

# ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ УСИЛЕНИЕ СВЕТОВЫХ ВОЛН ПРИ НИЗКОЧАСТОТНОЙ НАКАЧКЕ В АПЕРИОДИЧЕСКИХ НЕЛИНЕЙНЫХ ФОТОННЫХ КРИСТАЛЛАХ

*А. С. Чиркин\*, И. В. Шутов\*\**

*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова  
119992, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 15 апреля 2009 г.

Исследован процесс невырожденного оптического параметрического усиления в поле низкочастотной накачки, включающий традиционный процесс параметрического усиления при высокочастотной накачке и два процесса преобразования частоты вверх. Одновременно такие связанные взаимодействия можно осуществить в апериодическом нелинейном фотонном кристалле (АНФК), в кристалле с апериодической сменой знака коэффициента нелинейной связи волн. АНФК можно создать методом суперпозиции модуляции нелинейности тремя функциями, для каждой из которых выполняется условие фазового квазисинхронизма для одного из вовлеченных во взаимодействие процессов. Наряду с результатами, полученными на основе прямого численного решения исходных связанных уравнений с пространственно изменяющимися коэффициентами связи волн, приведены результаты их решения, содержащие эффективные постоянные коэффициенты связи волн. При этом разработан подход, позволяющий значительно упростить их расчет. Установлено, что для изученных в работе характеристик процессов оба метода дают хорошо совпадающие результаты. На примере АНФК  $\text{LiNbO}_3$  рассчитаны перестроечные характеристики процесса, его динамика, частотные полосы параметрического усиления и влияние случайного отклонения от условий квазисинхронизма на эффективность взаимодействия волн.

PACS: 42.25.-p, 42.15.Eq, 42.65.-k, 42.79.Nv

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время в нелинейной и квантовой оптике широко применяется процесс параметрического усиления при высокочастотной накачке. В традиционном невырожденном параметрическом процессе, протекающем в кристалле с квадратичной восприимчивостью, фотоны накачки с частотой  $\omega_p$  распадаются на сигнальный и холостой фотоны с частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , так что выполняется частотное соотношение  $\omega_p = \omega_1 + \omega_2$ . Этот процесс в оптике исследуют и применяют с начала 1960-х гг. [1–5]. Он лежит в основе существующих на сегодняшний день источников перестраиваемого интенсивного когерентного излучения, преобразователей сверхкоротких лазер-

ных импульсов, источников неклассического (сжатого) света и перепутанных квантовых состояний.

Параметрические взаимодействия реализуют как в однородных нелинейно-оптических кристаллах, так и в нелинейных фотонных кристаллах (НФК) (КТР,  $\text{LiNbO}_3$ ), в которых квадратичная восприимчивость меняет знак от домена к домену, т. е. НФК имеют пространственно модулированную нелинейную восприимчивость [6]. Кристаллы, в которых знак квадратичной нелинейной восприимчивости меняется периодически, называют также кристаллами с регулярной доменной структурой или периодически поляризованными нелинейными кристаллами. В НФК осуществляются так называемые квазисинхронные волновые взаимодействия, в которых волновая расстройка взаимодействующих волн  $\Delta k = k_p - k_1 - k_2$  компенсируется вектором обратной «нелинейной» решетки  $K = 2\pi m/\Lambda$ , где  $\Lambda$  — период модуляции знака нелинейности

\*E-mail: aschirkin@rambler.ru

\*\*E-mail: iwitty@gmail.com

второго порядка,  $m = \pm 1, \pm 3, \dots$  — порядок квазисинхронизма.

Зависимость вектора обратной нелинейной решетки  $K$  от двух параметров ( $\Lambda$  и  $m$ ) дает возможность реализовать одновременно два квазисинхронных оптических процесса [7, 8]. Путем подбора указанных параметров можно одновременно осуществить, например, традиционное коллинеарное параметрическое усиление и генерацию суммарной частоты, равной сумме частот накачки и одной из усиливаемых волн. В результате можно создать условия для экспоненциального роста интенсивности на суммарной частоте и тем самым реализовать вырожденное параметрическое усиление при низкочастотной накачке [9, 10]. Однако в этом случае порядок квазисинхронизма сильно влияет на эффективность взаимодействия, поскольку коэффициент нелинейной связи волн обратно пропорционален порядку квазисинхронизма. Одновременное протекание двух квазисинхронных нелинейно-оптических взаимодействий в последние годы исследовалось также в апериодических нелинейных структурах типа Фибоначчи (см. обзоры [11, 12]). Однако в них обычно рассматривается взаимодействие волн с кратными частотами.

Многоволновые квазисинхронные взаимодействия без ограничения на соотношения частот взаимодействующих волн допускают апериодические НФК (АНФК), конструируемые методом суперпозиции модуляции нелинейности, предложенным и обоснованным в работе [13]. Используя этот метод, авторы [14] показали возможность экспериментального осуществления в АНФК невырожденного параметрического усиления при низкочастотной накачке, т. е. возможность усиления двух волн с частотами выше, чем частота накачки. Методом суперпозиции модуляции нелинейности можно создать условия для генерации высших оптических гармоник в первом порядке квазисинхронизма и формирования субфемтосекундных световых импульсов [15, 16]; здесь ограничения на порядок высшей гармоники и длительность импульса связаны с полосой прозрачности АНФК.

Целью настоящей работы является систематическое исследование невырожденного параметрического усиления при низкочастотной накачке. Рассматриваемый связанный процесс включает невырожденный трехчастотный параметрический процесс

$$\omega_p = \omega_1 + \omega_2 \quad (1)$$

в поле интенсивной волны накачки с частотой  $\omega_p$  и два процесса генерации суммарных частот

$$\omega_p + \omega_1 = \omega_3, \quad (2)$$

$$\omega_p + \omega_2 = \omega_4. \quad (3)$$

Отметим, что такие взаимодействия ранее рассматривались в однородной нелинейной среде (см. [1]), в которой, однако, нельзя получить чисто экспоненциально нарастающие волны, даже если удастся выполнить условия фазового синхронизма. Возможность управления нелинейными коэффициентами связи волн методом суперпозиции модуляции нелинейности [13] позволяет осуществить режим экспоненциального роста интенсивностей волн на начальном этапе взаимодействия рассматриваемого процесса.

Структура предлагаемой работы следующая. Раздел 2 содержит исходную систему связанных пятиволновых взаимодействий с изменяющимися в пространстве нелинейными коэффициентами связи волн и фазовыми расстройками, описывающих изучаемый процесс. Здесь же изложен переход к системе уравнений с постоянными эффективными нелинейными коэффициентами при выполнении условия фазового квазисинхронизма. Раздел 3 посвящен аналитическому расчету эффективных нелинейных коэффициентов. В разд. 4 рассматриваемый процесс анализируется в приближении заданного поля и определены условия экспоненциального роста интенсивностей взаимодействующих волн. Характеристики процесса параметрического усиления при низкочастотной накачке исследованы в разд. 5 и 6. В разд. 5 изучены пространственная динамика процесса и перестроечные кривые, а в разд. 6 рассчитаны частотные полосы усиления взаимодействующих волн. В разд. 7 исследовано влияние случайного нарушения условия квазисинхронизма на динамику процесса, обусловленного неточным изготовлением необходимой апериодической нелинейной структуры. В Заключении кратко обсуждаются основные полученные в работе результаты.

