

# ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ «ПРЕДЕЛЬНЫХ» СОЛИТОНОВ ОГИБАЮЩЕЙ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН НА ГЛУБОКОЙ ВОДЕ

*А. В. Слюняев\**

*Институт прикладной физики Российской академии наук  
603950, Нижний Новгород, Россия*

Поступила в редакцию 28 февраля 2009 г.

Представлены результаты численного моделирования «предельных» солитонов огибающей гравитационных волн на глубокой воде, т. е. долгоживущих нелинейных групп, включающих волны, близкие к обрушению. Существование таких квазисолитонных структур было показано в работе [1]. Рассмотрено одиночное распространение и различные типы взаимодействия предельных солитонов огибающей с помощью численного решения уравнений потенциальной идеальной гидродинамики в конформных переменных. Результаты сопоставлены с описанием в рамках обобщенной слабонелинейной модели огибающей (модифицированной модели Диста). Показано, что начальные условия в виде точных решений нелинейного уравнения Шредингера с учетом асимптотических поправок трех порядков, соответствующих связанным волнам, довольно хорошо описывают предельные солитоны огибающей. Выявлены эффекты, связанные с сильно нелинейной динамикой солитонов огибающей: неустойчивость слишком крутых групп, разрушение коротковолнового солитона огибающей длинноволновой группой, образование связанных групп волн.

PACS: 05.45.Yv, 47.35.Fg

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Описание волн, представляющих собой относительно медленные модуляции высокочастотного заполнения (радиоимпульсов), актуально в приложении к различным областям физики. Понятие волновых групп удобно для теоретических представлений, модулированные волны часто встречаются в различных реальных средах, см., например, книгу [2]. В приближении длинных модуляций волн малой амплитуды основной моделью является нелинейное параболическое уравнение, или нелинейное уравнение Шредингера (НУШ). Для случая волн на воде НУШ было выведено Захаровым в 1968 г. [3]. Исключительным преимуществом НУШ для анализа является свойство интегрируемости методом обратной задачи рассеяния [4, 5]. Далее речь будет идти только о фокусирующем типе соотношения дисперсии и нелинейности в НУШ, что соответствует случаю достаточно глубокой воды.

Локализованные нелинейные решения — солитоны огибающей — являются отличительными объектами, принадлежащими дискретной части спектра ассоциированной задачи рассеяния для НУШ. Спектр задачи рассеяния не изменяется во времени. Как хорошо известно, солитоны огибающей НУШ упруго взаимодействуют друг с другом и с компонентой волнового поля, соответствующей сплошному спектру задачи рассеяния, они определяют асимптотическое решение начальной задачи в рамках НУШ, см., например, книгу [6].

Вопрос устойчивости солитонных волн в реальных средах, когда НУШ является лишь первым приближением, существен. Разбиение волн на поверхности глубокой воды на нелинейные группы наблюдалось сначала в лабораторных исследованиях, и открытие явления самомодуляции обычно относят к работам [7, 8], см. также обзор [9]; эффект модуляционной неустойчивости имеет место и во многих других средах (см., например, [10]). Существование долгоживущих уединенных нелинейных групп волн умеренной амплитуды отмечалось в численных экспери-

\*E-mail: Slunyaev@hydro.appl.sci-nnov.ru

ментах по моделированию сильно нелинейной динамики поверхностных волн (в частности, [11–14]), а также внутренних волн в стратифицированном океане, оптике и других средах. Прикладные задачи требуют рассмотрения предельных случаев солитонов огибающей, когда нелинейная волновая группа включает в себе малое число периодов волн. Тогда понятие огибающей волнового пакета становится неочевидным, либо просто теряет смысл. Нужно отметить, что в рамках НУШ интеграл от огибающей солитона есть константа, не зависящая от его параметров, а потому более короткий солитон является и более интенсивным.

Численное моделирование распространения и взаимодействия солитонов в рамках сильно нелинейных (приближенных) уравнений идеальной гидродинамики выполнялось довольно давно, одновременно с появлением таких алгоритмов, см. [11, 12]. Отмечалось, что волны в виде уединенных групп действительно могут распространяться и взаимодействовать друг с другом, но при этом наблюдались эффекты изменения формы изначально заданных солитонов НУШ, а также эффекты неупругого взаимодействия. Таким образом, можно было говорить о квазисолитонах огибающей, т. е. нелинейных волновых группах, которые демонстрируют схожую с солитонами динамику, но на больших временах изменяются, а при взаимодействии с другими волнами излучают.

Различия между динамикой волн в рамках интегрируемого НУШ и сильно нелинейных моделей подчеркивались, в частности, в работах [14–17] в связи с возросшим интересом к описанию модуляционной неустойчивости волн на глубокой воде в приложении к проблеме аномально высоких волн [18]. Вместе с тем, отличительная «живучесть» квазисолитонов волн огибающей на глубокой воде отмечалась в работах [1, 14], в которых было выполнено численное моделирование уравнений гидродинамики в конформных переменных без ограничения на степень нелинейности. В последней работе [1] эволюция начального условия, близкого к солитону НУШ, приводила к появлению и длительному распространению короткой нелинейной группы волн с максимальной крутизной волн, близкой к предельному значению для волн Стокса. В работе [14] столкновение двух встречных солитонов огибающей меньшей амплитуды не приводило к заметному изменению их параметров, но отмечалась сильно отличная динамика волновой группы с формой солитона НУШ (записанного в конформных переменных) большей амплитуды. С учетом продемонстрированного существова-

ния солитона огибающей с близкой к предельной амплитудой в рамках полной модели в работе [1] сделано предположение о своего рода интегрируемости потенциальных уравнений идеальной гидродинамики.

С другой стороны, высокая точность описания волновой динамики в модельной задаче распада группы волн в рамках обобщенного уравнения Шредингера (уравнение Диста [19, 20], которое будет подробнее обсуждаться далее) отмечалась в работе [13] по результатам сопоставления между собой моделей НУШ, Диста и сильнонелинейных подходов.

В настоящей работе исследуются распространение и взаимодействие предельных солитонов огибающей, т. е. нелинейных групп, включающих волны, близкие к обрушению, с помощью численного моделирования потенциальных уравнений идеальной гидродинамики. Также обсуждается, насколько способно приближенное уравнение для огибающей волн (модифицированная модель Диста), являющееся популярной моделью гравитационных волн на воде, описывать короткие интенсивные солитоноподобные нелинейные волновые группы, названные в работе [1] бризерами, чтобы подчеркнуть выход их параметров за пределы классической теории НУШ. В разд. 2 дается краткое описание используемых для настоящего исследования полной гидродинамической модели и приближенной модели огибающей. Метод определения полей смещения поверхности и потенциала скорости по известной функции огибающей волн описан в разд. 3. В настоящей работе рассматриваются одиночные волновые группы и их парное взаимодействие. Далее эти солитоноподобные группы будем называть для краткости солитонами. Задание начальных условий базируется на точных одно- и двухсолитонных решениях НУШ и процедуре учета связанных нелинейных волн, описанной в разд. 3. Раздел 4 содержит результаты моделирования одиночных волновых групп, а разд. 5 — парного взаимодействия солитонов. Результаты исследования обсуждаются в Заключение.

