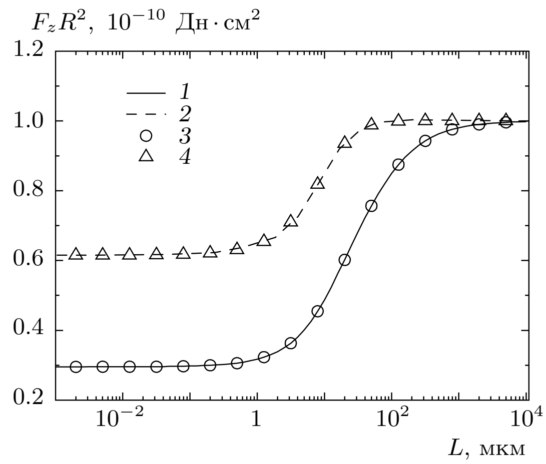

Рис. 6. Зависимости силы взаимодействия двух макрочастиц одного размера от наименьшего расстояния между поверхностями макрочастиц для $a_1 = a_2 = 10$ мкм, $e\phi_{10} = e\phi_{20} \approx 3T_e$, $eq_{i0} = \phi_{i0} a_i$, $T_e = 1$ эВ: *1* — при постоянных потенциалах из (47), *2* — при постоянных зарядах из (47), *3* — численное дифференцирование (54), *4* — численное дифференцирование (55)

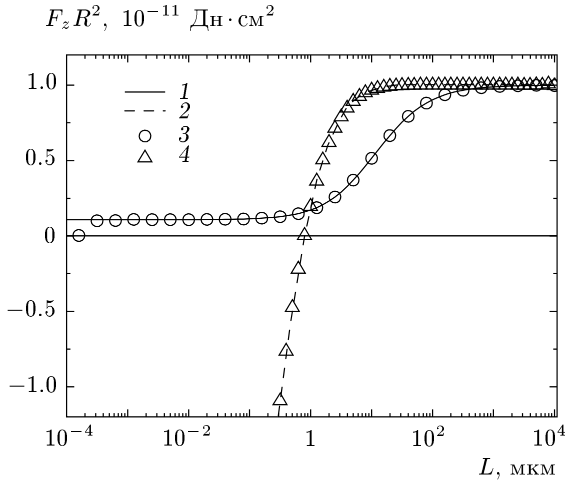

Рис. 7. Зависимости силы взаимодействия двух макрочастиц разного размера от наименьшего расстояния между поверхностями макрочастиц для $a_1 = 10$ мкм, $a_2 = 1$ мкм: *1* — при постоянных потенциалах из (47), *2* — при постоянных зарядах из (47), *3* — численное дифференцирование (54), *4* — численное дифференцирование (55)

Если ℓ четное, то ряды оканчиваются соответственно на $3P_1$ и P_0, если нечетное, то наоборот, на P_0 и $3P_1$. Теперь после интегрирования (49) получим

$$F_2 = \phi_{1s} \operatorname{sh} \xi_1 \sum_{\ell=0}^{\infty} \left[\ell \operatorname{ch} \xi_1 - \left(\ell + \frac{1}{2} \right) e^{-\xi_1} \right] \times \\ \times D_\ell \, e^{-(\ell+1/2)\xi_1} = \\ = \frac{1}{2} \phi_{1s} \operatorname{sh} \xi_1 \sum_{\ell=0}^{\infty} \left[\ell \operatorname{ch} \xi_1 - \left(\ell + \frac{1}{2} \right) e^{-\xi_1} \right] \times \\ \times \left\{ A_\ell \left[1 - e^{-(2\ell+1)\xi_1} \right] + B_\ell \left[1 + e^{-(2\ell+1)\xi_1} \right] \right\}. \quad (52)$$

Используя рекуррентные соотношения для полиномов Лежандра [13, 14], из формулы (50) находим, что

$$F_3 = \frac{1}{4} \sum_{\ell=0}^{\infty} D_\ell \left\{ \operatorname{ch} \xi_1 \left[\ell D_{\ell-1} + (\ell+1) D_{\ell+1} \right] - \\ - (2\ell+1) D_\ell \right\}. \quad (53)$$