## 2. ИСХОДНЫЕ СВЯЗАННЫЕ УРАВНЕНИЯ

Связанные коллинеарные волновые взаимодействия (1)–(3) в плосковолновом приближении описываются следующей системой укороченных уравнений для комплексных амплитуд:

$$\begin{aligned}
 i \frac{dA_p}{dz} &= \gamma_p^{(1)} g(z) A_1 A_2 e^{-i\Delta_1 z} + \\
 &\quad + \gamma_p^{(2)} g(z) A_3 A_1^* e^{i\Delta_2 z} + \gamma_p^{(3)} g(z) A_3 A_2^* e^{i\Delta_3 z}, \\
 i \frac{dA_1}{dz} &= \gamma_1^{(1)} g(z) A_p A_2^* e^{i\Delta_1 z} + \gamma_1^{(2)} g(z) A_p^* A_3 e^{i\Delta_2 z}, \\
 i \frac{dA_2}{dz} &= \gamma_2^{(1)} g(z) A_p A_1^* e^{i\Delta_1 z} + \gamma_2^{(3)} g(z) A_p^* A_4 e^{i\Delta_3 z}, \\
 i \frac{dA_3}{dz} &= \gamma_3^{(2)} g(z) A_p A_1 e^{-i\Delta_2 z}, \\
 i \frac{dA_4}{dz} &= \gamma_4^{(3)} g(z) A_p A_2 e^{-i\Delta_3 z}.
 \end{aligned} \tag{4}$$

Здесь  $A_j$  — медленно меняющаяся амплитуда волны с частотой  $\omega_j$  ( $j = p, 1, 2, 3, 4$ ), индекс « $p$ » соответствует волне накачки,

$$\gamma_j^{(m)} = \frac{2\pi\omega_j^2}{c^2 k_j} d_{eff}^{(m)} \tag{5}$$

— коэффициент нелинейной связи волн, верхний индекс « $m$ » соответствует номеру процесса, а коэффициент  $d_{eff}^{(m)}$  связан с тензором квадратичной нелинейной восприимчивости и учитывает геометрию волнового взаимодействия и дисперсию кристалла,  $k_j$  — волновое число на частоте  $\omega_j$ ,  $\Delta_m$  — волновая расстройка:

$$\begin{aligned}
 \Delta_1 &= k_p - k_1 - k_2, \\
 \Delta_2 &= k_3 - k_1 - k_p, \\
 \Delta_3 &= k_4 - k_2 - k_p.
 \end{aligned} \tag{6}$$

Функция  $g(z)$  характеризует аperiodическую модуляцию нелинейного коэффициента связи волн. Эта функция описывает поведение знака нелинейной восприимчивости и принимает значения только 1 и  $-1$ . Сущность метода суперпозиции модуляции нелинейности заключается в построении функции  $g(z)$  для реализации связанных процессов на заданных длинах волн по дисперсионным характеристикам нелинейно-оптического кристалла. Аналитически функцию модуляции  $g(z)$  для АНФК записывают в виде [13]

$$g(z) = \text{sign} \left( \sum_m^N a_m \sin \frac{2\pi}{\Lambda_m} z \right) = \text{sign} f(z), \tag{7}$$

где величины  $a_m$  определяют относительную эффективность  $m$ -го процесса,  $N$  — число связанных процессов. Методом создания АНФК может служить технология переполаризации или метод диффузии, которые в настоящее время эффективно применяются для получения кристаллов с периодической нелинейной структурой [17, 18].

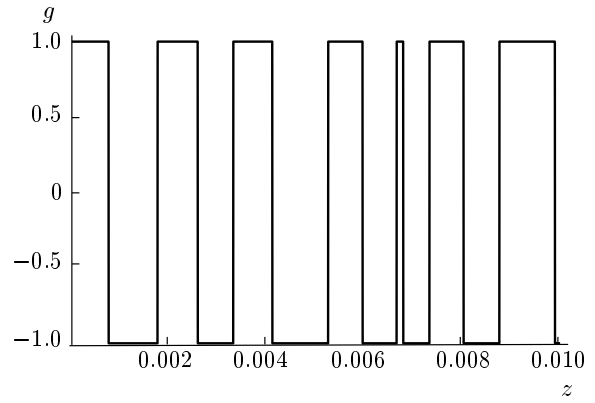


Рис. 1. Характерный вид функции  $g(z)$

Математически функция  $g(z)$  (7) является строго аperiodической, если отношение пространственных периодов  $\Lambda_p/\Lambda_q$  при  $p \neq q$  ( $p, q = 1, \dots, N$ ) иррационально. В противном случае  $g(z)$  — периодическая функция с периодом, как показывают расчеты, гораздо большем  $\Lambda_p$ , а зачастую и всей длины нелинейного кристалла. Таким образом, структуры, созданные методом суперпозиции нелинейной восприимчивости, можно считать нерегулярными или аperiodическими. Характерный вид такой функции представлен на рис. 1.

Система уравнений (4) описывает пространственную динамику энергообмена между взаимодействующими волнами. Она допускает вторичное упрощение, если характерная длина нелинейного взаимодействия

$$L'_{nl} = \frac{1}{|\gamma A_p|} \gg \max\{\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3\},$$

где  $\gamma = \max\{\gamma_j^{(m)}\}$ . Это показывает сравнение точного решения уравнений (4) с уравнениями (9), полученными при следующей замене (см. ниже рис. 5б и [13]):

$$g(z) \rightarrow \frac{1}{L} \int_0^L g(z) e^{i\Delta_m z} dz = g(\Delta_m) = g_m. \tag{8}$$

Фурье-компонента  $g_m$  влияет на эффективное значение коэффициента нелинейной связи волн  $\gamma_{j\text{eff}}^{(m)} = \gamma_j^{(m)} g_m$  при наличии волновой расстройки  $\Delta_m$ . При рассматриваемой замене система (4) принимает вид

$$\begin{aligned}
 i \frac{dA_p}{dz} &= \gamma_p^{(1)} g_1^* A_1 A_2 + \gamma_p^{(2)} g_2 A_3 A_1^* + \gamma_p^{(3)} g_3 A_3 A_2^*, \\
 i \frac{dA_1}{dz} &= \gamma_1^{(1)} g_1 A_p A_2^* + \gamma_1^{(2)} g_2 A_p^* A_3, \\
 i \frac{dA_2}{dz} &= \gamma_2^{(1)} g_1 A_p A_1^* + \gamma_2^{(3)} g_3 A_p^* A_4, \\
 i \frac{dA_3}{dz} &= \gamma_3^{(2)} g_2^* A_p A_1, \\
 i \frac{dA_4}{dz} &= \gamma_4^{(3)} g_3^* A_p A_2.
 \end{aligned} \tag{9}$$

Это система с постоянными коэффициентами, допускающая в некоторых случаях аналитическое решение. При  $|g_m| \equiv 1$  ( $m = 1, 2, 3$ ) система (9) эквивалентна системе уравнений для гипотетического однородного нелинейного кристалла при коллинеарном фазовом синхронизме для трех связанных нелинейно-оптических процессов. Этим условиям в однородных нелинейно-оптических кристаллах из-за их дисперсионных свойств удовлетворить не удается. Вместе с тем в АНФК, как показано численно в работах [13, 14], можно не только одновременно удовлетворить условиям квазисинхронизма для нескольких нелинейно-оптических процессов, но и управлять значениями коэффициентов  $g_m$ . В следующем разделе развивается аналитический метод расчета величин  $g_m$  по заданным значениям  $a_1, \dots, a_N$  в (7).