## 2. ЧИСЛЕННЫЕ МОДЕЛИ

### 2.1. Численная модель исходных уравнений гидродинамики

Мы рассматриваем сильнонелинейную динамику волн, и большая часть моделирования основана на алгоритме решения полных (без использования предположений о малости волн) уравнений идеальной гидродинамики. Уравнения двумерных (од-

но направление распространения и одна вертикальная координата) гравитационных волн в потенциальном приближении  $\mathbf{u} = \text{grad } \varphi$ , где  $\mathbf{u}(x, z, t)$  — поле скоростей,  $\varphi(x, z, t)$  — потенциал скорости,  $x, z$  и  $t$  — соответственно горизонтальная и вертикальная координаты и время, записываются через динамическое и кинематическое условия на границе раздела воды и воздуха, задаваемой равенством  $z = \eta(x, t)$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial t} &= -\frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \left(1 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2\right) \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial t} &= -g\eta - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2 \left[1 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2\right]. \end{aligned} \quad (1)$$

Поверхностный потенциал скорости определяется как  $\Phi = \varphi(x, z = \eta(x, t), t)$ ;  $g$  — ускорение свободного падения. Атмосферное давление предполагается однородным над всей поверхностью воды. Рассмотрим случай бесконечно глубокой воды. В ее толще выполняется уравнение Лапласа для потенциала скорости

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0, \quad z \leq \eta \quad (2)$$

с граничным условием на бесконечности

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} \rightarrow 0, \quad z \rightarrow -\infty. \quad (3)$$

Используются периодические граничные условия по координате  $x$ .

С помощью конформного преобразования область  $Z = x + iz$ , заполненная жидкостью и ограниченная свободной границей  $z \leq \eta(x, t)$ , сводится к полуплоскости  $W = u + iv$  с неизменной границей  $v \leq 0$  [21–23]. В случае бесконечно глубокой воды такое преобразование записывается через оператор Гильберта  $\hat{H}$  в виде

$$z = \hat{H} \{x(u, t) - u\}, \quad x(u, t) = u - \hat{H} \{z(u, t)\}. \quad (4)$$

В работах [24, 25] были предложены переменные

$$R = \frac{1}{Z_w}, \quad V = i \frac{1}{Z_w} \frac{\partial}{\partial W} \left( \Phi + i \hat{H} \{ \Phi \} \right), \quad (5)$$

в которых уравнения идеальной гидродинамики (1)–(3) для полупространства  $W$  сводятся к удобному виду:

$$\begin{aligned} R_t &= i(UR_W - RU_W), \\ V_t &= i(UV_W - RB_W) + g(R - 1), \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} U &= \hat{P} \{VR^* + V^*R\}, \quad B = \hat{P} \{VV^*\}, \\ \hat{P} &= \frac{1}{2} \left(1 + i \hat{H}\right), \end{aligned}$$

и соответствующий численный алгоритм является быстрым и устойчивым.

Краткий обзор реализаций подхода в конформных переменных дан в работе [14]. Нами для расчета полнонелинейной динамики волн использовались переменные (5) и уравнения в форме (6) в рамках псевдоспектральной численной схемы с интегрированием по времени методом Рунге–Кутты четвертого порядка.

## 2.2. Уравнения огибающей (модель Диста)

Расчеты в рамках полной гидродинамической модели в конформных переменных сопоставлены нами с решением приближенного уравнения огибающей, представляющего собой обобщенное нелинейное уравнение Шредингера (уравнение Диста с учетом точной линейной дисперсионной зависимости [26]) в форме

$$\begin{aligned} i \frac{\partial A}{\partial t} + \hat{L} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \right] A + \frac{\omega k^2}{2} |A|^2 A + i \frac{3\omega k}{2} |A|^2 \frac{\partial A}{\partial x} + \\ + i \frac{\omega k}{4} A^2 \frac{\partial A^*}{\partial x} + kA \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\omega}{2} \frac{\partial}{\partial x} |A|^2, \quad z = 0,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} \rightarrow 0, \quad z \rightarrow -\infty,$$

дополненное уравнением Лапласа (2) для области  $z \leq 0$ . Уравнение (7) записано для комплексной амплитуды огибающей поля смещения поверхности,  $A(x, t)$ , и потенциала скорости на уровне невозмущенной поверхности,  $\phi = \varphi(x, z = 0, t)$ . Числа  $k$  и  $\omega$  определяют соответственно волновое число и циклическую частоту несущей волны. Уравнение (7) решается в фурье-пространстве, и оператор  $\hat{L}$  задает разрешаемым гармоникам  $k_j$  точную линейную дисперсию для волн на глубокой воде; в фурье-пространстве он может быть записан в виде

$$\hat{L}_k = \sqrt{g(k_j + k)} - \omega, \quad (8)$$

где величина  $k + k_j$  равна волновому числу волны.

Классическое нелинейное уравнение Шредингера получается из уравнения (7) удержанием только слагаемых первого порядка малости по нелинейности и дисперсии и имеет вид

$$i \left( \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\omega}{2k} \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\omega}{8k^2} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\omega k^2}{2} |A|^2 A = 0. \quad (9)$$

Поле смещения поверхности воды для уравнения (9) определяется формулой  $\eta(x, t) = \text{Re}(A(x, t) \exp(i\omega t - ikx))$ .

Уже отмечалось, что особенностью солитонов НУШ является такая связь их геометрических размеров, что более короткий солитон является и более интенсивным, а потому для них выполняется классическое соотношение НУШ между параметрами нелинейности и дисперсии в эволюционном уравнении огибающей:  $A \sim \partial/\partial x$ .

### 3. СВЯЗЬ МЕЖДУ КОМПЛЕКСНОЙ АМПЛИТУДОЙ ОГИБАЮЩЕЙ, СМЕЩЕНИЕМ ПОВЕРХНОСТИ И ПОТЕНЦИАЛОМ СКОРОСТИ

В качестве начальных условий будем использовать точные решения классического НУШ (9), записанные для комплексной амплитуды огибающей  $A(x, t = 0)$ . Для задания начальных условий в рамках исходных уравнений гидродинамики требуются поле смещения  $\eta(x, t = 0)$  и потенциал скорости на поверхности воды  $\Phi(x, t = 0)$ . Аналогично, для сопоставления эволюции полей смещения в рамках полной модели и модели огибающей требуется по функции  $A(x, t)$  определять смещение  $\eta(x, t)$ . В настоящем разделе описана процедура построения полей смещения поверхности и потенциала скорости по известной огибающей  $A$ .

Переменная  $A$  в НУШ (9) описывает первое приближение поля смещения поверхности  $\eta = \text{Re}(A \exp(i\omega t - ikx))$ . С учетом слагаемых следующего порядка малости, выполненного в уравнении Диста (7), амплитуда несущей волны описывается членами двух порядков малости; а потому первым порядком компоненты поля смещения на удвоенной частоте (порядка  $A^2$ ) нельзя пренебречь. Уравнение с учетом слагаемых следующего порядка малости было выведено в работе [27]. Общий подход к выводу уравнений для описания волновых пучков и пакетов рассматривался в работе [28]. Полученные в работе [27] формулы трех порядков малости для полей смещения и потенциала скорости в пределе глубокой воды имеют вид

$$\begin{aligned} \eta(x, t) &= \bar{\eta} + \eta^{(1)} + \eta^{(2)} + \eta^{(3)}, \\ \varphi(x, z, t) &= \bar{\varphi} + \varphi^{(1)} + \varphi^{(2)} + \varphi^{(3)}, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \eta^{(1)} &= \text{Re}(AE), \quad \eta^{(2)} = \frac{k}{2} \text{Re}(A^2 E^2), \\ \eta^{(3)} &= -\frac{1}{2} \text{Im} \left( A \frac{\partial A}{\partial x} E^2 \right) + \frac{3k^2}{8} \text{Re}(A^3 E^3), \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \varphi^{(1)} &= -\frac{\omega}{k} \text{Im}(Ae^{kz} E), \\ \varphi^{(2)} &= \frac{\omega}{2k^2} \text{Re} \left( \frac{\partial A}{\partial x} e^{kz} E \right), \\ \varphi^{(3)} &= \frac{\omega k}{8} \text{Im} [A|A|^2 e^{kz} E] + \\ &\quad + \frac{3\omega}{8k^3} \text{Im} \left[ \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} e^{kz} E \right], \end{aligned} \quad (12)$$

$$E \equiv \exp(i\omega t - ikx),$$

где верхний индекс величин соответствует порядку малости.