На рис. 6, 7 приведены зависимости силы, рассчитанные на основе формул (47) с использованием (52), (53). Мы видим, что для одноименно-заряженных макрочастиц одного радиуса сила имеет отталкивательный характер как в случае постоянных зарядов (см. [15–17]), так и в случае постоянных потенциалов макрочастиц. В расчетах здесь и далее положено, что потенциалы уединенных макрочастиц при $R = \infty$ определяются температурой электронов T_e:

$$e\phi_{10} = e\phi_{20} \approx 3T_e,$$

а при вычислении зарядов при $R = \infty$ использовалась вакуумная связь заряда с потенциалом

$$eq_{i0} = \phi_{i0} a_i, \quad i = 1, 2.$$

В случае разных размеров макрочастиц на малых расстояниях отталкивание переходит в притяжение, причем в случае постоянных зарядов это происходит на большем расстоянии, чем в случае постоянных потенциалов. В последнем случае сила оказывается значительно меньше для макрочастиц как одинакового, так и разного размера. Это связано с тем, что по мере сближения макрочастиц при постоянных потенциалах их заряд уменьшается (см. рис. 8, 9; например, для макрочастицы радиусом 1 мкм на рис. 9 — почти на порядок с 2081 до 303.7).

Интегрируя выражения (52), (53), найдем потенциальную энергию взаимодействия, которая при постоянных потенциалах равна

$$U_\varphi = \frac{1}{2} c_{11} \phi_{10}^2 + c_{12} \phi_{10} \phi_{20} + \frac{1}{2} c_{22} \phi_{20}^2 - \\ - e(q_1 - q_{10}) \phi_{10} - e(q_2 - q_{20}) \phi_{20} - \\ - \frac{1}{2} (\phi_{10}^2 a_1 + \phi_{20}^2 a_2), \quad (54)$$

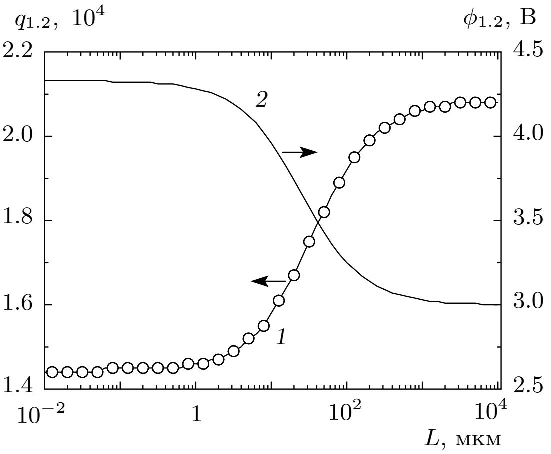

Рис. 8. Зависимости зарядов при постоянных потенциалах (*1*) и потенциалов поверхности при постоянных зарядах (*2*) от наименьшего расстояния между поверхностями двух одинаковых макрочастиц при $a_1 = a_2 = 10$ мкм, $e\phi_{10} = e\phi_{20} \approx 3T_e$, $eq_{i0} = \phi_{i0}a_i$, $T_e = 1$ эВ

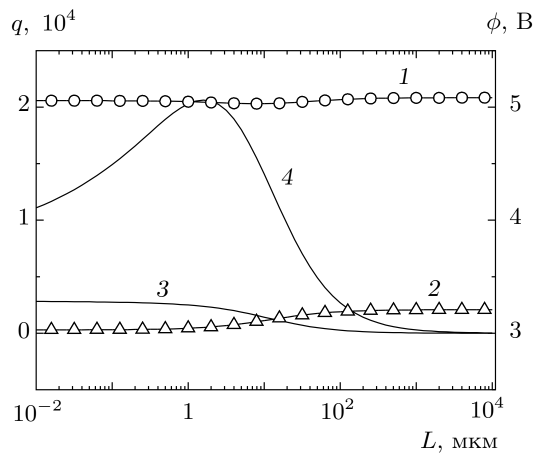

Рис. 9. Зависимости зарядов макрочастиц (*1* — первой, *2* — второй) при постоянных потенциалах и потенциалов поверхности (*3* — первой, *4* — второй) при постоянных зарядах от наименьшего расстояния между поверхностями макрочастиц при $a_1 = 10$ мкм, $a_2 = 1$ мкм, $e\phi_{10} = e\phi_{20} \approx 3T_e$, $eq_{i0} = \phi_{i0}a_i$, $T_e = 1$ эВ