### 3. КОЭФФИЦИЕНТЫ НЕЛИНЕЙНОЙ СВЯЗИ ВОЛН

Развиваемый метод расчета величин  $g_m$ , определяющий эффективное значение коэффициента нелинейной связи волн, основан на следующем интегральном представлении функции:

$$\text{sign } f(z) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin[xf(x)]}{x} dx. \tag{10}$$

При подстановке (7) в (10) будем пользоваться формулами

$$\begin{aligned}
 \sin(ax \sin(Kz)) &= \\
 &= i \sum_{q=0}^\infty J_{2q+1}(ax) e^{-i(2q+1)Kz} + \text{c.c.}, \tag{11}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \cos(ax \sin(Kz)) &= \\
 &= J_0(ax) + \left[ \sum_{q=1}^\infty J_{2q}(ax) e^{i2qKz} + \text{c.c.} \right], \tag{12}
 \end{aligned}$$

где  $J_l(ax)$  — функция Бесселя  $l$ -го порядка от мнимого аргумента.

В случае периодического нелинейного фотонного кристалла  $f(z) = a_1 \sin(K_1 z)$  ( $K_1 = 2\pi/\Lambda_1$ ) и функция (10) с учетом (11) принимает вид

$$\begin{aligned}
 g(z) &= \text{sign } f(z) = \\
 &= \sum_{q=0}^\infty i \frac{2}{\pi} I^{(2q+1)}(a_1) e^{-i(2q+1)K_1 z} + \text{c.c.}, \tag{13}
 \end{aligned}$$

где

$$I^{(2q+1)}(a_1) = \int_0^\infty \frac{1}{x} J_{2q+1}(a_1 x) dx = \frac{1}{2q+1}. \tag{14}$$

Мы получили известный результат. Величина  $2q+1$  определяет возможный порядок квазисинхронизма, который, как видно, может быть только нечетным. Фазовый набег в слагаемых (13) может компенсировать волновую расстройку. В случае квазисинхронизма первого порядка  $\Delta_1 = K_1$  подстановка дает  $g_1 = i2/\pi$ .

Для процессов, описываемых системой уравнений (4) (иначе говоря, для АНФК)

$$f(z) = \sum_{m=1}^3 a_m \sin(K_m z), \tag{15}$$

расчет коэффициентов  $g_m$  становится более громоздким. Опуская выкладки и имея в виду возможность выполнения условий квазисинхронизма в первом порядке, для функции (7) имеем

$$\begin{aligned}
 g(z) &= \text{sign } f(z) = \\
 &= i \frac{2}{\pi} \sum_{m=0}^3 I^{(m)}(a_1, a_2, a_3) e^{-iK_m z} + \text{c.c.}, \tag{16}
 \end{aligned}$$

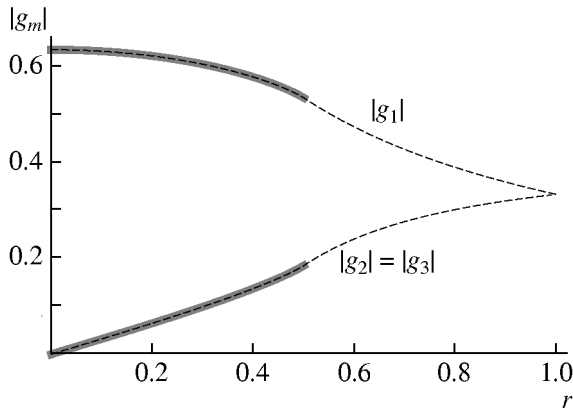
где, например,

$$\begin{aligned}
 I^{(m)}(a_1, a_2, a_3) &= \\
 &= \int_0^\infty \frac{1}{x} J_1(a_1 x) J_0(a_2 x) J_0(a_3 x) dx. \tag{17}
 \end{aligned}$$

Остальные выражения для  $I^{(1)}$  и  $I^{(2)}$  получаются циклической перестановкой коэффициентов  $a_1, a_2$  и  $a_3$  в формуле (17).

Результат интегрирования (17) удается записать в аналитическом виде. Выпишем в качестве примера результат для случая  $a_2/a_1 = a_3/a_1 = r$  при  $0 \leq r \leq 0.5$ :

$$I^{(1)}(r) = {}_4F_3 \left( -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; 1, 1, 1; (2r)^2 \right), \tag{18}$$



**Рис. 2.** Результаты расчета эффективных коэффициентов нелинейной связи  $g_m$  для трех связанных трехчастотных процессов. Сплошные кривые — зависимости, построенные по формулам (18) и (19) в интервале  $0 \leq r \leq 0.5$ ; штриховые — результат численного расчета по формуле (16). Видно, что результаты аналитического и численного расчетов совпадают

$$I^{(2)}(r) = I^{(3)}(r) = \frac{1}{2} r {}_4F_3 \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}; 2, 2, 1; (2r)^2 \right), \quad (19)$$

где  ${}_4F_3$  — гипергеометрическая функция. При выполнении условий квазисинхронизма в связанных процессах в первом порядке ( $\Delta_m = K_m$ ) для коэффициентов, фигурирующих в формуле (9), имеем

$$g_m = i \frac{2}{\pi} I^{(m)}, \quad m = 1, 2, 3. \quad (20)$$

Зависимость коэффициентов  $g_m$  от отношения амплитуд  $a_m$  модулирующих гармоник изображена на рис. 2. Кривые наглядно показывают влияние отношения амплитуд  $a_m$  на значение  $g_m$ . Следовательно, значение  $g_m$  можно задавать на этапе расчета аperiodической структуры (7).

Далее мы сравним результаты численного расчета непосредственно уравнений (4) и их упрощенного аналога (9) с коэффициентами (18), (19).

#### 4. ПРИБЛИЖЕНИЕ ЗАДАННОГО ПОЛЯ

В этом приближении в системах уравнений (4) и (9) отсутствуют первые уравнения, а в остальных амплитуда волны накачки  $A_p$  считается постоянной. Оставшиеся при этом уравнения системы (9) допускают получение аналитического решения [14], это решение важно с точки зрения анализа генерации

перепутанных четырехмодовых состояний [19] в данном процессе.