Слагаемые  $\bar{\eta}$  и  $\bar{\varphi}$  в формуле (10) соответствуют наведенным нелинейностью длинноволновым (по сравнению с длиной несущей) компонентам поля смещения и потенциала скорости. Эти поправки учитываются моделью Диста через формулы [29]

$$\bar{\varphi}_x = \frac{\omega}{2} \hat{H} \{ (|A|^2)_x \}, \quad \bar{\eta} = \frac{1}{2\omega} \bar{\varphi}_x, \quad (13)$$

где наведенное нелинейностью течение записано в виде преобразования Гильберта  $\hat{H}$ .

Посредством формул (10)–(12) амплитуда  $A(x, t = 0)$  задает поле смещения поверхности  $\eta(x, t = 0)$  с учетом связанных компонент волн (стоксову волну) на удвоенной и утроенной частотах, а также поле потенциала скорости  $\varphi(x, z, t = 0)$ , по которому определяется потенциал на свободной поверхности  $\Phi = \varphi(x, z = \eta(x, t = 0), t = 0)$ . Мы полагали, что длинноволновые поправки к полю скоростей примерно одинаковы на невозмущенном уровне  $z = 0$  и на поверхности, тогда из формул (13) поправка  $\bar{\varphi}$  равна длинноволновой поправке потенциала на поверхности  $\bar{\Phi}$ .

В случае однородных волн поправки (10)–(13) соответствуют разложению стоксовой волны. Хотя известны разложения волны Стокса более высоких порядков (например, [30]), отметим, что формулы (10)–(13) учитывают также неоднородность волн через производную от комплексной амплитуды  $A$  в поправках  $\eta^{(3)}$ ,  $\varphi^{(2)}$ ,  $\varphi^{(3)}$  и длинноволновых компонентах  $\bar{\eta}$ ,  $\bar{\varphi}$ , что в рассматриваемом случае коротких интенсивных групп может быть существенным.

Использование формул учета связанных волн (10)–(13) отличает наш подход от способа задания начальных условий в виде солитонов НУШ в работах [1, 14] и более ранних [11, 12]. Отметим также, что в работе [14] было выведено уравнение Шредингера для конформной переменной, и начальное условие задавалось на основе солитонного решения НУШ в конформных переменных. Мы используем НУШ в физических переменных, и поправки

(10)–(13) являются естественным следствием обобщенной теории НУШ.

#### 4. МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ СОЛИТОНОВ ОГИБАЮЩЕЙ

Односолитонное решение НУШ (9) имеет вид

$$a(y, \tau) = 2a_s \frac{\exp [2ib_s y - 4i(b_s^2 - a_s^2)\tau + \theta_s]}{\text{ch} [2a_s(y - y_s - 4b_s\tau)]}, \quad (14)$$

$$a = \frac{k}{\sqrt{2}} A, \quad V_s = \frac{1}{2} \frac{\omega}{k} + \frac{\omega}{k} b_s,$$

$$y_s = 2kx_s, \quad y = 2k(x - V_s t), \quad \tau = \frac{\omega t}{2}.$$

В формуле (14)  $a$ ,  $y$  и  $\tau$  — безразмерные огибающая, координата и время,  $y_s$  и  $x_s$  — безразмерная и размерная начальные координаты солитона (при  $t = 0$ ),  $\theta_s$  — исходная фаза, которая здесь и далее будет полагаться равной нулю. Безразмерные параметры  $a_s$  и  $b_s$  задают соответственно амплитуду и скорость солитона огибающей, так что  $V_s$  — его размерная скорость, а размерную амплитуду будем обозначать  $A_s = 2^{3/2}a_s/k$ .

При выводе уравнений огибающей предполагается, что волны обладают узким спектром с выделенным волновым числом  $k$ . Волны в рамках этих уравнений описываются тем лучше, чем ближе их волновое число к значению  $k$ . Параметр  $b_s$  в формуле (14) задает скорость солитона  $V_s$  относительно групповой скорости несущей  $\omega/2k$ , изменяя волновое число заполняющей солитона. По этой причине более аккуратно должны описываться солитоны огибающей с невозмущенным волновым числом, т. е. следует полагать  $b_s = 0$ .

Нами было выполнено несколько численных расчетов, где в качестве начального условия задавалось решение (14) с учетом поправок (10)–(13). Для удобства волновое число выбиралось  $k = 1$ , а амплитуда солитона (14)  $A_s$  варьировалась. Ускорение свободного падения  $g$  для удобства было выбрано равным единице. Таким образом, период несущей волны равен  $2\pi$ . Исходное положение солитона выбиралось равным нулю. Универсальным параметром является крутизна, которую мы будем определять как  $kA$ , причем  $kA = A$  в силу выбора  $k$ . С учетом нелинейных поправок (10)–(13) крутизна однородной волны может быть также определена через полувысоту волны  $(\eta_{cr} - \eta_{tr})/2$ , где  $\eta_{cr}$  — высота гребня и  $\eta_{tr}$  — глубина впадины, как

$$kA_{nl} = k \frac{\eta_{cr} - \eta_{tr}}{2} = A + \frac{3}{8}A^3, \quad (15)$$

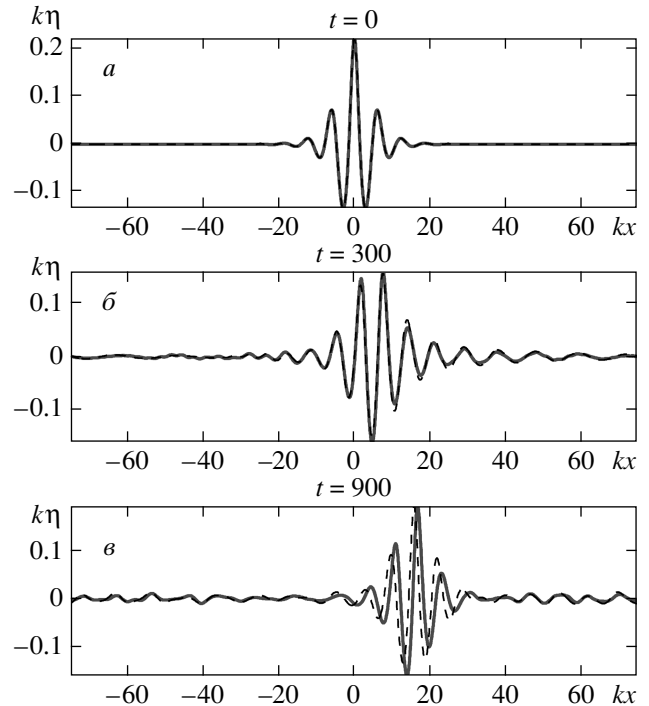
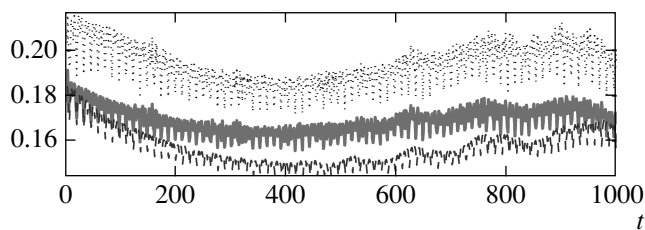