а при постоянных зарядах —

$$U_q = \frac{1}{2}s_{11}e^2q_{10}^2 + s_{12}e^2q_{10}q_{20} + \frac{1}{2}s_{22}e^2q_{20}^2 - \\ - \frac{1}{2}e^2\left(\frac{q_{10}^2}{a_1} + \frac{q_{20}^2}{a_2}\right). \quad (55)$$

В формулах (54), (55) потенциальная энергия при бесконечно большом межчастичном расстоянии принята равной нулю, поэтому из энергии вычитаются собственные энергии частиц (последние слагаемые). Четвертое и пятое слагаемые в правой части (54) — работа внешних источников по поддержанию потенциалов поверхностей макрочастиц постоянными. Используя определение емкостных коэффициентов (37)–(39), выражение (54) можно записать в виде

$$U_\varphi = \frac{1}{2}(a_1 - c_{11})\phi_{10}^2 - c_{12}\phi_{10}\phi_{20} + \\ + \frac{1}{2}(a_2 - c_{22})\phi_{20}^2. \quad (56)$$

На рис. 6, 7 приведены зависимости силы взаимодействия, полученные численным дифференцированием выражений (54), (55). Видно хорошее согласие с данными прямого вычисления силы на основе формул (52), (53) (расхождение на малых расстояниях на рис. 7 в случае постоянных потенциалов связано с ошибками численного дифференцирования). На рис. 8, 9 приведены графики зависимости зарядов макрочастиц от межчастичного расстояния при постоянных зарядах и потенциалах поверхности. Видно, что при постоянных зарядах по мере сближения макрочастиц растут их поверхностные потенциалы, а при постоянных потенциалах поверхности макрочастиц их заряды уменьшаются. Также видно, что в случае частиц разного размера, потенциал поверхности малой макрочастицы проходит через максимум.

На рис. 10, 11 представлены зависимости потенциальной энергии взаимодействия двух макрочастиц, рассчитанные по формулам (54), (55). Видно, что при постоянных потенциалах поверхности энергия взаимодействия оказывается заметно меньше, чем при постоянных зарядах.

Теперь рассмотрим вопрос о характере взаимодействия макрочастиц одного радиуса, несущих разные заряды одного знака. На рис. 12 приведены графики зависимости силы от межчастичного расстояния для разных отношений зарядов $k = q_1/q_2$. Видно, что уже при превышении заряда одной из макрочастиц на 0.35 % заряда другой на малых расстояниях появляется область притяжения между макрочастицами (при $k = 1.003$ притяжение при $L \geq 10^{-6}$ мкм не проявляется). Более точное установление границы затрудняется ограниченной точностью численных расчетов вследствие медленной сходимости рядов в выражениях (52), (53) при вычислении силы взаимодействия на малых межчастичных расстояниях. Все вычисления проводились с двойной точностью с 15 значащими цифрами до членов $\ell = 2000$ включительно (дальней-

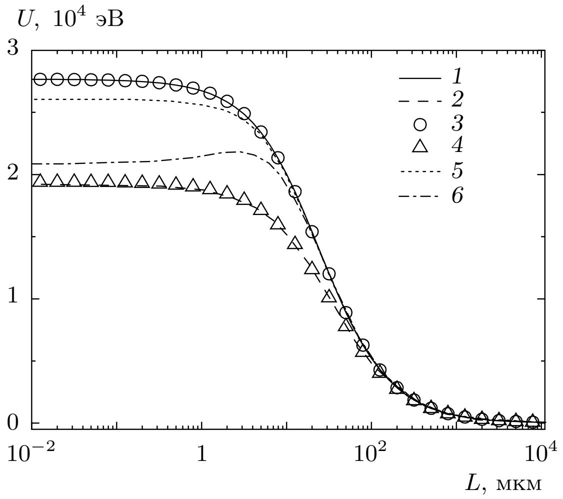

Рис. 10. Зависимости потенциальной энергии взаимодействия двух макрочастиц одного размера от наименьшего расстояния между поверхностями макрочастиц при $a_1 = a_2 = 10$ мкм, $e\phi_{10} = e\phi_{20} \approx 3T_e$, $eq_{i0} = \phi_{i0}a_i$, $T_e = 1$ эВ: *1* — при постоянных зарядах согласно (55), *2* – при постоянных потенциалах из (56), *3* — при постоянных зарядах согласно (66), *4* — при постоянных потенциалах согласно (69), *5* – при постоянных зарядах согласно (70), *6* — при постоянных зарядах согласно [6]