Полагая для простоты, что  $\gamma_1 = \gamma_1^{(1)} = \gamma_1^{(2)}$  и  $\gamma_2 = \gamma_2^{(1)} = \gamma_2^{(3)}$  (это справедливо в области слабой дисперсии кристалла), вводя также обозначения  $\gamma_3 = \gamma_3^{(2)}$ ,  $\gamma_4 = \gamma_4^{(3)}$  и разыскивая решение в виде  $A_j \sim e^{\Gamma z}$ , находим следующие выражения для фактора усиления:

$$\Gamma = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\gamma_1 \gamma_2} |A_p| \times \left\{ \left[ |g_1|^2 - \left( |g_2| \sqrt{\frac{\gamma_3}{\gamma_2}} + |g_3| \sqrt{\frac{\gamma_4}{\gamma_1}} \right)^2 \right]^{1/2} \pm \left[ |g_1|^2 - \left( |g_2| \sqrt{\frac{\gamma_3}{\gamma_2}} - |g_3| \sqrt{\frac{\gamma_4}{\gamma_1}} \right)^2 \right]^{1/2} \right\}. \quad (21)$$

Видно, что в общем случае  $\Gamma$  является комплексной величиной. Однако при определенном соотношении коэффициентов  $|g_1|$ ,  $|g_2|$  и  $|g_3|$  величина  $\Gamma$  может быть действительной. За счет изменения  $g_m$  это условие можно выполнить и реализовать экспоненциальный рост амплитуд волн на всех частотах. Тем самым реализуется параметрическое усиление при низкочастотной накачке.

### 5. ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ УСИЛЕНИЕ ПРИ НИЗКОЧАСТОТНОЙ НАКАЧКЕ

Исследуем рассматриваемый процесс применительно к АНФК  $\text{LiNbO}_3$ , накачиваемому излучением длиной волны  $\lambda_p = 1.064$  мкм, что соответствует длине волны генерации Nd:YAG-лазера. При расчетах использовались дисперсионные данные кристалла  $\text{LiNbO}_3$  из работы [20].

#### 5.1. Перестроечные кривые

Возможные длины волн, вовлеченные в процесс, и периоды модуляции  $\Lambda_m$  для создания структуры показаны кривыми на рис. 3, 4. На рис. 3 приведены длины волн  $\lambda_3$  и  $\lambda_4$  для процессов генерации суммарной частоты (2) и (3) в зависимости от длины волны  $\lambda_1$ . На вставке рис. 3 показана зависимость длины волны  $\lambda_2$  от  $\lambda_1$ . Приведенный диапазон перестройки длин волн охватывает область прозрачности кристалла. Зависимости периодов модуляции нелинейности для реализации коллинеарных квазисинхронных процессов (1), (2) и (3) по отдельности изображены на рис. 4.

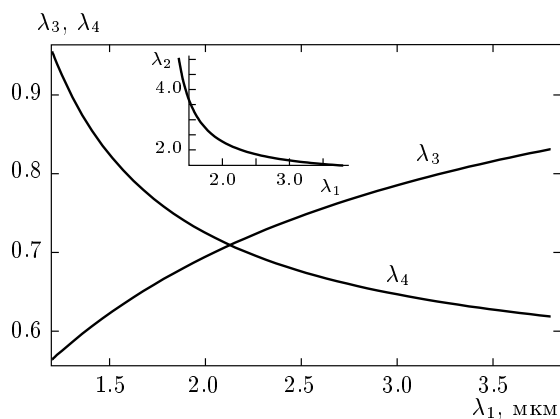


Рис. 3. Зависимости длин волн  $\lambda_3$  и  $\lambda_4$  от длины волны  $\lambda_1$  для волны накачки с  $\lambda_p = 1.064$  мкм. На вставке приведена зависимость длины волны  $\lambda_2$  от  $\lambda_1$

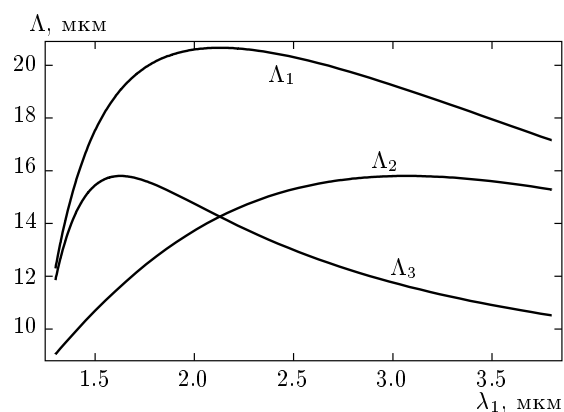


Рис. 4. Зависимости периодов модуляции  $\Lambda_1$ ,  $\Lambda_2$  и  $\Lambda_3$  квадратичной нелинейности кристалла  $\text{LiNbO}_3$  для реализации квазисинхронных процессов  $ee-e$  параметрического усиления (1) и генерации суммарных частот (2) и (3) от длины волны  $\lambda_1$  при накачке с  $\lambda_p = 1.064$  мкм

### 5.2. Динамика процесса

На рис. 5 приведены решения системы (4) для процесса с длинами волн  $\lambda_1 = 1.500$  мкм,  $\lambda_2 = 3.661$  мкм,  $\lambda_3 = 0.622$  мкм и  $\lambda_4 = 0.824$  мкм при накачке на длине волны  $\lambda_p = 1.064$  мкм для различных значений  $a_m$ . Видно, что чем выше амплитуда пространственной гармоники, отвечающей в (7) за реализацию  $m$ -го трехчастотного процесса, тем эффективнее протекает данный процесс. В случае *a* амплитуда  $a_1$  значительно меньше  $a_{2,3}$  и параметрический процесс (1) не идет, соответственно, не могут быть реализованы и связанные с