Рис. 1. Расчет эволюции солитона огибающей с  $A_s = 0.2$  в рамках полных уравнений (сплошная линия) и уравнения Диста (штриховая) при  $t = 0$  (а),  $t = 300$  (б),  $t = 900$  (в)

$$\eta_{cr} = A + \frac{1}{2}A^2 + \frac{3}{8}A^3, \quad \eta_{tr} = -A + \frac{1}{2}A^2 - \frac{3}{8}A^3.$$

Кроме того, крутизну можно определять непосредственно как производную по координате от функции  $\eta(x)$  (наклон волновой поверхности). Тогда значением крутизны, соответствующим гребню с углом  $120^\circ$ , является величина  $3^{-1/2}$ . Такая крутизна отвечает геометрическому критерию обрушения волн.

Профили смещения поверхности по результатам расчета эволюции солитона огибающей (14) с амплитудой  $A_s = 0.2$  в рамках полной модели в конформных переменных и уравнения Диста показаны на рис. 1 для различных времен. Накладывались периодические граничные условия на домен вычислений, и за время эволюции группа совершила несколько циклических проходов по домену. Начальный этап эволюции возмущения сопровождается некоторым искажением группы и различимым излучением волн вперед (низкочастотная компонента) и назад (высокочастотная компонента); искажение профиля огибающей на начальном этапе особенно хорошо было заметно при расчете уравнения Диста, где вычисляются собственно профили огибающей. Перед излуче-

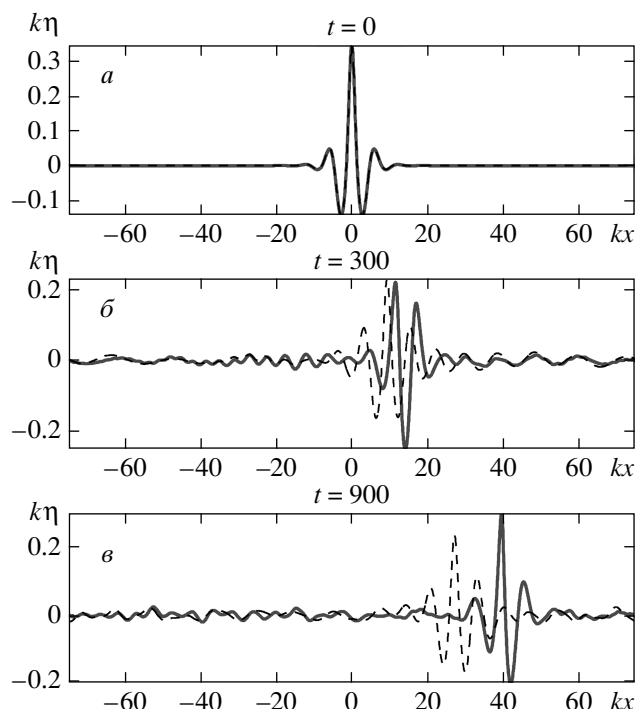


**Рис. 2.** Максимальные значения полувысоты волн при эволюции солитона огибающей с  $A_s = 0.2$ , рассчитанные в рамках полных уравнений (сплошная линия) и уравнения Диста (штрихи). Максимальные значения крутизны поверхности (точки) по результатам полнонелинейного моделирования

нием волн вперед и назад крутизна профиля огибающей увеличивается; он становится снова гладким после излучения волн. Далее интенсивная группа распространяется на фоне малоамплитудных излученных волн без видимых искажений, как показано на рис. 1в.

Амплитуда волновой группы в каждый момент времени может быть определена как полуразница между максимумом и минимумом поля смещения по счетному домену, т. е. это половина высоты максимальной волны (далее — максимальная полувысота). Эта величина характеризует интенсивность волнового пакета и построена на рис. 2. Поскольку число волн в группе мало, полувысота волн на рис. 2 осциллирует; она также несколько меньше, чем амплитуда исходного возмущения  $A_s$  даже в начальный момент времени, несмотря на поправку (15), что также связано с малым числом заполняющих волн в группе. На рис. 2 видно, что хотя эволюция начального возмущения сопровождается уменьшением полувысоты волн до времен около  $t = 300$ , далее наблюдается стабилизация значения полувысоты на рис. 2 связаны, очевидно, с взаимодействием с излученными на начальном этапе волнами. Таким образом, после некоторой перестройки, связанной, по всей видимости, с неидеальным заданием начального условия, солитон НУШ распространяется как целое на фоне малоамплитудных волн без видимых искажений.

Из рис. 1 следует, что первые различия между моделированием в рамках полных уравнений и модели огибающей проявляются в слабом расхождении профилей индивидуальных волн (рис. 1б) (вероятно, из-за расхождения между фазами волн, моделируемых различными уравнениями). Позднее прояв-



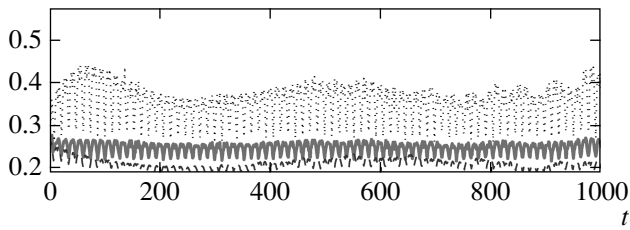
**Рис. 3.** Расчет эволюции солитона огибающей с  $A_s = 0.3$  в рамках полных уравнений (сплошная линия) и уравнения Диста (штрихи) при  $t = 0$  (а),  $t = 300$  (б),  $t = 900$  (в)

ляются различия и между огибающими, в частности, волновой пакет в рамках уравнения Диста как целое распространяется медленнее, чем в полной модели (рис. 1в). Рисунок 2 демонстрирует, что высота волн, рассчитанных в рамках уравнения Диста, несколько меньше высоты волн в рамках полнонелинейного расчета, хотя тенденции поведения высоты волн схожи. Для оценки действия нелинейности можно использовать так называемое нелинейное время, получаемое сопоставлением эволюционного и нелинейного слагаемых в уравнении (9):

$$\omega T_{nl} \propto \frac{2}{k^2 A^2} \quad \text{или} \quad T_{nl} \propto \frac{2}{A^2}. \quad (16)$$

Случай  $A_s = 0.2$  дает оценку  $T_{nl} \approx 50$ , тогда моделирование на рис. 1, 2 соответствует 20 характерным временам нелинейности.

Аналогичный расчет для  $A_s = 0.3$  показан на рис. 3 и 4. В этом случае  $T_{nl} \approx 20$  и расхождение между моделью Диста и расчетом полных уравнений проявляются быстрее, так что при  $t = 300$  (рис. 3б) уже есть существенные различия между огибающими, группа бежит быстрее в рамках полных уравнений. Если на рис. 2 на больших време-



**Рис. 4.** Максимальные значения полувысоты волн при эволюции солитона огибающей с  $A_s = 0.3$ , рассчитанные в рамках полных уравнений (сплошная линия) и уравнения Диста (пунктир). Максимальные значения крутизны поверхности (точки) по результатам полнонелинейного моделирования. Максимум вертикальной оси графика соответствует наклону поверхности  $60^\circ$

нах высоты волн в рамках полной и приближенной моделей были близки, то на рис. 4 недооценка высот волн приближенной моделью носит регулярный характер; тенденции значений высот волн на рис. 4 также кажутся различными для двух моделей. На рис. 3 видно, что мелкомасштабные волны плохо описываются моделью Диста, в отличие от результатов на рис. 1.