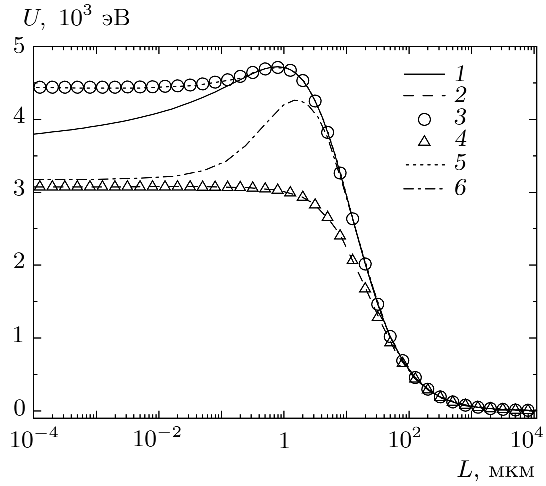

Рис. 11. Зависимости потенциальной энергии взаимодействия двух макрочастиц от наименьшего расстояния между поверхностями макрочастиц при $a_1 = 10$ мкм, $a_2 = 1$ мкм, $e\phi_{10} = e\phi_{20} \approx 3T_e$, $eq_{i0} = \phi_{i0}a_i$, $T_e = 1$ эВ: *1* — при постоянных зарядах согласно (55), *2* — при постоянных потенциалах из (56), *3* — при постоянных зарядах согласно (66), *4* — при постоянных потенциалах согласно (69), *5* — при постоянных зарядах согласно (70), *6* — при постоянных зарядах согласно [6]

шее увеличение числа членов не приводило к повышению точности конечных результатов). О точности вычислений можно судить по следующим данным: при $L = R - a_1 - a_2 = 10^{-6}$ мкм полная емкость двух макрочастиц равна $C = c_{11} + c_{12} = 6.93147187945340$ мкм, а при $L = 2 \cdot 10^{-6}$ мкм она равна $C = 6.93147195331497$ мкм. Линейная экстраполяция к $L = 0$ дает $C = 6.93147180559183$ мкм, что отличается от точного значения емкости $C = a_1 \ln 2 = 6.93147180559945$ только в 13-й значащей цифре.

4. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ДВУХ МАКРОЧАСТИЦ КОНЕЧНОГО РАЗМЕРА. СФЕРИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ

Проведенное в предыдущем разделе рассмотрение взаимодействия макрочастиц в бисферических координатах позволило получить решение в виде суммы бесконечного ряда, которое требует привлечения численных методов. Аналитический анализ решений затруднен, что связано, в первую очередь, с тем, что полученные ряды, как уже отмечалось вы-

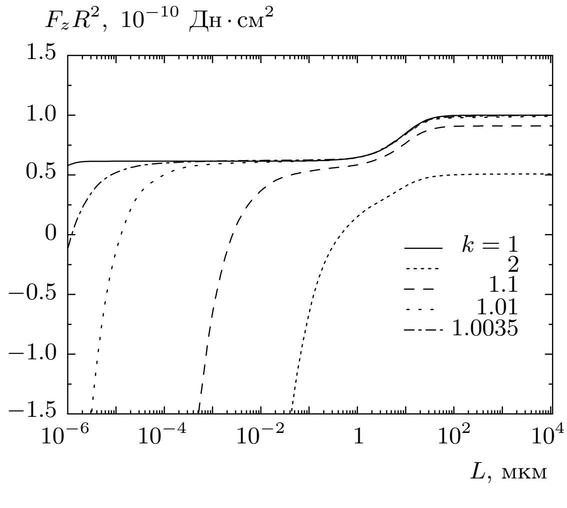

Рис. 12. Зависимости силы от межчастичного расстояния для разных отношений зарядов $k = q_1/q_2$ от наименьшего расстояния между поверхностями макрочастиц при $a_1 = a_2 = 10$ мкм, $eq_1 = \phi_{10}a_1$, $T_e = 1$ эВ

ше, плохо сходятся при малых межчастичных расстояниях и не являются разложениями по мультипольным моментам, поскольку

$$\cos\theta = 2\,\mathrm{sh}\,\xi \sum_{\ell=0}^{\infty} e^{-(\ell+1/2)|\xi|} P_\ell(\cos\eta)\,.$$

Поэтому с целью получения приближенных выражений для потенциала взаимодействия проведем рассмотрение данной задачи в сферической системе координат, связанной с одной из макрочастиц (см. рис. 1).