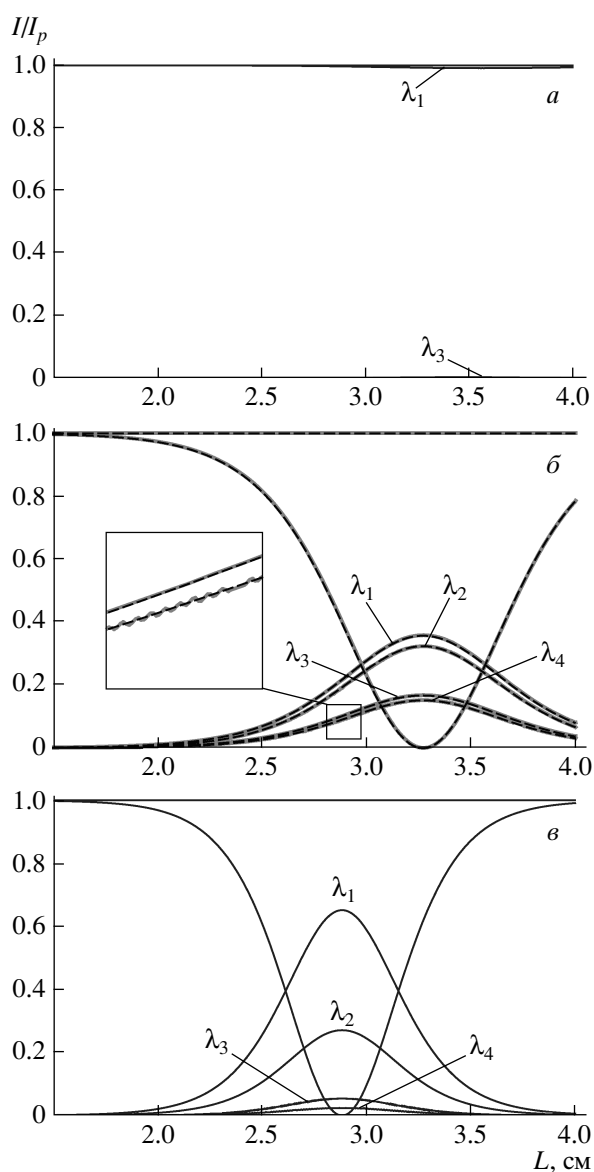


Рис. 5. Пространственная динамика интенсивности  $I_j$  взаимодействующих волн в зависимости от длины АНФК для структур с различными модулирующими гармониками  $a_j$ : *a* —  $a_1 = 0.01$ ,  $a_2 = a_3 = 1$ ; *б* —  $a_1 = 2$ ,  $a_2 = a_3 = 1$ ; *в* —  $a_1 = 3$ ,  $a_2 = a_3 = 1$

ним процессы (2) и (3); в случае *б* коэффициент  $a_1$  больше значений  $a_{2,3}$  и имеет место эффективное параметрическое преобразование, а также связанные с ним взаимодействия преобразования частоты вверх; в случае *в* решетка такова, что процесс (1) является доминирующим, а (2) и (3) протекают слабо.

Следует отметить, что интенсивность волн на низких частотах (длины волн  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ ) больше, чем

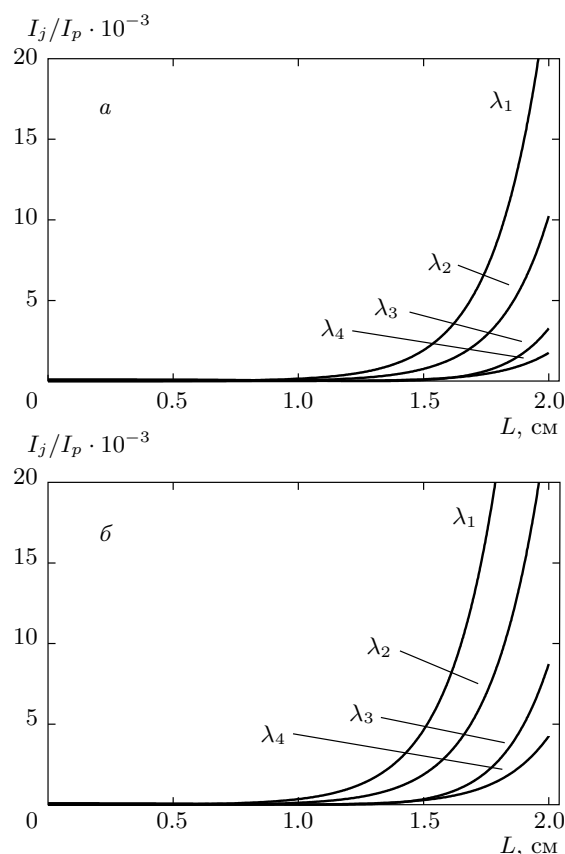
на высших частотах (длины волн  $\lambda_3$  и  $\lambda_4$ ), хотя на входе АНФК отличной от нуля «затравкой» является сигнальная волна с  $\lambda_3$ . Это объясняется тем, что на начальном этапе в поле волн накачки и сигнала сначала рождается волна разностной частоты  $\omega_1$ . Волна с частотой  $\omega_1$  и ненулевой интенсивностью «запускает» параметрический процесс (1). Затем энергия частот  $\omega_1$  и  $\omega_2$  в соответствии с (2) и (3) преобразуется в энергию частот  $\omega_3$  и  $\omega_4$ .

В зависимости от целей преобразования можно подобрать такие коэффициенты  $a_m$ , при которых исследуемые связанные процессы будут протекать с нужной эффективностью. Например, в работах [16] было показано, что АНФК можно использовать для генерации целого набора высших гармоник и цуга субфемтосекундных импульсов. В этом случае необходимо получить на выходе кристалла одинаковую интенсивность всех волн, участвующих в процессе, что можно сделать за счет выбора пространственных амплитуд  $a_m$ .

На рис. 5б представлено также решение упрощенной системы (9) (штриховые кривые) с коэффициентами, рассчитанными по формулам (18), (19). Видно, что решения систем (4) и (9) близки. Отметим, что модуляцию интенсивности взаимодействующих волн на масштабах длин порядка  $10^{-2}$  см упрощенная система не учитывает (см. вставку на рис. 5б), однако для практической реализации интересна динамика на масштабах длины кристалла, которая составляет порядка 1 см. На таких длинах рассматриваемое приближение (8) эффективно описывает динамику связанных процессов.

Для экспериментальной реализации важен выбор длины кристалла. Как видно из рис. 5, максимальное преобразование энергии волны накачки в волны с  $\lambda_3$  и  $\lambda_4$  достигается на определенной длине, которая зависит от эффективного коэффициента нелинейной связи взаимодействующих волн, который, в свою очередь, определяется нелинейной структурой (ее качеством и коэффициентами  $a_m$ ) и интенсивностью накачки.

Влияние неточности создания нелинейной структуры, т. е. ее качества, на эффективность протекания процесса исследуется ниже. Динамически менять  $a_m$  не представляется возможным, эти коэффициенты выбираются на этапе создания кристалла, однако интенсивность накачки может служить управляемым параметром для реализации исследуемого процесса в эксперименте. Например, в качестве источника накачки можно использовать полупровод-



**Рис. 6.** Интенсивности  $I_j$  взаимодействующих волн в зависимости от длины АНФК в случае приближения заданного поля. Входной сигнал подается на длине волны  $\lambda_3$  с интенсивностью  $I_3(0) = 10^{-4}I_p$ ; *a* — входные интенсивности остальных волн равны нулю:  $I_1(0) = I_2(0) = I_4(0) = 0$ ; *б* — интенсивность затравки на  $\lambda_2$  равна  $I_2(0) = 10^{-6}I_p$ ,  $I_1(0) = I_4(0) = 0$

никовые лазеры, мощность излучения которых меняется в широких пределах.