Итак, существование солитонной волновой группы демонстрируется как приближенной моделью огибающей, так и полной моделью. Неизменность полувысоты волновой группы, рассчитанной в рамках полных уравнений гидродинамики, выглядит на рис. 4 даже более впечатляющей, чем на рис. 2. Здесь осцилляции значения максимальной высоты волн еще более выражены, чем в предыдущем случае, поскольку в пакете фактически заключены 1–2 индивидуальные волны, см. рис. 3.

На рис. 2, 4 точками построены зависимости максимума крутизны (наклона) поверхности, рассчитанной как производная от профиля поверхности по координате; для этого использованы данные полнонелинейного моделирования. Такой расчет позволяет учесть сложное отклонение профиля волн от синусоидального. Максимум вертикальной оси графика на рис. 4 соответствует наклону поверхности равному  $60^\circ$ ,  $3^{-1/2} \approx 0.577$ . После перестройки волновой группы, которой на рис. 4 соответствуют времена  $t < 200$ , волны в нелинейном пакете достигают около 70 % предельной крутизны.

Отметим различия в поведении зависимостей максимальной крутизны на рис. 2 и рис. 4 на начальном этапе эволюции. Хотя характер поведения максимальной полувысоты волн схож в обоих случаях,

максимальная крутизна (точки на рис. 2 и рис. 4) во втором случае сначала нарастает. При задании начального условия с немного большим значением  $A_s$  крутизна волн быстро вырастает, и они обрушиваются. Расчет для  $A_s = 0.25$  демонстрирует зависимости максимальных полувысот качественно схожие со случаем  $A_s = 0.2$ , но на начальном этапе крутизна волн нарастала аналогично случаю  $A_s = 0.3$ .

## 5. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ СОЛИТОНОВ ОГИБАЮЩЕЙ

Итак, в предыдущем разделе мы показали, что солитонное решение, определяемое моделью НУШ с учетом поправок (10)–(13), задает полнонелинейное решение в виде солитона огибающей с хорошей точностью вплоть до значений крутизны, близких к предельным (до  $A_s \approx 0.3$ ). Такие группы распространяются длительное время на фоне малоамплитудных волн без заметных изменений. Будут ли предельные солитоны разрушаться при столкновении с более интенсивными волнами?

Как уже отмечалось, столкновение солитонов как попутное, так и встречное уже рассматривалось в рамках моделей, справедливых для волн большой крутизны, например [11, 12, 14]. При этом рассматривались случаи, когда число заполняющих волн в группе значительно. Для задания начального условия в виде нескольких солитонов обычно пользуются решением (14) с учетом того факта, что оно экспоненциально убывает, а значит, достаточно удаленные друг от друга солитоны должны с хорошей точностью описываться формулой (14).

На рис. 5, 6 показан результат моделирования в рамках уравнений в конформных переменных встречного взаимодействия двух солитонов огибающей НУШ (14) одной амплитуды  $A_s = 0.2$  и с одинаковыми длинами волны несущей  $|k| = 1$ . На рис. 6 построены зависимости от времени максимальных полувысот волн и максимальной крутизны волн (наклона поверхности). За время, отраженное на рис. 6, произошло семь столкновений солитонов огибающей, чему соответствуют увеличения значений высоты и крутизны на рис. 6. Отметим, что высота солитонов огибающей осталась практически неизменной, демонстрируя лишь медленную вариацию. На рис. 5 также видно, что солитоны практически не изменились. Можно заключить из сравнения профилей после первого (рис. 5б) и шестого (рис. 5в) столкновений, что различие между ними

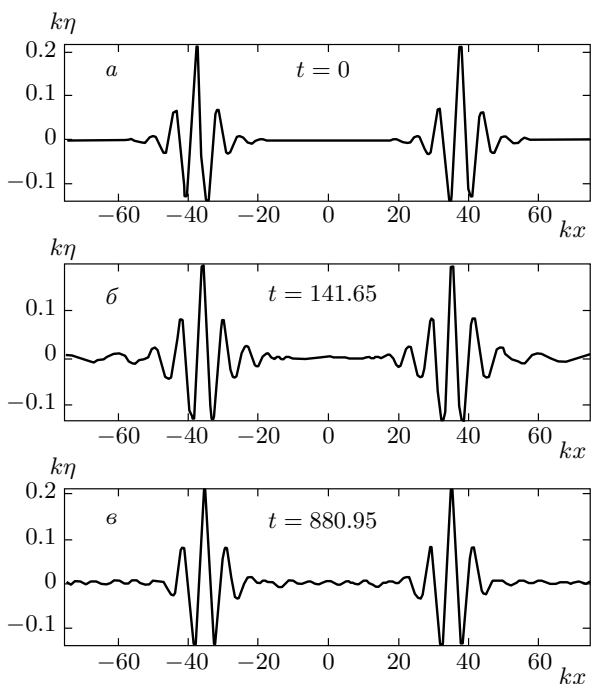


Рис. 5. Расчет встречного взаимодействия солитонов огибающей с  $A_s = 0.2$  и  $|k| = 1$ ,  $|x_s| = 37.5$  в рамках полных уравнений. Показаны начальный момент времени  $t = 0$  (а), момент после первого столкновения  $t \approx 142$  (б) и профиль после шести столкновений  $t \approx 881$  (в)

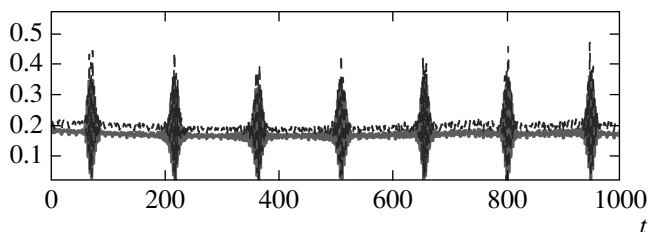


Рис. 6. Максимальные значения полувысоты волн (сплошная линия) и крутизны поверхности (штрихи), рассчитанные в рамках полных уравнений при встречном взаимодействии солитонов огибающей с  $A_s = 0.2$ . Максимум вертикальной оси графика соответствует наклону поверхности  $60^\circ$

заключается только в распределении излученных на начальном этапе малоамплитудных волн.