Распределения потенциала зарядов каждой из макрочастиц описываются выражениями

$$\begin{aligned} \phi_1(r,\theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{P_n(\cos\theta)}{r^{n+1}}, \\ \phi_2(r,\theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{P_n(\cos\theta_2)}{r_2^{n+1}}. \end{aligned} \qquad (57)$$

Граничные условия на поверхности каждой из макрочастиц задаются выражениями (4), потенциалы поверхностей обозначим как ϕ_{1s} и ϕ_{2s}. Для разложения распределения потенциала одной из макрочастиц в системе координат другой воспользуемся формулой [13]

$$\frac{P_n(\cos\theta_2)}{r_2^{n+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{n!\,k!} \frac{r^k}{R^{n+k+1}} P_k(\cos\theta)\,, \quad r \le R. \qquad (58)$$

Аналогичное выражение можно написать в системе координат, связанной со второй макрочастицей. Окончательно из граничных условий находим:

$$A_0 = eq_1, \quad B_0 = eq_2, \qquad (59)$$

$$\begin{aligned} A_k + \frac{a_1^{2k+1}}{R^k} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{n!\,k!} \frac{B_n}{R^{n+1}} &= 0, \\ B_k + \frac{a_2^{2k+1}}{R^k} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{n!\,k!} \frac{A_n}{R^{n+1}} &= 0, \\ k = 1, 2, \ldots\,, \end{aligned} \qquad (60)$$

$$\begin{aligned} \phi_{1s} &= \frac{eq_1}{a_1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{R^{n+1}}, \\ \phi_{2s} &= \frac{eq_2}{a_2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{R^{n+1}}. \end{aligned} \qquad (61)$$

Решение системы (60) может быть найдено численными методами. При $R \gg a_1$ и $R \gg a_2$ найдем приближенное решение с учетом вклада только монопольного и дипольного членов потенциала соседней макрочастицы в поляризацию заряда другой. В итоге из формулы (60) имеем

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{ev_1 R}{1-4v_1v_2}(2q_1v_2 - q_2)\,, \\ B_1 &= \frac{ev_2 R}{1-4v_1v_2}(2q_2v_1 - q_1)\,, \\ A_k &= -\frac{a_1^{2k+1}}{R^{k+1}}\left(eq_2 + \frac{(k+1)B_1}{R}\right), \\ B_k &= -\frac{a_2^{2k+1}}{R^{k+1}}\left(eq_1 + \frac{(k+1)B_1}{R}\right), \quad k = 1, 2, \ldots \end{aligned} \qquad (62)$$

где $v_1 = (a_1/R)^3$, $v_2 = (a_2/R)^3$.

Для определения силы, действующей на первую макрочастицу, из выражения (44) получаем, что

$$F_z = \frac{1}{4} a_1^2 \int_{-1}^{1} \left[\frac{\partial(\phi_1 + \phi_2)}{\partial r}\right]^2 \Bigg|_{r=a_1} \mu\, d\mu. \qquad (63)$$

Отсюда находим

$$F_z = \frac{1}{4a_1^2} \int_{-1}^{1} \left[\sum_{n=0}^{\infty} C_n P_n(\mu)\right]^2 \mu\, d\mu, \qquad (64)$$

где $C_0 = eq_1$,

$$C_n = -(2n+1)\left(\frac{a_1}{R}\right)^{n+1}\left[B_0 + \frac{(n+1)B_1}{R}\right], \quad n = 1, 2, \ldots$$

После интегрирования (64) с использованием рекуррентных соотношений для полиномов Лежандра имеем

$$F_z = \frac{1}{a_1^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)C_n C_{n+1}}{(2n+1)(2n+3)}. \qquad (65)$$

После интегрирования по R выражения (65) для энергии взаимодействия при постоянных зарядах с точностью до членов R^{-7} включительно получим

$$W = \frac{e^2 q_1 q_2}{R}\left(1 + \frac{10}{3} v_1 v_2\right) - \frac{e^2 q_1^2}{2R^2} \frac{a_2^3}{R^2 - a_2^2} - \frac{e^2 q_2^2}{2R^2} \frac{a_1^3}{R^2 - a_1^2}. \qquad (66)$$