Кривые на рис. 6, соответствующие приближению заданного поля ( $L_{nl} = 0.1$  см), наглядно демонстрируют экспоненциальный рост интенсивностей взаимодействующих волн. При этом рост интенсивностей на высоких частотах  $\omega_3$  и  $\omega_4$  отстает от такового на частотах  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . Из сравнения рис. 6а и рис. 6б следует, что наличие даже слабой «затравки» на низкой частоте заметно увеличивает усиление волн на высших частотах (в случае *a* начальная интенсивность волны с  $\lambda_4$  была равна нулю, а в случае *б* составляла  $10^{-6}I_p$ ,  $I_p$  — интенсивность накачки).

**6. ЧАСТОТНАЯ ПОЛОСА  
ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО УСИЛЕНИЯ**

Рассматриваемая в этом разделе характеристика, называемая также полосой пропускания и параметрического захвата, определяет ширины спектров взаимодействующих волн, усиливаемых в кристаллах с заданной аperiодической структурой, что важно, например, при усилении коротких световых импульсов. Полосу параметрического усиления можно интерпретировать так же, как диапазон частотной перестройки взаимодействующих волн. Мы выполнили расчет полос параметрического усиления как для исходной системы уравнений (4), так и для упрощенной (9).

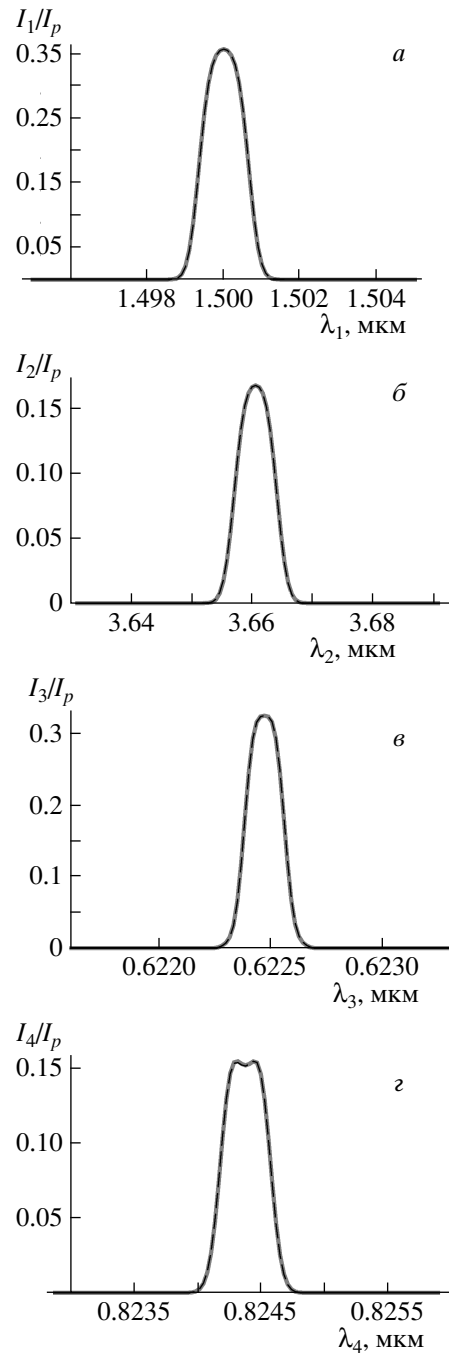
Предполагалось, что накачка осуществляется источником с узким спектром, с длиной волны, соответствующей центральной частоте излучения с  $\lambda_p = 1.064$  мкм. В первом случае при расчетах варьировалась длина волны  $\lambda_1$ , находились значения волновых расстроек каждого процесса и решалась система уравнений (4) для фиксированной длины кристалла  $L$ . Во втором случае тоже варьировалась длина волны  $\lambda_1$  и соответственно изменялись значения длин волн, задействованных во взаимодействии. При этом для каждого из процессов находились волновые расстройки  $\Delta_j$  и отстройки  $\delta_j = \Delta_j - \tilde{\Delta}_j$ , где  $\tilde{\Delta}_j = 2\pi/\Lambda_j$ . При этом система уравнений (9) представлялась в виде

$$\begin{aligned}
 i \frac{dA_p}{dz} &= \gamma_p^{(1)} g_1^* A_1 A_2 e^{-i\delta_1 z} + \gamma_p^{(2)} g_2 A_3 A_1^* e^{i\delta_2 z} + \\
 &+ \gamma_p^{(3)} g_3 A_3 A_2^* e^{i\delta_3 z}, \\
 i \frac{dA_1}{dz} &= \gamma_1^{(1)} g_1 A_p A_2^* e^{i\delta_1 z} + \gamma_1^{(2)} g_2 A_p^* A_3 e^{i\delta_2 z}, \\
 i \frac{dA_2}{dz} &= \gamma_2^{(1)} g_1 A_p A_1^* e^{i\delta_1 z} + \gamma_2^{(3)} g_3 A_p^* A_4 e^{i\delta_3 z}, \\
 i \frac{dA_3}{dz} &= \gamma_3^{(2)} g_2^* A_p A_1 e^{-i\delta_2 z}, \\
 i \frac{dA_4}{dz} &= \gamma_4^{(3)} g_3^* A_p A_2 e^{-i\delta_3 z}.
 \end{aligned}
 \tag{22}$$

В первом приближении теории дисперсии отстройки  $\delta_j$  можно представить в виде [21]

$$\begin{aligned}
 \delta_1 &= \left( \frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_2} \right) \Omega, \\
 \delta_2 &= \left( \frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_3} \right) \Omega, \\
 \delta_3 &= \left( \frac{1}{u_4} - \frac{1}{u_2} \right) \Omega.
 \end{aligned}
 \tag{23}$$

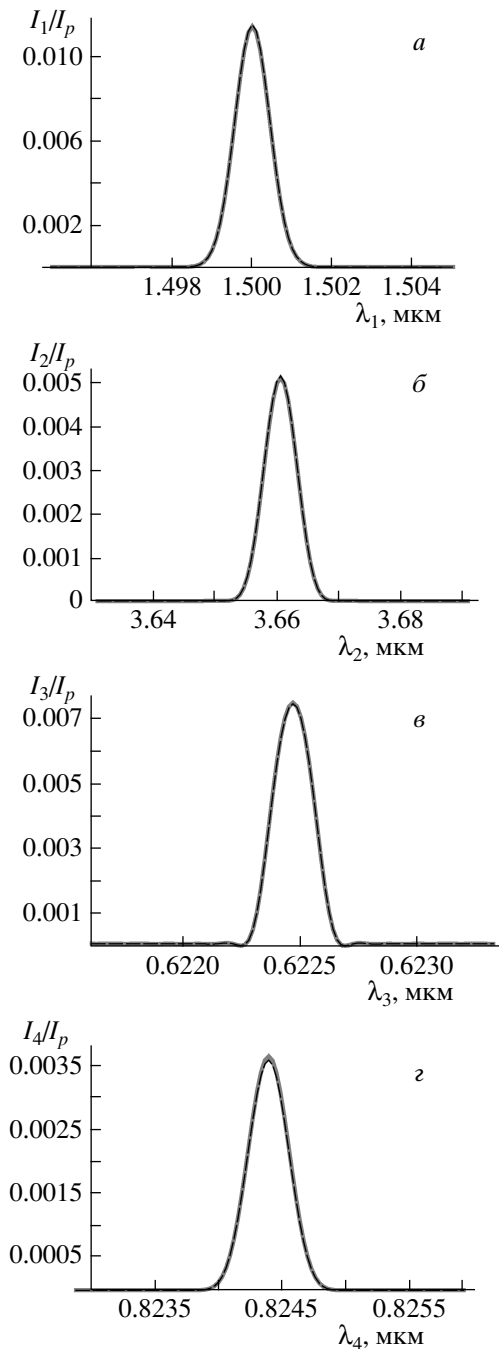
Здесь  $u_j$  — групповая скорость волны с частотой  $\omega_j$ ,  $\Omega = -(2\pi c/\lambda_{10}^2)\delta\lambda_1$ , для значения длины волны