При взаимодействии попутных солитонов время взаимодействия больше, чем при встречном столкновении. На рис. 7 приведены профили волн в начальный момент и момент  $t = 1000$  в случае взаимодействия двух солитонов НУШ (14) с параметрами

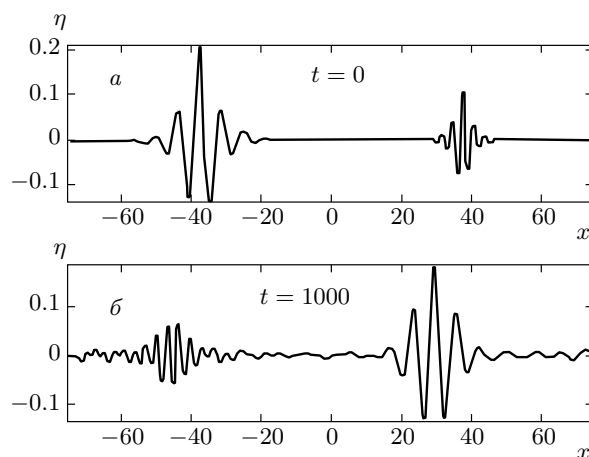


Рис. 7. Расчет попутного взаимодействия солитонов огибающей с  $A_s = 0.19$ ,  $k = 1$ ,  $x_s = -37.5$  и  $A_s = 0.095$ ,  $k = 2$ ,  $x_s = 37.5$  в рамках полных уравнений при  $t = 0$  (а),  $t = 1000$  (б)

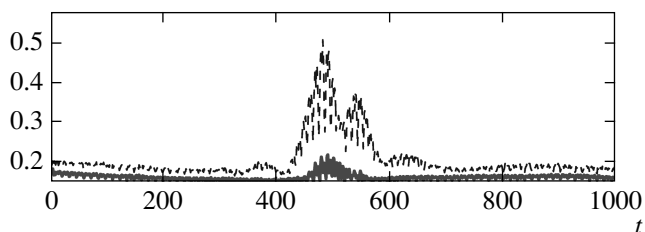


Рис. 8. Максимальные значения полувысоты волн (сплошная линия) и крутизны поверхности (штрихи), рассчитанные в рамках полных уравнений при попутном взаимодействии солитонов огибающей с  $A_s = 0.19$ ,  $k = 1$ ,  $x_s = -37.5$  и  $A_s = 0.095$ ,  $k = 2$ ,  $x_s = 37.5$ . Максимум вертикальной оси графика соответствует наклону поверхности  $60^\circ$

$A_s \approx 0.2$ ,  $k = 1$  (на рис. 7а слева) и  $A_s \approx 0.1$ ,  $k = 2$  (на рис. 7а справа). Параметры солитонов выбраны так, что степень нелинейности как индивидуальных волн, так и групп одинакова для обоих солитонов огибающей. На рис. 8 построены соответствующие временные зависимости максимальных значений полувысоты волн и крутизны.

Из рис. 7, 8 следует, что после единственного столкновения солитон с малой длиной волны сильно деформировался, а длинноволновый солитон остался практически неизменным. Отметим, что хотя при попутном взаимодействии, в отличие от встречного, величины высоты волн во время прохождения одного солитона через другой выросли слабо, значения крутизны возросли много больше (ср. рис. 6 и



рис. 8). При взаимодействии, проиллюстрированном на рис. 7, 8, волны практически достигли предельных значений крутизны.

Время взаимодействия будет еще больше в случае солитонов с близкими начальными скоростями. При этом вырастет и время, необходимое, чтобы заданные с помощью уравнения (14) удаленные солитоны приблизились друг к другу, а значит, вырастет время численного счета и требования к его точности. По этой причине начальное условие для взаимодействующих солитонов далее нами задается с помощью точного двухсолитонного решения НУШ, которое в безразмерной форме может быть представлено в виде

$$a(y, \tau) = 4 \frac{|\chi|Z}{|\mu|D}, \quad (17)$$

$$Z = a_1 \Omega_1 \left( 1 + \frac{\chi \mu^*}{\chi^* \mu} \Omega_2^2 \right) \frac{\chi^*}{\chi} e^{i\sigma_1} + a_2 \Omega_2 \left( 1 + \frac{\chi^* \mu^*}{\chi \mu} \Omega_1^2 \right) e^{i\sigma_2},$$

$$D = \left( \frac{|\chi|^2}{|\mu|^2} + \Omega_1^2 \right) \left( \frac{|\chi|^2}{|\mu|^2} + \Omega_2^2 \right) + 1 - \frac{|\chi|^4}{|\mu|^4} - 8\Omega_1 \Omega_2 \frac{a_1 a_2}{|\mu|^2} \cos(\sigma_2 - \sigma_1),$$

$$\Omega_j = \exp(-2a_j(y - y_j - 4b_j\tau)),$$

$$\sigma_j = 2b_j y - 4(b_j^2 - a_j^2)\tau + \theta_j, \quad j = 1, 2,$$

$$\chi = (b_2 - b_1) + i(a_2 + a_1), \quad \mu = (b_2 - b_1) - i(a_2 - a_1).$$

Здесь  $a_j$  и  $b_j$  ( $j = 1, 2$ ) задают амплитуды и скорости солитонов,  $y_j$  — их позиции, а  $\theta_j$  — фазы.

Как уже отмечалось, предпочтительно выбирать солитоны огибающей, бегущие с групповой скоростью несущей волны, что соответствует выбору  $b_1 = b_2 = 0$  в формуле (17). В рамках НУШ такие солитоны имеют одинаковые скорости и в случае, когда они расположены в одной точке, иногда называются бризерами или бисолитонами. Они взаимодействуют периодическим образом и не способны разбежаться из-за равенства скоростей. Если солитоны разнесены, то их огибающая не изменяется во времени. Поскольку скорость волн Стокса увеличивается с ростом амплитуды, мы предполагаем, что в полной модели за счет эффекта нелинейности более интенсивный солитон НУШ будет обладать большей скоростью, чем меньший солитон с тем же волновым числом заполняющей волны. По этой причине параметры солитонов (17), задающих начальное условие, подбирались таким образом, чтобы волновые числа их заполнения были одинаковы,  $k = 1$ ,

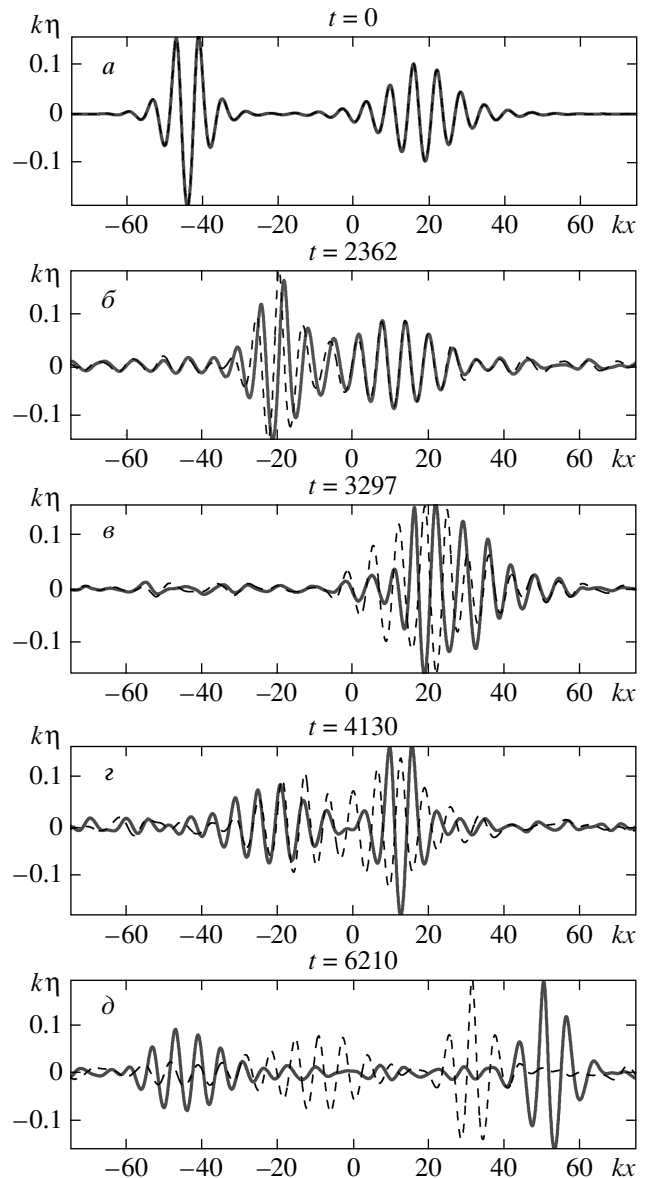
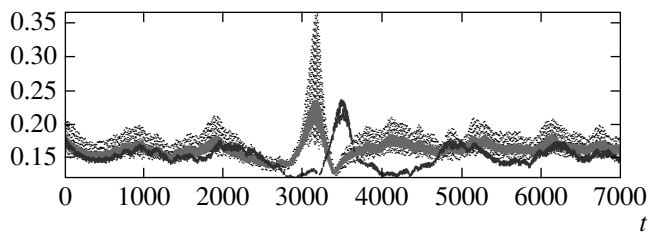