На рис. 10, 11 представлены зависимости, вычисленные из формулы (66). Видно прекрасное согласие с точными расчетами в бисферических координатах для частиц одного радиуса. При сильно различающихся размерах макрочастиц наблюдается расхождение при малых межчастичных расстояниях, а в области максимума и при бо́льших расстояниях имеет место хорошее согласие. Отметим, что расхождение на рис. 11 между кривой *1* и точками *3*, рассчитанными из выражения (66), по мере сближения макрочастиц монотонно растет и достигает 1 % при $L = 0.2$ мкм, а максимум имеет место при $L \approx 0.8$ мкм.

Из системы (61) с учетом только нулевого и первого членов найдем заряды макрочастиц:

$$\begin{aligned} q_1 &= c_{11}\phi_{1s} + c_{12}\phi_{2s}, \\ q_2 &= c_{21}\phi_{1s} + c_{22}\phi_{2s}, \end{aligned} \tag{67}$$

где емкостные коэффициенты определены следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} c_{11} &= \frac{a_1}{D_{01}}\left(1 - \frac{a_2 v_1}{R} - 4v_1 v_2\right), \\ c_{22} &= \frac{a_2}{D_{01}}\left(1 - \frac{a_1 v_2}{R} - 4v_1 v_2\right), \\ c_{12} &= c_{21} = -\frac{a_1 a_2}{RD_{01}}\left(1 - 2v_1 v_2\right). \end{aligned} \tag{68}$$

Здесь D_{01} — определитель системы (61) с усеченной суммой:

$$D_{01} = 1 - \frac{a_1 a_2}{R^2}\left(1 + \frac{a_1^2 + a_2^2}{R^2} + \frac{4a_1^2 a_2^2}{R^4}\right).$$

Теперь из (56) можно найти потенциальную энергию взаимодействия при постоянных потенциалах макрочастиц:

$$U_\varphi = \frac{a_1 a_2}{RD_{01}}\left[-\frac{a_1}{2R}\left(1 + \frac{a_1^2}{R^2}\right)\phi_{10}^2 + (1 - 2v_1 v_2)\,\phi_{10}\phi_{20} - \frac{a_2}{2R}\left(1 + \frac{a_2^2}{R^2}\right)\phi_{20}^2\right]. \tag{69}$$

Вычисленные на основе (69) зависимости приведены на рис. 10, 11. Видно прекрасное согласие с точными расчетами в бисферических координатах (ошибка не превышает 1 % для макрочастиц одного размера и 0.2 % при сильно различающихся радиусах для $L \geq 10^{-6}$ мкм).

В работе [18] для потенциала взаимодействия методом изображений с учетом двух первых членов получено выражение

$$W = \frac{e^2 q_1 q_2}{R} - \frac{e^2 q_1^2}{2R^2}\,\frac{a_2^3}{R^2 - a_2^2} - \frac{e^2 q_2^2}{2R^2}\,\frac{a_1^3}{R^2 - a_1^2}, \tag{70}$$

которое, как видно на рис. 10, 11, дает близкую к (66) зависимость при сильно различающихся радиусах макрочастиц, но при близких радиусах хуже согласуется с точными расчетами, чем (66). В работе [6] в качестве потенциала взаимодействия использовалось выражение, похожее на (70), но без двоек в знаменателях второго и третьего членов. Эта зависимость, как видно на рис. 10, 11, значительно хуже согласуется с точными расчетами.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенное в настоящей работе рассмотрение взаимодействия в плазме проводящего шара с точечным зарядом с учетом эффектов экранирования показало, что при выполнении условия $k_D a_1 \ll 1$ потенциал взаимодействия на всех межчастичных расстояниях хорошо описывается потенциалом взаимодействия этих объектов в вакууме с заменой кулоновской части на ДЛФО-потенциал сферической макрочастицы, умноженный на заряд точечной макрочастицы, т. е. на потенциал Юкавы с перенормированным зарядом конечной частицы. Поэтому можно предположить, что потенциал взаимодействия двух проводящих шаров может быть рассчитан с хорошей точностью путем вычисления потенциала их взаимодействия в вакууме с последующей заменой кулоновской части взаимодействия на потенциал Юкавы с переномированными зарядами макрочастиц. Из сопоставления выражений (21) и (66) при выполнении условий $k_D a_1 \ll 1$ и $k_D a_2 \ll 1$ в качестве потенциала взаимодействия макрочастиц в плазме для случая постоянных зарядов можно предложить выражение