**Рис. 7.** Полоса параметрического усиления на частотах  $\lambda_1$  (а),  $\lambda_2$  (б),  $\lambda_3$  (в) и  $\lambda_4$  (г) при наличии энергообмена с волной накачки; нелинейная длина  $L_{nl} = 0.1$  см, длина кристалла  $L = 3.25$  см, сплошные кривые — расчет на основе уравнений (4), штриховые — (22)

$\lambda_{10}$  выполняются условия точного фазового квази-синхронизма,  $\delta\lambda_1$  — отстройка от  $\lambda_{10}$ .





**Рис. 8.** Полоса параметрического усиления на частотах  $\lambda_1$  (а),  $\lambda_2$  (б),  $\lambda_3$  (в),  $\lambda_4$  (г) в приближении заданного поля; нелинейная длина  $L_{nl} = 0.1$  см, длина кристалла  $L = 1$  см, сплошные кривые — расчет на основе уравнений (4), штриховые — (22)

На рис. 7, 8 приведены результаты расчетов при наличии энергообмена с волной накачки (рис. 7) и в приближении заданного поля волны накачки (рис. 8). Видно, что результаты для упрощенной системы (22) практически совпадают с результатами для системы (4) (рис. 7): абсолютные значения полученных функций для различных значений  $\lambda_1$  различаются менее, чем на  $10^{-3}$ . Из рис. 7 и 8 следует, что в режиме эффективного энергообмена между взаимодействующими волнами полосы параметрического усиления составляют  $\Delta\lambda_1 \approx 1.8$  нм,  $\Delta\lambda_2 \approx 8$  нм,  $\Delta\lambda_3 \approx 0.3$  нм,  $\Delta\lambda_4 \approx 0.3$  нм. Расчеты дают значение ширины спектра параметрического усиления около 2 нм на длине волны  $\lambda_1$ , что соответствует длительности спектрально-ограниченного импульса  $\tau \approx \lambda^2/c\Delta\lambda \approx 23$  пс, на длинах волн  $\lambda_3, \lambda_4$  значение  $\tau$  оказывается больше почти в 10 раз. Таким образом, если ширина спектра входного сигнала будет меньше указанной ширины или длительность входного импульса больше приведенной оценки, то входной сигнал будет эффективно параметрически усиливаться.

### 7. ВЛИЯНИЕ ТОЧНОСТИ СОЗДАНИЯ СТРУКТУРЫ АНФК НА ПРОТЕКАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Выше показано, что изучаемое нами взаимодействие связанных волн можно реализовать в кристаллах с нелинейной структурой специального типа, конструируемой методом суперпозиции модуляции нелинейной восприимчивости. Возникает вопрос о влиянии точности создания такой структуры на характер протекания процесса.

Для решения этой задачи мы использовали численный метод. Функцию  $g(z)$  (7) на отрезке  $[0, L]$  можно представить через полином

$$P(z) = (z-z_0) \cdot \dots \cdot (z-z_m)(z-z_{m+1}) \cdot \dots \cdot (z-z_n),$$

так что  $g(z) = \text{sign} P(z)$ , где  $z_j$  — нули  $g(z)$ ,  $z_j \in [0, L]$ ,  $j = \overline{1, n}$ . Моделирование нарушения  $g(z)$  состоит в построении и использовании вместо нее в решении системы (4) функции  $g^{(r)}(z)$ :

$$g^{(r)}(z) = \text{sign}[(z-(z_0+\delta z_0)) \cdot \dots \cdot (z-(z_n+\delta z_n))] = \text{sign}[(z-z_0^{(r)}) \cdot \dots \cdot (z-z_n^{(r)})], \quad (24)$$

где  $\delta z_k$  — случайная величина, характеризующая смещение стенки домена.

Поиск нулей  $g(z)$  проводился численно, при этом отбрасывались те пары нулей, расстояние между

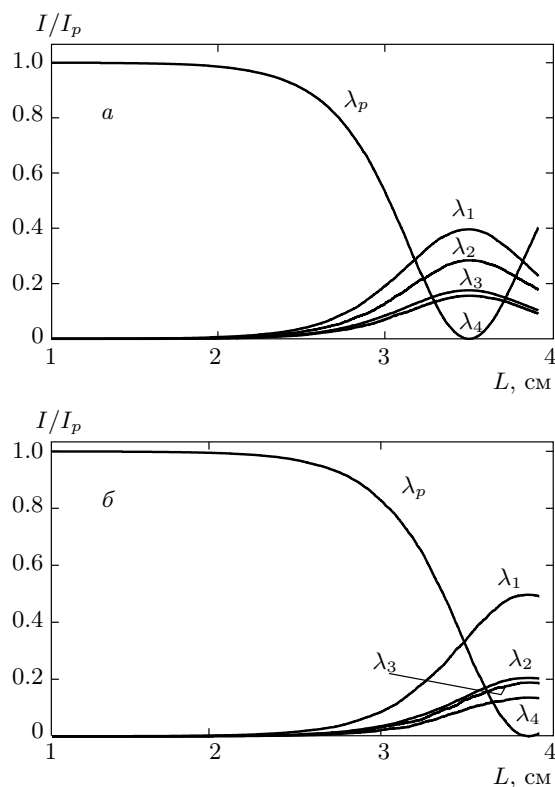


Рис. 9. Динамика интенсивностей взаимодействующих волн для  $\Delta z = 1$  (а), 2 (б) мкм

которыми меньше некоторой минимальной ширины домена  $l_{min}$ . Смещение стенки домена относительно «идеального» положения моделируется гауссовым распределением с дисперсией  $\langle \delta z_j \rangle^2$ , одинаковой для всех  $j$ , т. е.  $\langle (\delta z_j)^2 \rangle = (\Delta z)^2$  и  $\langle \delta z_j \rangle = 0$ . Среднеквадратичное отклонение  $\Delta z$  определяет качество нелинейной структуры кристалла и является в расчетах варьируемым параметром.