Рис. 9. Расчет эволюции бисолитона 1 в рамках полных уравнений (сплошная линия) и уравнения Диста (штрихи) при  $t = 0$  (а),  $t = 2362$  (б),  $t = 3297$  (в),  $t = 4130$  (г),  $t = 6210$  (д)

$b_1 = b_2 = 0$ , «хвосты» солитонов перекрывались, обеспечивая их взаимодействие, и солитон большей амплитуды был расположен позади солитона меньшей. Исходные фазы солитонов  $\theta_j$  полагались равными нулю.

В первом случае (бисолитон 1, рис. 9а) параметры равнялись  $A_1 = 0.2$ ,  $A_2 = 0.1$ ,  $x_1 = -40$ ,  $x_2 = 10$ . Начальное условие (17) было сначала просчитано в



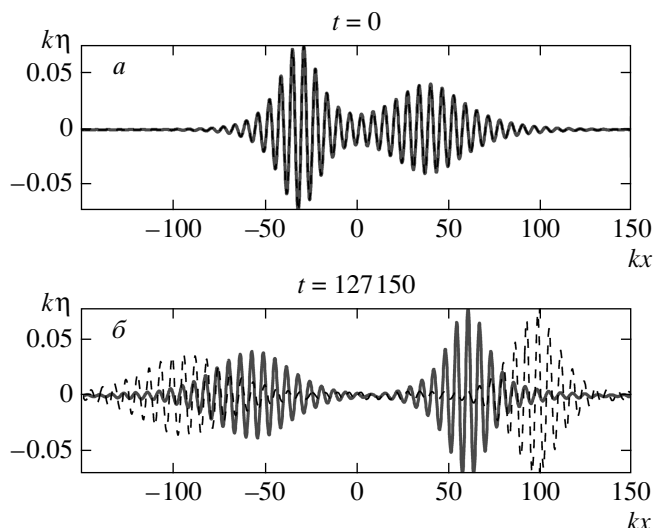
**Рис. 10.** Максимальные значения полувысоты волн при эволюции бисолитона 1, рассчитанные в рамках полных уравнений (сплошная линия) и уравнения Диста (штрихи). Максимальная крутизна поверхности (точки) по результатам полнонелинейного моделирования

рамках численной модели НУШ (9), чтобы убедиться в том, что численные погрешности не приводят к изменению формы огибающей.

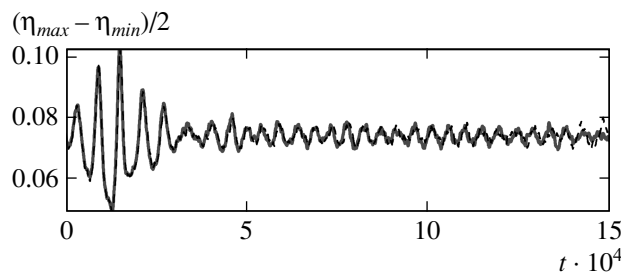
Результаты моделирования в рамках полной модели и уравнения Диста представлены на рис 9 и рис. 10. Как и в случае одиночных солитонов, сначала происходит излучение малоамплитудных волн вперед и назад. Начальные условия на рис. 9а соответствуют хорошо разнесенным солитонам и к тому моменту, когда большая группа догоняет меньшую (рис. 9б), уже имеется небольшое расхождение между расчетами в рамках полной модели и модели Диста. Далее группы сливаются (рис. 9в), при этом происходит «биение» групп, приводящее к возникновению высоких крутых волн (см. сплошную линию и точки на рис. 10,  $t \approx 3000$ ). В рамках уравнений Диста такие волны появляются позднее (штрихи на рис. 10,  $t \approx 3500$ ). Потом большой солитон восстанавливается уже справа от меньшей группы (рис. 9г).

На больших временах (рис. 9д) групповая структура сохраняется в расчетах как в рамках полных уравнений, так и уравнений огибающей, хотя очевидны значительные сдвиги солитонов огибающей в зависимости от модели (рис. 9д). Значения крутизны, построенные на рис. 10, оказались значительно меньше тех, что наблюдались в случае взаимодействия солитонов на рис. 8. Из-за другой длины волны несущей меньший солитон на рис. 8 обладал большей крутизной, чем в составе бисолитона.

На рис. 10 видно, что в процессе взаимодействия значения крутизны волн могут значительно превышать начальные. В предыдущем разделе было показано, что солитоны НУШ со значениями крутизны до 0.2 в рамках уравнения Диста описываются довольно хорошо. Но что происходит для случая



**Рис. 11.** Расчет эволюции бисолитона 2 в рамках полных уравнений (сплошная линия) и уравнения Диста (штрихи) при  $t = 0$  (а),  $t = 127150$  (б)



**Рис. 12.** Максимальные значения полувысоты волн при эволюции бисолитона 2, рассчитанные в рамках полных уравнений (сплошная линия) и уравнения Диста (штрихи)

меньших значений крутизны? С одной стороны, для солитонов малой амплитуды должна быть справедлива теория НУШ, с другой — мы рассматриваем большие времена, когда асимптотическая теория может не быть справедливой. Стремится ли поведение бисолитона при уменьшении амплитуды к решению НУШ?

Эволюция бисолитона 2 с параметрами  $A_1 = 0.08$ ,  $A_2 = 0.04$ ,  $x_1 = -20$ ,  $x_2 = 20$  проиллюстрирована на рис. 11, 12. На рис. 11 приведены начальный профиль смещения и поле после длительной эволюции, рассчитанной в рамках полной модели и уравнения Диста. В отличие от предсказаний НУШ, большой солитон все же обогнал меньший, что согласуется с нелинейными поправками к их ско-

ростам, не учитываемыми классическим НУШ. На рис. 11б видно, что фоновый уровень излученных волн много меньше, чем в случае взаимодействия более интенсивных солитонов на рис. 9, что объясняется более аккуратным описанием начальных условий и слабым излучением во время взаимодействия. Взаимодействие солитонов сопровождается «биением», когда больший солитон то увеличивает, то уменьшает свою амплитуду, что видно на рис. 12. В отличие от случая бисолитона 1 (рис. 10), на рис. 12 различается несколько таких биений ( $0 < t < 30000$ ). На больших временах колебания значений высоты волн присутствуют, но они много слабее.

Как следует из расчетов уравнений в конформных переменных, появившись справа от меньшего, больший солитон не убегает дальше; они оказываются связанными и распространяются вместе, как показано на рис. 11б. После появления большего солитона справа от меньшей группы, перетяжка между группами то исчезает, то вновь возникает. Группы остаются связанными на всем времени численного моделирования до  $t = 150000$ , что соответствует более 20000 периодов волн, или почти 500 характерным временам нелинейности  $T_{nl}$ .