$$U = \frac{e^2 q_1 q_2\,(1 + (10/3) v_1 v_2)}{R\,(1 + k_D a_1)\,(1 + k_D a_2)}\,e^{-k_D(R - a_1 - a_2)} - \frac{e^2 q_1^2}{2R^2}\,\frac{a_2^3}{R^2 - a_2^2} - \frac{e^2 q_2^2}{2R^2}\,\frac{a_1^3}{R^2 - a_1^2}. \tag{71}$$

Представляет интерес задача о взаимодействии двух макрочастиц с учетом размерных эффектов в неравновесной плазме, где экранирование оказывается двухэкспоненциальным [19]. В работе [20] было проведено исследование взаимодействия двух точечных макрочастиц в такой плазме, а проблема влияния размера макрочастиц требует отдельного рассмотрения.

В настоящей работе также показано, что поляризация заряда не может приводить к притяжению одноименно заряженных частиц, находящихся на расстояниях, значительно превышающих их размеры, о чем сообщалось в работе [21]. Это позволяет заключить, что притяжение макрочастиц, обнаруженное в эксперименте в этой работе, обусловлено не электростатическими силами.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант №08-02-01324а) и аналитической ведомственной целевой программы «Развитие научного потенциала высшей школы (2009–2010 годы)», Мероприятие 2 (грант №1063).

ЛИТЕРАТУРА

1. V. E. Fortov, A. V. Ivlev, S. A. Khrapak et al., Phys. Rep. **421**, 1 (2005).
2. O. Ishihara, J. Phys. D: Appl. Phys. **40**, R121 (2007).
3. U. Konopka, G. E. Morfill, and L. Ratke, Phys. Rev. Lett. **84**, 891 (2000).
4. G. A. Hebner, M. E. Riley, and K. E. Greenberg, Phys. Rev. E **66**, 046407 (2002).
5. O. S. Vaulina, O. F. Petrov, A. V. Gavrikov et al., Plasma Phys. Rep. **33**, 278 (2007).
6. A. V. Ivlev, G. E. Morfill, and U. Konopka, Phys. Rev. Lett. **89**, 195502 (2002).
7. А. М. Савельев, А. М. Старик, ЖЭТФ **135**, 369 (2009).
8. P. Debye and E. Hückel, Phys. Zeitschr. **24**, 185 (1923).
9. Г. Н. Ватсон, *Теория бесселевых функций*, Изд-во иностр. лит., Москва (1949), т. 1. [G. N. Watson, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, Cambridge Univ. Press, London (1922)].
10. А. В. Филиппов, А. Ф. Паль, А. Н. Старостин и др., Письма в ЖЭТФ **83**, 640 (2006).
11. В. В. Батыгин, И. Н. Топтыгин, *Сборник задач по электродинамике*, Наука, Москва (1970).
12. В. Смайт, *Электростатика и электродинамика*, Изд-во иностр. лит., Москва (1954). [W. R. Smythe, *Static and Dynamic Electricity*, New York, Toronto, London (1950)].
13. Е. В. Гобсон, *Теория сферических и эллипсоидальных функций*, Изд-во иностр. лит., Москва (1952). [E. W. Hobson, *The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics*, Univ. Press, Cambridge (1931)].
14. T. M. MacRobert, *Spherical Harmonics*, Metiiuen & Co. Ltd., London (1947).
15. В. А. Саранин, УФН **169**, 453 (1999).
16. В. А. Саранин, УФН **172**, 1449 (2002).
17. Е. А. Щерба, А. И. Григорьев, В. А. Коромыслов, ЖТФ **72**, 15 (2002).
18. D. D. Huang, J. H. Seinfeld, and K. Okuyama, J. Colloid Interf. Sci. **141**, 191 (1991).
19. А. В. Филиппов, А. Г. Загородний, А. И. Момот и др., ЖЭТФ **131**, 164 (2007).
20. А. В. Филиппов, А. Г. Загородний, А. И. Момот и др., ЖЭТФ **132**, 949 (2007).
21. T. Antonova, B. M. Annaratone, D. D. Goldbeck et al., Phys. Rev. Lett. **96**, 115001 (2006).