В приложении к рассматриваемому процессу было проведено исследование влияния качества создания структуры на эффективность процесса с точки зрения принципиальной возможности его осуществления. Для этого были заданы большие значения  $\Delta z$ , сравнимые с характерными размерами доменов и рассчитана динамика интенсивностей взаимодействующих волн с получившейся функцией  $g^{(r)}(z)$ . Результаты для двух реализаций с  $\Delta z = 1$  мкм и  $\Delta z = 2$  мкм приведены на рис. 9.

Одним из возможных методов создания АНФК может служить метод переполаризации, с помощью которого делают кристаллы с периодом до 1.5 мкм, т. е. с характерным размером домена менее 1 мкм [18]. Поэтому ошибку положения стенки до-

мена  $\Delta z$ , которая составляет 1 мкм и более, можно полагать очень большой, а такие кристаллы — кристаллами плохого качества. Тем не менее, видно, что динамика процесса не меняется принципиально: процесс «затягивается» по длине кристалла, но характер его протекания остается неизменным. Ухудшение качества структуры эквивалентно уменьшению эффективного коэффициента нелинейной связи.

При  $\Delta z$  больших, чем характерные размеры домена, процесс вообще не идет, так как структура приобретает полностью случайный характер. При относительно небольших по сравнению с размерами доменов значениях  $\Delta z$  пространственная динамика практически не отличается от показанной на рис. 5.

Таким образом, качество структуры в пределах ошибки, которую допускает доступная на сегодняшний день технология создания АНФК, не оказывает принципиального воздействия на возможность реализации данного процесса, что является полезным с точки зрения экспериментальной реализации.

### 8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе обстоятельно исследован процесс невырожденного параметрического усиления при низкочастотной накачке, который удается реализовать в связанных нелинейно-оптических процессах, состоящих из обычного трехчастотного параметрического процесса (параметрическое усиление при высокочастотной накачке) и процессов генерации суммарных частот путем сложения с частотой накачки параметрически генерируемых частот. При этом для реализации параметрического усиления при низкочастотной накачке необходимо не только выполнение условий фазового квазисинхронизма для упомянутых процессов (лишь в этом случае можно осуществить эффективное взаимодействие между всеми волнами), но и определенное соотношение между нелинейными коэффициентами связи волн. А именно, нелинейный коэффициент, ответственный за процесс параметрического усиления при высокочастотной накачке должен быть больше нелинейных коэффициентов, ответственных за процессы генерации суммарных частот. Это условие имеет ясный физический смысл — процесс преобразования частоты вверх играет роль потерь. На квантовом языке параметрические фотоны рождающиеся в процессе распада фотонов накачки изымаются из этого процесса при генерации фотонов суммарной частоты. Указанным двум условиям нетрудно удовлетворить в АНФК, конструируемых методом

суперпозиции модуляции нелинейности. Развитый в работе аналитический подход к расчету коэффициентов связи волн в таких кристаллах дает возможность решить обратную задачу — найти амплитуды гармоник, модулирующих нелинейность, по заданным значениям нелинейных коэффициентов связи.

Изучены динамика энергообмена взаимодействующих волн в режиме параметрического усиления при низкочастотной накачке и влияние на энергообмен неточности изготовления необходимой аперодической нелинейной структуры. Расчеты проведены для случая АНФК  $\text{LiNbO}_3$ , накачиваемого излучением на длине волны 1.064 мкм. Для этих же условий выполнены расчеты периодов модулирующих гармоник в зависимости от перестройки длин волн, участвующих во взаимодействии. Определены также частотные полосы параметрического усиления для рассматриваемого АНФК.

В заключение отметим, что изложенный подход к реализации параметрического усиления при низкочастотной накачке и разработанный метод расчета эффективных коэффициентов нелинейной связи волн можно перенести на волны другой физической природы и другие неоднородные структуры.

На различных этапах выполнения настоящей работы ее результаты обсуждались с В. М. Гордиенко, Г. Д. Лаптевым, А. А. Новиковым, М. Ю. Сайгиным, за что авторы их благодарят.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант № 07-02-00128) и программы ИНТАС (проект № 1000005-7904).

## ЛИТЕРАТУРА

1. С. А. Ахманов, Р. В. Хохлов, *ЖЭТФ* **43**, 351 (1962).
2. R. Kingston, *Proc. IRE* **50**, 472 (1962).
3. H. Kroll, *Phys. Rev.* **127**, 1207 (1962).
4. С. А. Ахманов, А. И. Ковригин, А. С. Пискарскас, Р. В. Хохлов, В. В. Фадеев, *Письма в ЖЭТФ* **2**, 302 (1965).
5. С. А. Ахманов, Р. В. Хохлов, *Проблемы нелинейной оптики*, ВИНТИ, Москва (1964).
6. В. Г. Дмитриев, Л. В. Тарасов, *Прикладная нелинейная оптика*, Физматлит, Москва (2004).
7. A. L. Aleksandrovski, A. S. Chirkin, V. V. Volkov, *J. Rus. Laser Res.* **18**, 101 (1997).
8. O. Pfister, J. S. Wells, L. Hollberg, L. Zink, D. A. Van Baar, M. D. Levenson, and W. R. Bosenberg, *Opt. Lett.* **22**, 1211 (1997).
9. В. В. Волков, А. С. Чиркин, *КЭ* **25**, 101 (1998).
10. E. Yu. Morozov and A. S. Chirkin, *J. Opt. A: Pure Appl. Opt.* **5**, 233 (2003).
11. Y.-Y. Zhu and N.-B. Ming, *Opt. Quant. Electron.* **31**, 1093 (1999).
12. S. M. Saltiel, A. A. Sukhorukov, and Yu. S. Kivshar, *Progr. Opt.* **47**, 1 (2005).
13. А. А. Новиков, А. С. Чиркин, *ЖЭТФ* **133**, 483 (2008).
14. А. С. Чиркин, И. В. Шутов, *Письма в ЖЭТФ* **86**, 803 (2007).
15. И. В. Шутов, А. А. Новиков, А. С. Чиркин, *КЭ* **38**, 258 (2008).
16. I. V. Shutov and A. S. Chirkin, *Phys. Rev. A* **78**, 013827 (2008).
17. H. Ito, C. Takyu, and H. Inada, *Electron. Lett.* **27**, 1221 (1991).
18. K. Mizuuchi, K. Yamamoto, and M. Kato, *Appl. Phys. Lett.* **70**, 10 (1997).
19. A. S. Chirkin, M. Yu. Saigin, I. V. Shutov, *J. Rus. Laser Res.* **29**, 4 (2008).
20. G. K. Kitaeva, I. I. Naumova, A. A. Mikhailovsky, P. S. Losevsky, and A. N. Penin, *Appl. Phys. B* **66**, 201 (1998).
21. С. А. Ахманов, В. А. Выслоух, А. С. Чиркин, *Оптика фемтосекундных лазерных импульсов*, Наука, Москва (1988).