Приближенная модель огибающей Диста довольно хорошо описывает процесс до появления большего солитона справа от меньшего, а также динамику максимальных значений высот во время взаимодействия (рис. 12). На больших временах меньшая нелинейная группа запаздывает относительно рассчитанной в рамках полной модели (рис. 11б). В модели Диста больший солитон после прохода через меньший оказывается правее, чем в полнонелинейном расчете; с течением времени он уходит от меньшего, что видно на рис. 11б. Таким образом, в рамках обобщенного уравнения для огибающей взаимодействие солитонов не ведет к их связыванию, в отличие от моделирования полных уравнений идеальной гидродинамики.

## 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе посредством численного решения потенциальных уравнений идеальной гидродинамики и приближенных уравнений огибающей волновых пакетов рассмотрены модельные задачи распространения и взаимодействия солитоноподобных нелинейных волновых групп большой амплитуды. Солитоны огибающей являются точным решением первого приближения нелинейно-дисперсионной

теории волн на глубокой воде (нелинейного уравнения Шредингера). Также было известно, что нелинейные волновые группы умеренной высоты могут формироваться и распространяться в рамках сильнонелинейного моделирования и лабораторных экспериментов. Удивительно, что солитоноподобные волновые группы могут распространяться без излучения даже в случае значений крутизны, близких к предельным. Такие группы могут содержать лишь 2–3 заполняющих волны и формируются из относительно разнообразных начальных условий [1].

Мы показали, что предельные солитоны огибающей с хорошей точностью могут быть описаны как классические солитоны НУШ с учетом связанных волн трех порядков малости. Индивидуальные волны в получаемых группах имеют значения крутизны (наклон поверхности) примерно до 0.4. При еще больших амплитудах задаваемых начальных условий значения крутизны быстро увеличиваются и волны обрушиваются.

Эволюция предельных солитонов огибающей может быть довольно хорошо описана в рамках обобщенного уравнения Шредингера (модели Диста) до значений крутизны волн порядка  $kA \approx 0.2$ – $0.25$ . Для еще больших значений  $kA$  различия становятся качественными и быстро проявляются.

Найдено, что при многократном встречном столкновении предельные солитоны огибающей сохраняют приблизительные значения своих амплитуд, а при попутном — солитон с большей длиной волны сохраняется, но разрушается коротковолновый. При взаимодействии солитонов с близкими волновыми числами заполняющих волн возможно образование связанных солитонных состояний, когда за большим солитоном следует меньший; при этом между ними остается «перетяжка», обеспечивающая их взаимодействие. Этот эффект не описывается ни первым приближением уравнения на модуляции (нелинейное уравнение Шредингера), ни вторым (модифицированное уравнение Диста). Нужно, однако, отметить, что такое взаимодействие происходит очень долго (на рис. 11, 12 взаимодействие групп имеет продолжительность около 500 характерных времен нелинейности  $T_{nl}$ ), а потому применимость асимптотической модели Диста формально необоснована. Кроме того, в отличие от исходной системы гидродинамических уравнений, модель Диста не обладает гамильтоновой структурой, что связано со свободой при применении асимптотических разложений и определении огибающей (см. [31]). На больших временах такие особенности могут вести к существенным отличиям.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты №№ 08-02-00039, 08-05-00069), а также в рамках Государственной программы (грант № 2008-МО-04-06), программы по поддержке Научных школ (НШ-1244.2008.2) и проекта Extreme Seas. Автор благодарен В. И. Таланову, обратившему внимание на проблему, и Е. А. Кузнецову за ценные замечания.

## ЛИТЕРАТУРА

1. А. И. Dyachenko and V. E. Zakharov, Письма в ЖЭТФ **88**, 356 (2008).
2. Л. А. Островский, А. И. Потапов, *Введение в теорию модулированных волн*, Наука, Москва (2003).
3. В. Е. Захаров, ПМТФ **2**, 86 (1968).
4. В. Е. Захаров, А. Б. Шабат, ЖЭТФ **61**, 118 (1971).
5. В. Е. Захаров, А. Б. Шабат, ЖЭТФ **64**, 1627 (1973).
6. В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский, *Теория солитонов. Метод обратной задачи*, Наука, Москва (1980).
7. Т. В. Benjamin and J. E. Feir, J. Fluid Mech. **27**, 417 (1967).
8. Т. В. Benjamin, Proc. Roy. Soc. London A **299**, 59 (1967).
9. V. E. Zakharov and L. A. Ostrovsky, Physica D **238**, 540 (2009).
10. С. Н. Власов, В. И. Таланов, *Самофокусировка волн*, ИПФ РАН, Н. Новгород (1997).
11. D. Dommermuth and D. K. P. Yue, J. Fluid Mech. **184**, 267 (1987).
12. B. J. West, K. A. Brueckner, R. S. Janda et al., J. Geophys. Res. **92**, 11803 (1987).
13. D. Clamond, M. Francius, J. Grue, and C. Kharif, Eur. J. Mech. B/Fluids **25**, 536 (2006).
14. V. E. Zakharov, A. I. Dyachenko, and A. O. Prokofiev, Eur. J. Mech. B/Fluids **25**, 677 (2006).
15. M. Tanaka, Wave Motion **12**, 559 (1990).
16. K. L. Henderson, D. H. Peregrine, and J. W. Dold, Wave Motion **29**, 341 (1999).
17. A. I. Dyachenko and V. E. Zakharov, Письма в ЖЭТФ **81**, 318 (2005).
18. C. Kharif, E. Pelinovsky, and A. Slunyaev, *Rogue Waves in the Ocean*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg (2009).
19. K. B. Dysthe, Proc. Roy. Soc. London A **369**, 105 (1979).
20. E. Lo and C. C. Mei, J. Fluid Mech. **150**, 395 (1985).
21. A. I. Dyachenko, E. A. Kuznetsov, M. D. Spector, and V. E. Zakharov, Phys. Lett. A **221**, 73 (1996).
22. А. И. Дьяченко, В. Е. Захаров, Е. А. Кузнецов, Физика плазмы **22**, 916 (1996).
23. D. Chalikov and D. Sheinin, in: *Nonlinear Ocean Waves, Advances in Fluid Mechanics*, ed. by W. Perrie, Vol. 17 (1998), p. 207.
24. А. И. Дьяченко, ДАН **376**, 27 (2001).
25. V. E. Zakharov, A. I. Dyachenko, and O. A. Vasilyev, Eur. J. Mech. B/Fluids **21**, 283 (2002).
26. K. Trulsen, I. Kliakhandler, K. B. Dysthe, and M. G. Velarde, Phys. Fluids **12**, 2432 (2000).
27. А. В. Слюняев, ЖЭТФ **128**, 1061 (2005).
28. С. Н. Власов, Е. В. Копосова, В. И. Таланов, Изв. ВУЗов: Радиофизика **49**, 321 (2006).
29. K. Trulsen, in: *Waves in Geophysical Fluids: Tsunamis, Rogue Waves, Internal Waves and Internal Tides*, ed. by J. Grue and K. Trulsen, CISM Courses and Lectures No. 489, Springer Wein, New York (2006), p. 49.
30. J. D. Fenton, J. Fluid Mech. **94**, 129 (1979).
31. В. Е. Захаров, Е. А. Кузнецов, ЖЭТФ **113**, 1892 (1998).